

はりのたわみ曲線のルンゲ-クッタ法による簡易解法

真鍋 圭司*

Simple Analysis Using Runge-Kutta Method for Beam Deflection Curve

Keiji MANABE*

ABSTRACT

Beam deflection is analysed by Runge-Kutta Method by using Personal Computer. Differential equation for the deflection of beam is solved by simple explicit scheme. The deflection curve of cantilever beam under concentrated load is easily obtained by using Excel. It is found that Runge-Kutta solution is the same as the exact solution. The buckling problem can be also analysed by this method by using try and error, and buckling load is estimated. The Runge-Kutta method is also effective for buckling problems to obtain high precision solution.

キーワード：材料力学，はりのたわみ，ルンゲ-クッタ法，座屈

Keywords: Strength of Materials, Beam Deflection, Runge-Kutta Method, Buckling

1. 緒言

2020年度（令和2年度）は，新型コロナウイルスの流行により，大学も大きな影響を受けた。例えば遠隔授業など，来校しなくても学習できる方法の開発が急務の課題となった。卒業研究もその一つであり，自宅でも研究を続けられることが望ましい。

本学では，学生が個人のパーソナルコンピューターを持参し，さまざまな科目でBYOD (Bring Your Own Device)の授業が展開されている。そこで卒業研究においても，BYODを活用して手軽に解析計算を行うことを考えた。

本学で提供されるExcelを利用すると，簡単な微分方程式なら十分に解析できる。材料力学におけるはりのたわみの計算や座屈荷重の計算は，簡易的な計算が可能であることを，前報[1]で示した。

すなわち，はりのたわみの基礎式は二階の微分方程式の問題であるため，微分方程式の差分近似や，その解法などはパーソナルコンピューターで扱うことが

できる。

本報告では，それをさらに発展させ，精度の向上のためにルンゲ-クッタ法の導入を行った。前報[1]で報告した片持ちばりのたわみの問題，座屈問題の座屈荷重やたわみ曲線を求める手法に，ルンゲ-クッタ法を導入して，精度が改善されるかを検討した。

2. はりの曲げ問題の差分近似

2.1 二階の微分方程式の数値解法

はりのたわみ y が満たす基礎式は，次の形の二階微分方程式で与えられる。

$$y'' = Q \quad \dots (1)$$

前報[1]で用いた解法は，以下のとおりである。まず式(1)の左辺を中心差分で近似する。

$$y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad \dots (2)$$

* 機械システム工学科

そして、この式を変形し、陽的に解を求める。

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + y''_i h^2 \quad \dots (3)$$

次に、この式に式(1)を代入する。

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + Q_i h^2 \quad \dots (4)$$

これが前報[1]で使用したスキームである。

2.2 ルンゲ-クッタ法の概要

最初にルンゲ-クッタ法の概要についてまとめておく[2]。次の一階微分方程式を考える。

$$y' = f(x, y) \quad \dots (5)$$

x 座標 x_A から h だけ離れた x 座標を x_B とする。すなわち、

$$x_B = x_A + h \quad \dots (6)$$

そして、点 (x_A, y_A) から開始し、点 (x_B, y_{BB}) を求めることを考える。

x 座標 x_A と x_B の中点を x_M とする。すなわち、

$$x_M = x_A + \frac{h}{2} \quad \dots (7)$$

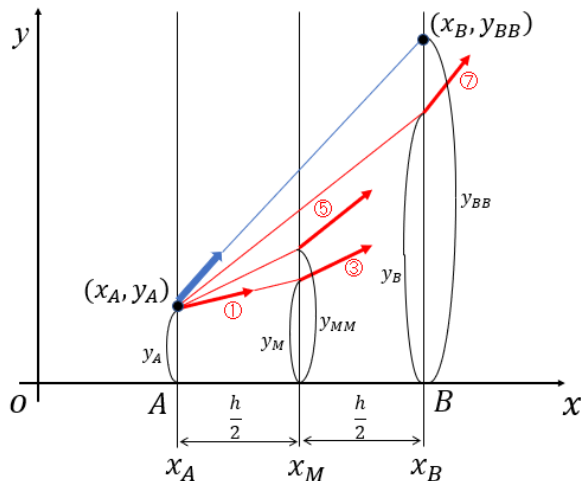


図1 ルンゲ-クッタ法の概要

ルンゲ-クッタ法は、図1に示すように、次の①から⑧の順番で計算する。

$$\textcircled{1} \quad y'_A = f'(x_A, y_A) \quad \dots (8)$$

$$\textcircled{2} \quad y_M = y_A + y'_A \frac{h}{2} \quad \dots (9)$$

$$\textcircled{3} \quad y'_M = f(x_M, y_M) \quad \dots (10)$$

$$\textcircled{4} \quad y_{MM} = y_A + y'_M \frac{h}{2} \quad \dots (11)$$

$$\textcircled{5} \quad y'_{MM} = f(x_M, y_{MM}) \quad \dots (12)$$

$$\textcircled{6} \quad y_B = y_A + y'_{MM} h \quad \dots (13)$$

$$\textcircled{7} \quad y'_B = f(x_B, y_B) \quad \dots (14)$$

$$\textcircled{8} \quad y_{BB} = y_A +$$

$$(y'_A + 2y'_M + 2y'_{MM} + y'_B) \frac{h}{6} \quad \dots (15)$$

この方法は4次の公式といわれる。

2.3 ルンゲ-クッタ法によるたわみの解析

はりのたわみの微分方程式は、

$$y'' = Q \quad \dots (1\text{-再})$$

であり、二階の微分方程式である。ルンゲ-クッタ法は一階の微分方程式の解法であるから、これを次の二つに分解する。

$$\left. \begin{array}{l} y' = v \\ v' = Q \end{array} \right\} \quad \dots (16)$$

これらを次のように前進差分近似する。

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = v_i \quad \dots (17)$$

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{h} = Q_i \quad \dots (18)$$

ところでこの右辺を Q_{i+1} としたものを、すなわち、

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{h} = Q_{i+1} \quad \dots (19)$$

これが、前報[1]で用いた式(4)のスキームと一致することは、式(17)を式(18)に代入するとわかる。

はりのたわみを求める問題においては、式(1)の Q は次で与える。

$$Q = -\frac{M}{EI} \cdots (20)$$

M は曲げモーメント、 E はヤング率、 I は断面二次モーメントである。

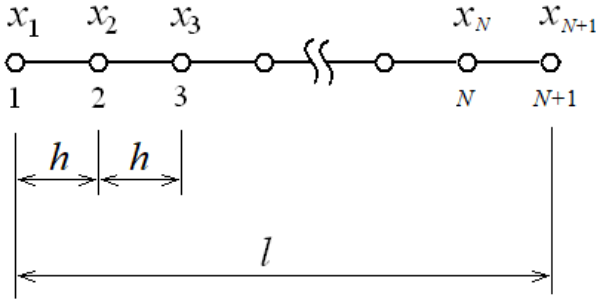


図2 はりの差分格子[1]

図2に長さ l のはりを等間隔に N 等分して作成した差分格子を示す。 N 等分であるから、格子点の数は $(N+1)$ 個である。また格子間隔 h は l/N である。格子点 i の x 座標を x_i とする。そしてその点のたわみを y_i とする。

2. 3 計算対象のはりの寸法と材料特性

今回の計算に用いるはりは、前報[1]と同じものとする。すなわち長さ $l=100\text{mm}$ 、断面は長方形とし、幅 12mm 、高さ 1mm である。この場合、断面二次モーメント $I = 1\text{mm}^4$ となる。またヤング率 $E = 20$ 万 MPa とした。

本報告では、はりの軸線に対して直角に荷重が働く、片持ちばり、荷重が軸方向に働く座屈問題を計算対象とする。なお荷重は集中荷重とする。

本報告では以下の (A), (B), (C) の3通りについて計算を行い比較検討する。

(A) $Q(i+1)$ 法

これは、式(17)と式(19)

$$\frac{v_{i+1}-v_i}{h} = Q_{i+1} \cdots (19\text{-再})$$

を用いるものである。この二つを1つの式にしたものが、前報[1]で用いた式(4)

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + Q_i h^2 \cdots (4\text{-再})$$

であり、両者の計算結果は一致する。つまり $Q(i+1)$ 法は前報の方法である。

(B) $Q(i)$ 法

これは、式(17)と式(18)

$$\frac{v_{i+1}-v_i}{h} = Q_i \cdots (18\text{-再})$$

を用いるものである。

(C) ルンゲ-クッタ法

これは前述の (B) の $Q(i)$ 法を用い、 y と v の二変数で式(8)~(15) (①~⑧) の8段階の処理を行うものである。

3. 片持ちばりのたわみ解析

この解法においては、はりに加わる曲げモーメント M が既知であることが前提となる。したがって解くべき問題の BMD (Bending Moment Diagram: 曲げモーメント図) を描いておくことが重要である。

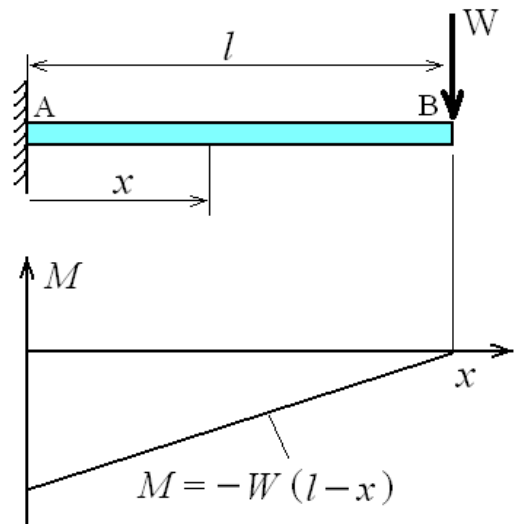


図3 片持ちばりの概要と BMD[1]

図3に、片持ちばりの概要と、その BMD を示す。ここでは、横荷重 $W = 30\text{N}$ とする。

$$M = -W(l-x) = -30(l-x) \cdots (21)$$

ルンゲ-クッタ法を用いる場合は、格子点 i の曲げモーメント M_i は、図1に示すように、

x は、 x_M 、 x_{MM} 、 x_B などとする。

境界条件は、左端で固定である。すなわち、左端の A 点で $y=0$ 、 $y'=v=0$ である。すなわち、格子点 $i=1$ において、

$$y_1 = 0 \quad \dots (22)$$

$$v_1 = 0 \quad \dots (23)$$

となる。

この問題のたわみの理論解は次式である。

$$y = -\frac{P}{6EI}(x-l)^3 + \frac{Pl^2}{2EI}x - \frac{Pl^3}{6EI} \quad \dots (24)$$

自由端 $x=l$ におけるたわみの理論解は、

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI} = 50 \text{ mm} \quad \dots (25)$$

である。

計算では、はりを 10 等分 ($N=10$) したもの、および 50 等分 ($N=50$) したものの二通りで計算した。

(A) $Q(i+1)$ 法

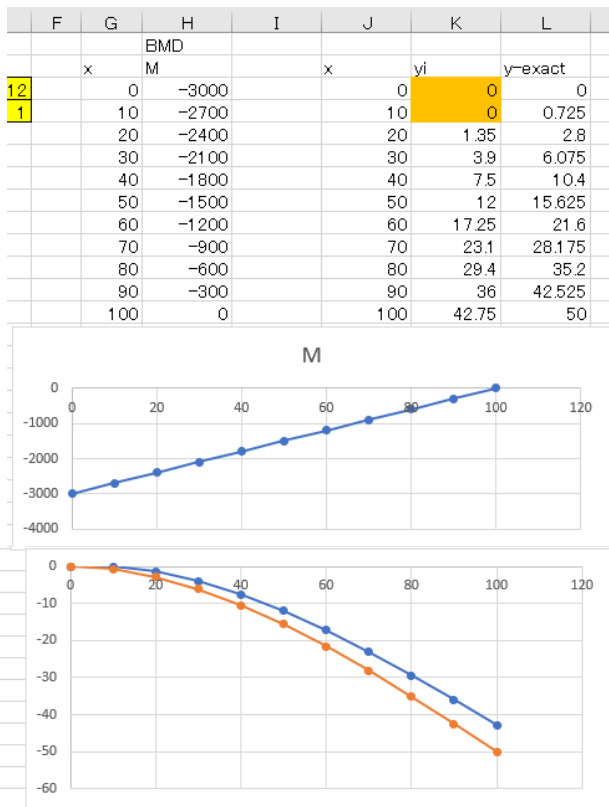


図 4 $Q(i+1)$ 法によるのたわみ曲線の計算結果 ($N=10$)

図 4 に、10 等分した場合の Excel の計算結果の画面を示す。上側のグラフは BMD である。それを差分式(4)に用いて計算する。計算したたわみの差分解を、式(24)の理論解を重ねて下のグラフに示す。

たわみ形状は、はりの自由端に行くほど理論解から

離れている。自由端 $x=l$ におけるたわみは 42.75 mm となっており、理論解よりたわみが小さく計算されている。

50 等分 ($N=50$) の場合は、前報[1]で示したように、数値解は 48.51 mm である。

表 1 $Q(i+1)$ 法の数値解と解析解の比較 (単位 mm)

N	数値解	解析解	誤差 (%)
10	42.75	50.0	-14.5
50	48.51	50.0	-2.98

表 1 に最大たわみの計算結果を示す。表の誤差は次式で計算した。

$$(\text{数値解} - \text{理論解}) / \text{理論解} \times 100 \quad \dots (26)$$

誤差の値は負となっていることから、数値解は解析解より剛く曲がりにくい解となっていることがわかる。

(B) $Q(i)$ 法

$Q(i)$ 法の計算結果を表 2 に示す。 $Q(i+1)$ の場合より精度がよいことがわかる。

表 2 $Q(i)$ 法の数値解と解析解の比較 (単位 mm)

N	数値解	解析解	誤差 (%)
10	49.50	50.0	-1.0
50	49.98	50.0	-0.04

(C) ルンゲ-クッタ法

ルンゲクッタ法による解を図 5 に示す。10 等分 ($N=10$) の粗い分割でも、数値解は理論解とぴったりと一致していることがわかる。

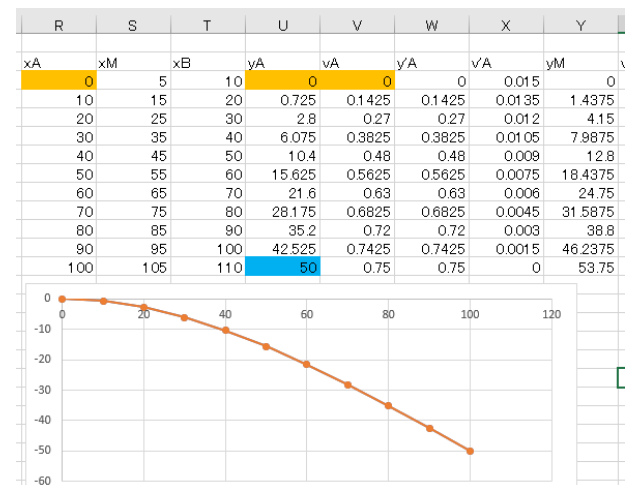


図 5 ルンゲ-クッタ法による計算結果 ($N=10$)

表3 ルンゲ-クッタ法と解析解の比較 (単位 mm)

N	数値解	解析解	誤差 (%)
10	50.0	50.0	0
50	50.0	50.0	0

表3に計算結果を示すが、誤差は0である。

4. 座屈問題

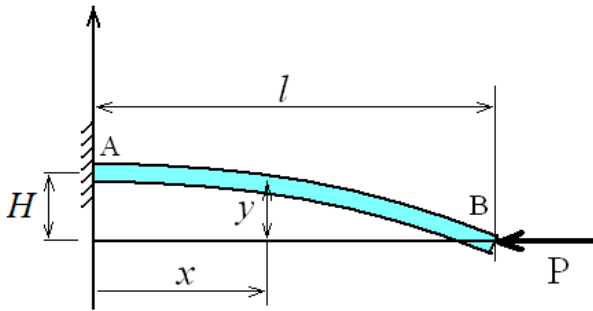


図6 座屈問題[1]のモデル

次に図6のように、荷重Pが軸方向にかかる場合を考える。このたわみを求める問題は、座屈問題である。ここでは図6に示すように、固定端Aのy座標をHとして与える。このとき、左端の点Aの境界条件 $y' = v = 0$ は次式となる。

$$y_1 = H \quad \dots (26)$$

$$v_1 = 0 \quad \dots (27)$$

曲げモーメントは(xではなく)yの関数となり、次式で与えられる。

$$M_i = P y_i \quad \dots (28)$$

次に自由端B, すなわち格子点(N+1)の境界条件を考える。そこでは曲げモーメント $M = 0$ であるから、

式(28)より

$$y_{N+1} = 0 \quad \dots (29)$$

にならないといけない。

荷重Pを試行錯誤で与え、計算結果が $y_{N+1} = 0$ となる荷重を探し出す[1]。このようにして求めた荷重が座屈荷重である。

ここで注意すべきは、 $H = 0$ とすると、たわみがすべてゼロの解が求まってしまう。ここでは $H = 10 \text{ mm}$ と与えた。このHの値は、他の値でも座屈荷重には

影響はないことが計算によって確認できる。

座屈荷重の理論解は、

$$P = (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2} EI \quad \dots (30)$$

である。n = 0, 1, 2, 3 に対して理論解は $P = 49.348, 444.13, 1233.7, 2418.1 \text{ N}$ となる。

座屈問題は変形曲線が複雑なため、細かい50等分のみの計算例を示す。従って $N = 50$ であり、格子間隔 h は 2 mm である。

(A) Q(i+1) 法

これは前報の結果と同じである。座屈荷重は小さいものから4つ示すと、 $P = 50.347, 452.80, 1256.11, 2457.0 \text{ N}$ である。

表4に、座屈荷重の数値解と解析解の比較を示す。

表4 Q(i+1) 法の数値解と解析解の比較 [1]

n	数値解 (N)	解析解 (N)	誤差 (%)
0	50.347	49.348	2.02
1	452.80	444.13	1.95
2	1256.11	1233.7	1.81
3	2457.0	2418.1	1.61

(B) Q(i) 法

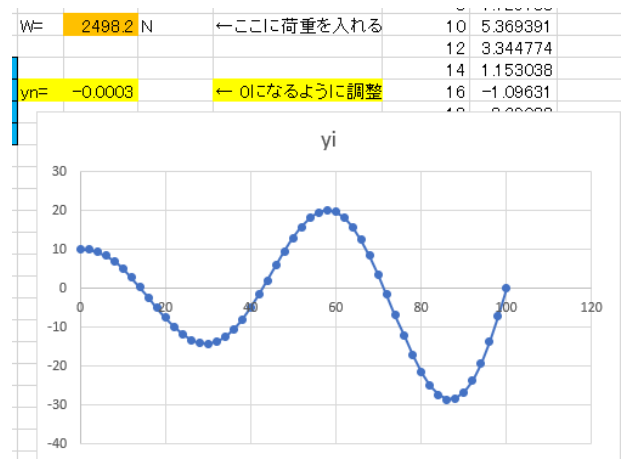


図7 Q(i) 法によるたわみ曲線の計算結果 (n=4)

図7にQ(i)法による計算において、4番目モードの計算結果を示す。座屈荷重は2498.2 Nである。しかしたわみ曲線は振幅が上下対称でなく、解としておかしいことがわかる。従ってQ(i)法には、座屈解析には不向きであることがわかる。

(C) ルンゲ-クッタ法

座屈荷重は小さいものから4つ示すと、 $P=49.352, 444.46, 1236.22, 2427.6$ N が得られた。その各々のたわみ曲線を図8に示す。

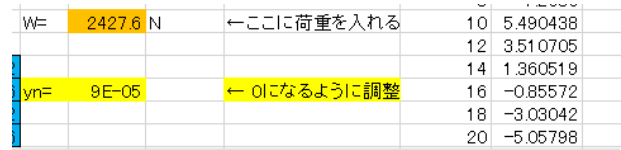
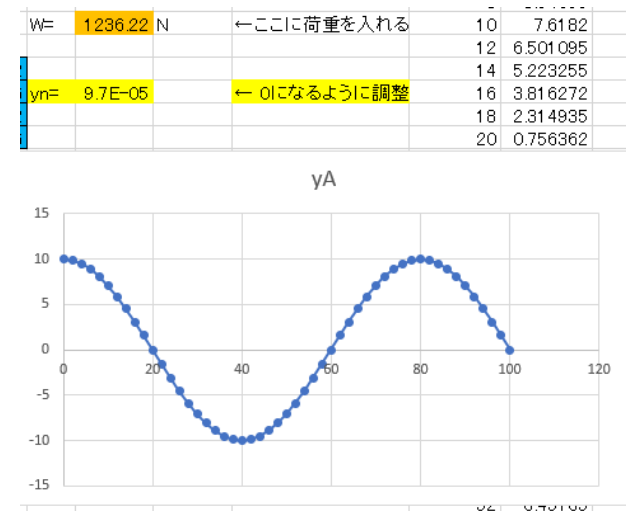
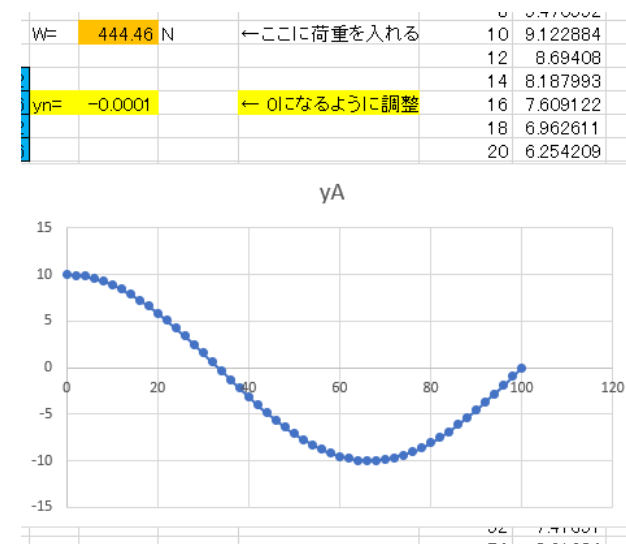
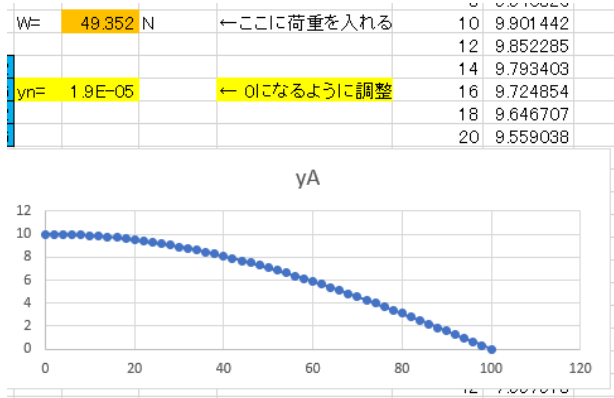


図8 ルンゲ-クッタ法によるたわみ曲線の計算結果

図はコサイン (余弦) カーブに近い曲線であり、座屈によるたわみを表現できている。

表5に、ルンゲ-クッタ法による座屈荷重の数値解と解析解の比較を示す。

表5 ルンゲ-クッタ法の数値解と解析解の比較

n	数値解 (N)	解析解 (N)	誤差 (%)
0	49.352	49.348	0.008
1	444.46	444.13	0.074
2	1236.22	1233.7	0.204
3	2427.6	2418.1	0.392

表に示すように誤差は0.5%以下となっている。これは前報の $Q(i+1)$ 法(表4)と比べると、非常に精度が良いことがわかる。

5. 結言

本報告の結果をまとめると以下のようなになる。

1) 片持ちばりのたわみ曲線について

これは Q が x の関数の場合である。

$Q(i)$ 法は、 $Q(i+1)$ 法より精度がよい。またルンゲ-クッタ法は最も精度がよく、粗い10分割においても理論解と一致した解が得られる。

2) 座屈問題について

これは Q が y の関数の場合である。

$Q(i)$ 法では、たわみ曲線がおかしい結果となった。

ルンゲ-クッタ法は、 $Q(i+1)$ 法より精度がよい。

以上のように、ルンゲクッタ法は今回行った計算では最も精度が優れている。しかし表計算の項目が多くなって複雑になる。簡易的な計算という観点では $Q(i+1)$ 法（前報[1]の方法）の方が便利である。精度という観点では、ルンゲ-クッタ法が最も良い。

参考文献

- [1] 真鍋圭司: はりのたわみ曲線の差分法による簡易解法, 福山大学工学部紀要, 第 43 卷(2020-3), pp.149-154.
- [2] 例えば, 戸川隼人: 微分方程式の数値計算—有限要素法と差分法—, オーム社(1973), p.41.
- [3] 例えば, 伊藤勝悦: 基礎から学べる材料力学, 森北出版, (2011)

