

動的陽解法 FEM による波動方程式の数値計算

真鍋 圭司*

Numerical Analysis of Wave Equation by Dynamic Explicit FEM

Keiji MANABE*

ABSTRACT

Wave equation is analyzed by dynamic explicit FEM (Finite Element Method). One dimensional basic problems of the wave equation, standing wave and progressive wave are simulated. The standing wave which has initial triangle shape is solved by simple explicit scheme, and good correlation with analytical solution by Fourier expansion is found. The progressive sine wave is also calculated by the dynamic explicit FEM. Out flow of the wave can be simulated by the FEM formulation of weak part term. The reflection at free end and at fixed end can be simulated by this scheme.

キーワード：動的陽解法，有限要素法，波動方程式，弱形式

Keywords: Dynamic Explicit, FEM, Wave Equation, Weak Form Formulation

1. 緒言

機械工学の分野において，FEM (Finite Element Method:有限要素法) は静的な問題の解析に多く使用されている．例えば，金属の弾性変形や塑性変形などの変形の FEM 解析により材料の強度の評価が可能になっている．その静的問題では加速度を考えず，つり合い条件を考える．そのため巨大な行列の連立方程式を解く必要があり，計算機のメモリーや計算時間を多く使用する．

一方，動的陽解法 FEM は，変位の時間発展を，ニュートンの第二法則に基づき陽的に求める数値解法であり，加速度を含む動的問題を対象としている．動的陽解法の一つの利点は，質量行列を対角化することによって，連立方程式を解かない計算スキームを得ることができることにある．したがって計算機のメモリーを大幅に節約することができ，大規模な計算シミュレーションも可能となる．

動的陽解法 FEM は，加速度運動を対象とした定式

であるが，金属の塑性変形のような静的問題も，質量行列を過大にとるなどの工夫によって，シミュレーションが行われている．例えば，3次元切削過程の解析にも応用可能である[1]．

本報告では，動的陽解法を，その名の通りの動的問題を対象として計算を行う．機械工学の動的問題は，振動問題が代表的であり，建物の揺れの解析を行った[2][3]．共振問題なども取り扱い可能である．

今回の報告では，波動方程式を計算対象とした．波動方程式は基礎的な動的問題であり，これを動的陽解法 FEM によって，十分な解析が行えるかどうかを検討した．

本報告では，1次元問題を取り扱い，フーリエ級展開の基本問題である三角波の問題を取り扱った．また，1次元の波の出口境界における流出，自由端や固定端での反射の計算を取り扱った．

* 機械システム工学科

2. 波動方程式の動的陽解法 FEM 定式化

2. 1 波動方程式の弱定式化

波動方程式では、空間、時間の関数である変位 y を未知数とする。

$$y = y(x, t) \quad \dots (1)$$

このとき、波動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \dots (2)$$

ここで v は位相速度である。いま、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \ddot{y}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y'' \quad \dots (3)$$

のように略記すると、波動方程式(2)は次の様に表示できる。

$$\ddot{y} - v^2 y'' = 0 \quad \dots (4)$$

この式を FEM によって解くため、重み付き残差法 (Galerlin 法) に基づき、重み δy をかけて、解析領域 $[a, b]$ で積分する。

$$\int_a^b \delta y (\ddot{y} - v^2 y'') dx = 0 \quad \dots (5)$$

部分積分を用いて変形すると、次の弱形式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta y \ddot{y} dx + v^2 \int_a^b \delta y' y' dx \\ = v^2 [\delta y y']_a^b \quad \dots (6) \end{aligned}$$

2. 2 要素行列

要素分割を行い、1つの要素についての式を求める。式(6)の右辺は、解析領域の両端にのみ現れるから今は考えない。従って要素 elm では、

$$\int_{elm} \delta y \ddot{y} dx - v^2 \int_{elm} \delta y' y' dx = 0 \quad \dots (7)$$

となる。要素は1次元の2節点1次要素とし、1次補間を行列を用いて表現する。ここで行列は、列ベクトルとし、右肩の T は、転置行列を表すものとする。

$$[N] = (N_1 \ N_2)^T, \quad \{y\} = (y_1 \ y_2)^T \quad \dots (8)$$

$[N]$ は形状関数であり、1つの要素内の y および y' は

次のように補間できる。

$$\begin{aligned} y &= [N]^T \{y\}, & \delta y &= [N]^T \{\delta y\} \\ y' &= [N']^T \{y\}, & \delta y' &= [N']^T \{\delta y\} \quad \dots (9) \end{aligned}$$

これらを代入し、これが任意の $\{\delta y\}$ について成り立つとすると要素マトリックスは

$$\int_{elm} [N][N]^T dx \{\ddot{y}\} + v^2 \int_{elm} [N'] [N']^T dx \{y\} = 0 \quad \dots (10)$$

となる。そしてこれを系全体に組み込んだ全体行列を、

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{P\} \quad \dots (11)$$

と表す。 $\{P\}$ には、式(6)の左辺

$$v^2 [\delta y y']_a^b \quad \dots (12)$$

を、有限要素表示し、解析領域の両端に適用する。

2. 3 動的陽解法の定式

加速度項を次の様に、中心差分を用いて近似する。

$$\{\ddot{y}\} = \frac{\{y\}^{n+1} - 2\{y\}^n + \{y\}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad \dots (13)$$

これを式(11)に代入して、

$$[M] \frac{\{y\}^{n+1} - 2\{y\}^n + \{y\}^{n-1}}{(\Delta t)^2} + [K]\{y\}^n = \{P\} \quad \dots (14)$$

ここで $\{P\}$ は、両端だけに現れる項である。動的陽解法の形式に整理すると、

$$\begin{aligned} \{y\}^{n+1} &= 2\{y\}^n - \{y\}^{n-1} - \\ & [M]^{-1} (\Delta t)^2 \{ [K]\{y\}^n - \{P\} \} \quad \dots (15) \end{aligned}$$

が得られる。質量行列 $[M]^{-1}$ を、対角項に集中させる近似操作により、連立方程式を解かなくてもよい動的陽解法の計算スキームが得られる。

3. 計算結果

3.1 FEM モデル

図1に、計算に用いた FEM 要素分割モデルを示す。長さ L の領域を等間隔に N 等分して要素分割した。

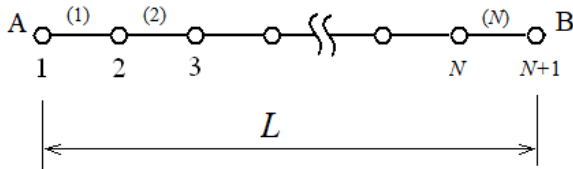


図1 有限要素モデル

図中のモデルの下側に節点番号を示す。 N 等分であるから、節点の数は $(N+1)$ 個である。また上側にカッコ内に要素番号を示す。またこのモデルの左端の境界を A 、右端の境界を B とする。

3.2 初期条件に三角波を与えた場合（定在波）

境界条件として、 $t=0$ の場合の y の値を

$$y = y(x, 0) \quad \dots (16)$$

とした初期条件を与える。ここでは、長さ $L=2\pi$ の弦に、三角形の初期変位を与えた場合の例を示す。初期三角形は、長さの midpoint ($x = L/2$) の部分が最大値 1 を取る二本の直線で表した。要素数 $N=50$ で等分割を行い、1つの要素内では積分点 2 点の数値積分を行った。図1の両端、点 A 、 B は固定条件であるから、式(15)の $\{P\}$ は 0 となる。

位相速度 $v=10$ とし、周期 $T = 2L/v$ から計算し、

$$T = \frac{2L}{v} = \frac{2 \times 2\pi}{10} = 0.4\pi \quad \dots (17)$$

とした。文献[2]の図9と対比するため、時刻 $t=0$ から $t = T/2 = 0.2\pi$ の間を 100 step に分けた増分計算を行った。

図2に計算結果を示す。はじめに与えた三角形が、(b)の段階では直線の形状を保ちながら下側に変位している。そして(c)の段階では、ほぼ一直線の状態(変位 0)となっている。その後下側に変位し、(d)、(e)の段階は、ほぼ(b)、(a)と対称の状態になっていることがわかる。

解析解は文献[2]の図9に示されている。その解はフーリエ級数展開によって求めたものであり、FEM 解は解析解と比較して、角の尖った部分が次第になまって、丸味を帯びてくるのが分かる。

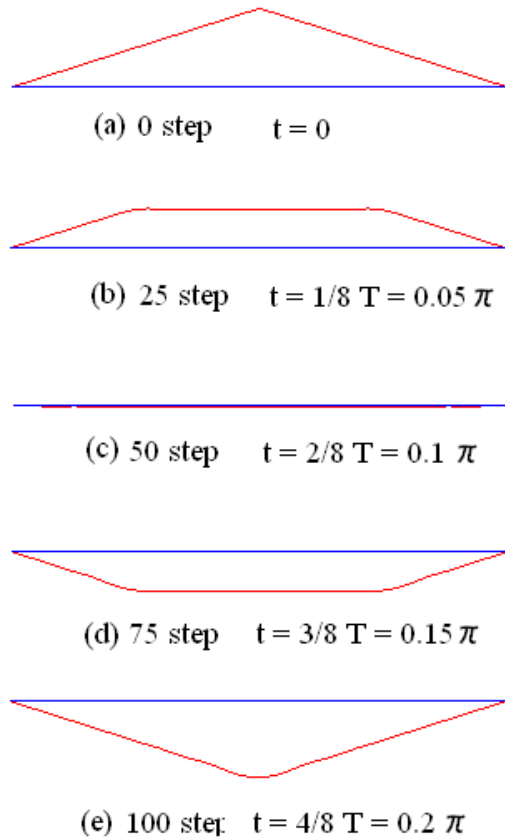


図2 初期変位で三角波を与えた場合

3.3 点 A に sin 波を与えた場合（進行波）

次に、境界条件として、 $x=0$ の場所の y の値を

$$y = y(0, t) \quad \dots (18)$$

とした初期条件を考える。すなわち図1の点 A に時間変化する変位を与える。ここでは、次の正弦波を入力する。

$$y = \sin \omega t \quad \dots (19)$$

ω は角振動数である。正弦波の場合、位相速度 v と波数 k との間には次の関係がある。

$$\omega = vk \quad \dots (20)$$

本報告では、 $v=10$ 、 $k=2$ とした。従って、

$$\omega = vk = 10 \times 2 = 20 \quad \dots (21)$$

となるから、周期 T は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20} = 0.1\pi \dots (22)$$

となる。時刻 $t=0$ から $t=T=0.1\pi$ の間を 50 step に分けた増分計算を行った。要素分割は、前節と同じく長さ $L=2\pi$ ，要素数 $N=50$ の等分割である。

(a) 点 B に出口境界条件を与えた場合

図 1 の点 B，すなわち $x=L$ に出口境界条件を与えた例を示す。式(15)における $\{P\}$ を 1 ステップ前の計算値を用いて，陽的に $\{P\}^{n-1}$ として与える。

$$\{y\}^{n+1} = 2\{y\}^n - \{y\}^{n-1} - [M]^{-1}(\Delta t)^2\{[K]\{y\}^n - \{P\}^{n-1}\} \dots (23)$$

具体的には，式(12)

$$v^2[\delta yy']_a^b \dots (12\text{-再})$$

は， $\delta yy'$ の $x=b$ の値から $x=a$ の値を引いたものである。

$$v^2\{\delta yy'(b) - \delta yy'(a)\} \dots (24)$$

ここでは，点 B に出口境界条件を与えるため，の $x=b$ のみ考える。

$$v^2\delta yy'(b) \dots (25)$$

点 B は節点番号 N であるから， y' を 1 ステップ前 ($n-1$ ステップ) の y の値から以下のように近似する。

$$P_N^{n-1} = v^2 y' = v^2 \frac{y_N^{n-1} - y_{N-1}^{n-1}}{\Delta x} \dots (26)$$

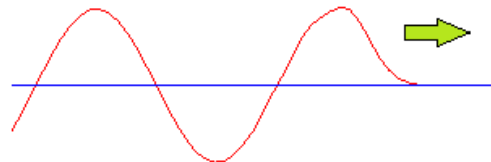
これを節点 N に加えることによって，流出部の出口境界条件を与える。

図 3 に計算結果を示す。左端が正弦曲線で振動し，それが右方向に進行する。(b) の段階を超えて正弦波は右端に到着し，その後，(c) の段階では右端の部分から流出して行くことが分かる。その後計算を続けると，正弦波が右方向に進行し，右端から流出し続けるという計算結果が得られた。

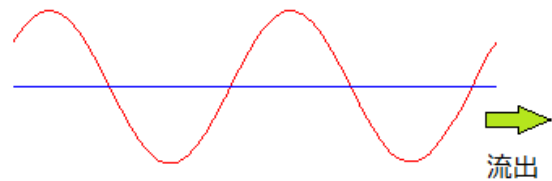
以上のことから，動的陽解法の計算手法において，進行波や，その流出境界条件をシミュレーションできるということが明らかになった。



(a) 20 step $t = 0.4 T = 0.04 \pi$



(b) 80 step $t = 1.6 T = 0.16 \pi$



(c) 120 step $t = 2.4 T = 0.24 \pi$

図 3 正弦波を A ($x=0$) に入力し，B ($x=L$) で出口境界条件を与えた計算例

(b) 点 A に固定，点 B に自由境界条件を与えた場合

次に進行波の反射条件を取り扱う。まず前節の方法により点 A から正弦波を入力させる。そして点 B には自由境界条件を与える。次に計算をしばらく実行し，半波長だけ波が生成した段階で，点 A より正弦波の生成を中止する。そして点 A は固定境界条件に変更する。

点 A, B は固定条件または自由境界条件であるから，式(15)の $\{P\}$ は 0 とする。

図 4 に計算結果を示す。(a) の段階では左端の境界に正弦波を発生させている。そして 1 つの山(半波長)が生成された段階で，正弦波の発生を中止したため (b) の段階では 1 つの山が右方向に進行してゆく。

右端の境界で振幅が約 2 倍になって自由端反射をし，山は左方向に進行を変える。(d) の段階で左端に戻り，(e) で山が谷に変化して固定端反射する。その後 (f) の状態で右方向に進行する。以上のように反射を繰り返し，領域 $0 \sim L$ の間を往復し続ける計算結果が得られた。

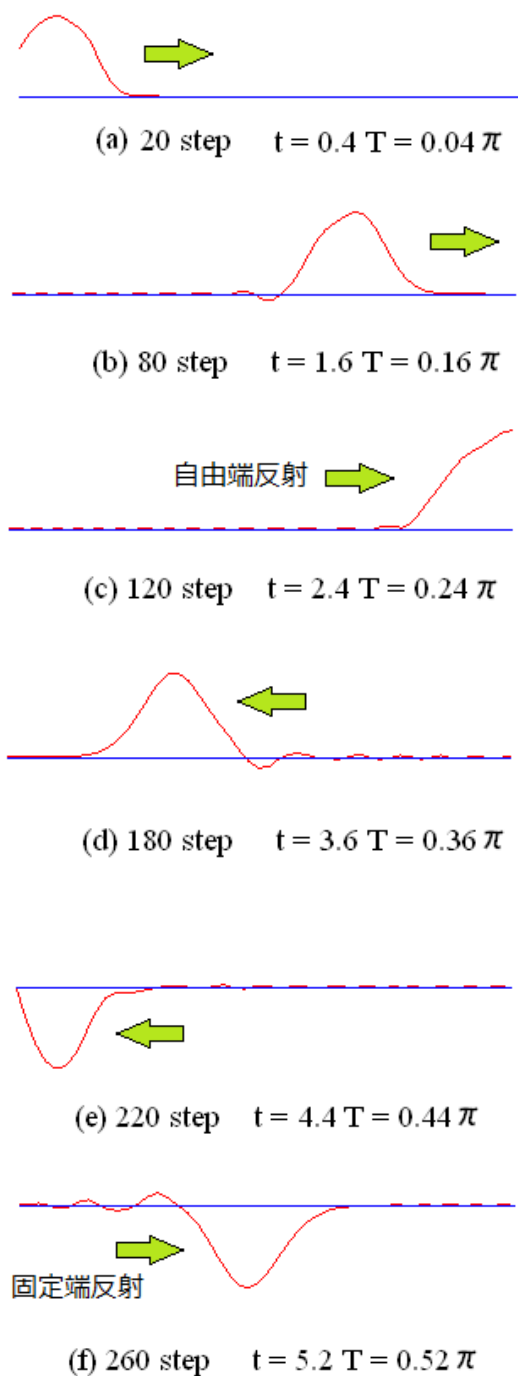


図4 A ($x=0$) で固定端, B ($x=L$) で自由端境界条件を与えた計算例

5. 結言

波動方程式を動的陽解法 FEM により, 1次元問題の解析を行った.

まず定常波の解析として初期条件に三角形の形状を与えた場合の変位の変化を計算した. 計算結果は, フーリエ級数による解析解と比較して, よい一致をみることができた.

次に, 正弦波を $x=0$ の部分に与える境界条件で進行波の進行の様子を解析した. 弱形式の項から流出条件を与えることができ, 波が左端の境界から流出する計算結果を得た. また端面を固定, 自由にする境界条件を与え, 固定端反射, 自由端反射により位相の変化を表現することもできた.

以上のように, 動的陽解法 FEM によって, 波動方程式の基本的な部分は解析可能であることがあきらかとなった.

今後は弾性問題などに応用し, 弾性波の反射を含めてつり合い状態への移行のシミュレーションなどを考えたい.

参考文献

- [1] 沖田淳也, 真鍋圭司, 上田完次: 動的陽解法弾塑性 FEM による三次元切削過程のシミュレーション, 精密工学会誌, Vol.66, No.3, (2000-3), pp.429-433
- [2] 真鍋圭司: 動的陽解法有限要素法による柱の揺れ解析, 福山大学工学部紀要, 第 38 巻(2015-2), pp.163-168.
- [3] 真鍋圭司, 安原周平: 骨組構造の動的陽解法 FEM 解析, 福山大学工学部紀要, 第 39 巻(2016-2), pp.137-142.
- [4] 高木周: 演算子の固有値問題とフーリエ級数展開 Part 2, 機械屋の数学, 第 5 回, 日本機械学会誌, 第 121 巻, 第 1195 (2018-6), p.36.

