College Analysis における「２変量関数表示ユーティリティ」の構造と機能

石丸敬二，福井正康[†]

概要

教育分野での利用を目的に社会システム分析に用いられる様々な手法を統合化したプログラム College Analysis Ver.4.0[*] に、関数形を３次元座標上に表示するユーティリティを追加した。College Analysis において、３次元表示の問題に本格的に取り組んだのは、この「２変量関数表示ユーティリティ」が最初である。

キーワード

College Analysis, 社会システム分析, ３次元グラフ

[†] 福山平成大学経営学部経営学科

[*] © 福井正康, http://www.heisei-u.ac.jp/ba/fukui/analysis.html

1. はじめに

経済学や経営学で扱う現象は、1つの変数の枠内に収まらないものが多い。クルマの購入を考える際の基準としても、価格・スタイル・馬力・維持費・希少性・メーカーの信用度 ... と、数値化が難しいものも含めて、いくつもの項目を挙げることができる。

そこで、複数の変数を対象にした関数の分析が必要となってくるわけであるが、今回は基本として2変量関数について取り組むこととした。

College Analysis において、3次元表示の問題に本格的に取り組んだのはこの「2変量関数表示ユーティリティ」が最初である。これは $z=f(x,y)$ の形の式を与えて、関数形を3次元座標上に表示するユーティリティである。この形の関数は経済学などでも多用されているが、1変量の場合に比べて、形状をイメージすることが難しい。そこで、学生にとって2変量関数を視覚的に把握しやすいものとするために、今回の機能追加を図ることとした。

2. プログラムの概要

我々は、2変量関数を表示するに当たり、まず以下の条件を考えた。

1．形状をどの角度、どの距離からでもマウスを使って手軽に見られること
2．関数の形状はただ単純に表現できるだけではなく、美しく表示することも可能であること
3．関数はアナグリフ表示を用いて、赤青メガネで立体視可能なこと
4．3次元表示用のビューアを作成し、それに形状のデータを与えることによって3次元描画を実現すること

特に3番目の条件は製作者のこだわりで、これらの条件の中で真っ先に決めたものである。また、4番目の条件によって他のプログラムでもビューア

は利用可能となり、幅広い分野での３次元表示が可能となる。

ビューアに渡すデータの構造は、後に複数の対象を同時に描画する必要が生じて拡張を行ったが、２変量関数表示などに関しては以下のように定めた。

1．1つの描画要素を多角形の集合体（点の場合と線分の場合も含む）とする

2．1行に1つの描画要素のデータ構造を記述し、その形式は以下の通りとする

多角形の頂点数，色整数，頂点 1-x 座標，頂点 1-y 座標，頂点 1-z 座標，
頂点 2-x 座標，頂点 2-y 座標，頂点 2-z 座標，・・・

特に２変量関数の表示の場合には、x 軸と y 軸を指定数だけ分割するため、１つの描画要素は４角形となる。また色整数は RGB それぞれ 0-255 の値を、B 値＋ 256×G 値＋ 256^2×R 値としたものである。ビューアでの描画方法の詳細についてはここでは述べない。

プログラムの実行画面を図 2.1 に示す。

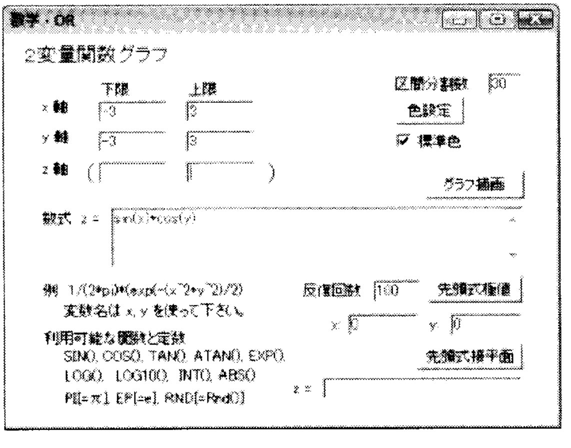


図 2.1　プログラムの実行画面

まず関数を数式の欄に入力し、x 軸と y 軸の描画範囲の上限と下限を入力し、「グラフ描画」ボタンをクリックして描画を実行する。数式での x 座標と y 座標の表現は単純に「x」と「y」である。また数式では通常の四則演算とべき乗に加え、sin(), cos(), tan(), atan(), exp(), log(), log10(), int(), abs() の関数が利用可能である。また、定数としては pi（=π）, ep（= e）、乱数として 0<=rnd<1 の一様乱数が利用可能である。描画範囲について、z 軸は自動で設定できるが、自分で入力することもできる。

描画結果はデフォルトで図 2.2 のように表示される。

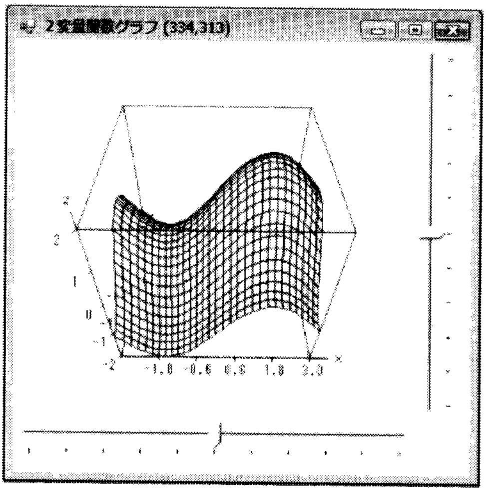


図 2. 2　デフォルトの描画結果

メッシュの細かさは、メニューの「区間分割数」で指定できる。適正値としては、30 ～ 100 である。画面の大きさは自由に変更可能で、画面を大きくしても画像が粗くなることはない。

描画のピクチャーボックス上でマウスをドラッグすることにより、図 2.3a, 図 2.3b のように図形を回転させることができる。以後図形の描写はピクチャー

ボックスだけにする。

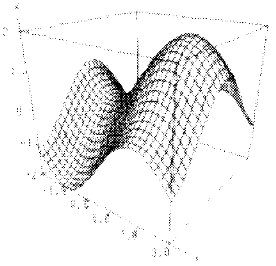


図 2. 3a　図形の回転 1

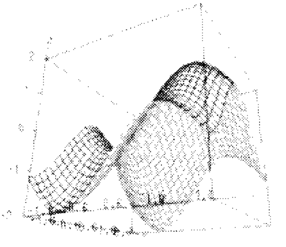


図 2. 3b　図形の回転 2

図形はどの角度から見ることもでき、面の上側に比べ下側は、濃い色に設定されている。面の色は、指定色設定で自由に変更可能である。また、マウスのホイールボタンで図 2.4a, 図 2.4b のように、図形までの距離を調整することができる。

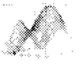


図 2. 4a　遠ざけた場合

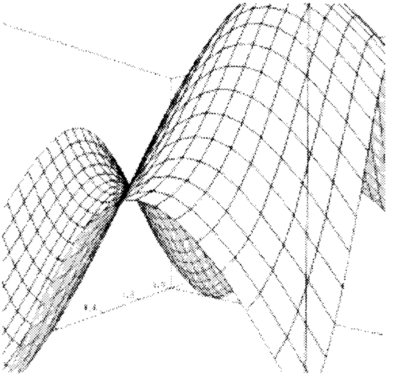


図 2. 4b　近づけた場合

極端な場合、近付けて図形の内部に入ることもできる。図 2.2 の下と右のスライダーによって、図の表示位置を上下、左右方向に変更することができる。

図 2.2 のメニュー「表示」(親フォームに表示されるので図の中にはない)

の変更によって、図 2.5a や図 2.5b のように表示をワイヤーフレームだけにしたり、ワイヤーフレームを取り除いたりすることができる。

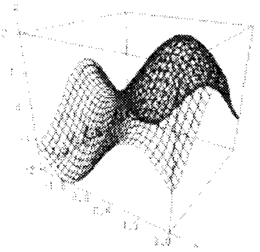


図 2. 5a　ワイヤーフレーム表示

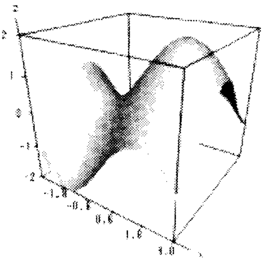


図 2. 5b　ワイヤーフレーム除去

ワイヤーフレームを除去した場合、面上に視点方向を光源とする濃淡が入る。その他、図 2.6a, 図 2.6b のように z 値による虹色表示も可能である。また図 2.6b のように背景を黒くして図を際立たせることも可能である。

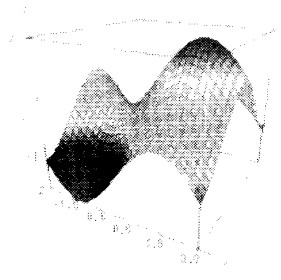


図 2. 6a　虹色表示 1

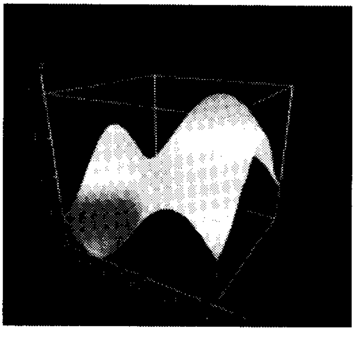


図 2. 6b　虹色表示 2

さらに、図 2.7a, 図 2.7b のように 2 種類のアナグリフでの表示も可能である。図 2.7a はモノクロ、図 2.7b はカラーである。赤青メガネで見ると画面から飛び出して空中に浮かんでいるように見えるが、印刷の関係でこの図では不可能である。

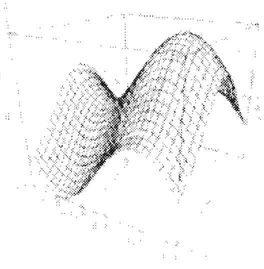


図 2.7a　モノクロアナグリフ

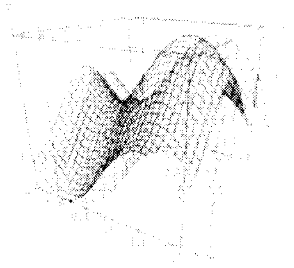


図 2.7b　カラーアナグリフ

他にもビューアにはメニューがあるが、「表示」、「色」、「アクション」のメニューを一通り実行してみるといろいろな機能がよく分かる。

グラフは複数枚表示可能である。図 2.1 の関数式の入力で 2 行目に別の式を入力すると、2 枚のグラフが表示される。但し、描画の z 軸の範囲は 2 枚のグラフの最大値と最小値から計算される。例えば 2 行目で 0（z = 0）と指定した場合、図 2.8 のように表示される。

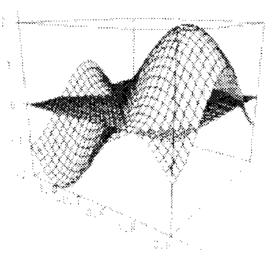
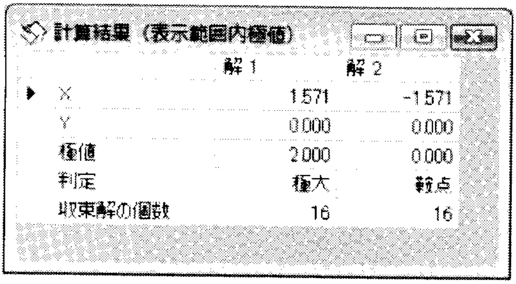


図 2.8　2 枚同時のグラフ表示

もちろん、2 枚の色を変えて表示することもできる。

また、図 2.1 のメニューには「先頭式極値」ボタンがある。これは 1 行目のグラフの表示範囲内にある極小、極大、変曲点の座標を図 2.9 のように与えるものである。



	解 1	解 2
X	1.571	-1.571
Y	0.000	0.000
極値	2.000	0.000
判定	極大	鞍点
収束解の個数	16	16

図 2. 9　極値の表示

この計算には、Newton-Raphson 法を用い、パラメータ（解）の初期値は指定範囲内の乱数で与える。計算回数は「反復回数」テキストボックスで与えられる回数分繰り返し、指定範囲内に収束した解だけを表示している。具体的な計算法は、上の関数の場合、定数 h に例えば 0.001 のような小さな数を入れた以下のような連立方程式（この場合は単純であるが）を考え、Newton-Raphson 法を適用する。

$$\frac{\partial z}{\partial z} \cong \frac{sin\left(x+\frac{h}{2}\right) - sin\,(x-\frac{h}{2})}{h} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cong \frac{cos\left(y+\frac{h}{2}\right) - cos\,(x-\frac{h}{2})}{h} = 0$$

これには範囲内に２つの解があり、それぞれ 16 回ずつその値に収束している。収束が悪い場合は繰り返し回数を増やしてみる必要がある。

図 2.1 のメニュー画面で「x:」,「y:」テキストボックスに座標の値を入れ、「先頭式接平面」ボタンをクリックすると、下のテキストボックスに指定した座

標を接点とする接平面の式が表示される。これをコピーして関数式に追加し、接平面を表示させることも可能である。

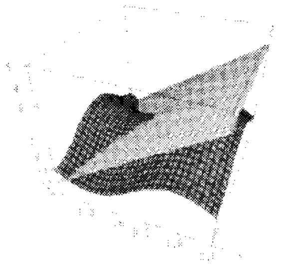


図 2. 10a　*z=sin x+cos y* と接平面

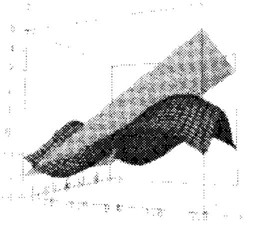


図 2. 10b　*z=sin x+cos y* と接平面

関数には定義されない領域が存在する可能性があるが、この部分について面は描画されない。そのため例えば $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ のような関数の場合、50分割でも図 2.11a, 図 2.11b のような表示になり、切り口のところはあまり美しくない。

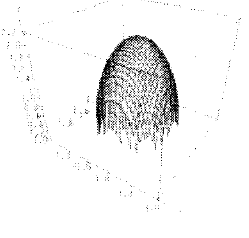


図 2. 11a　定義されない領域がある場合（上方向から見た図）

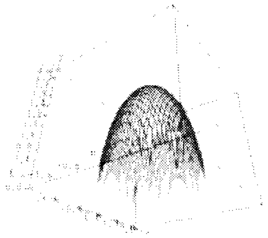


図 2. 11b　定義されない領域がある場合（下方向から見た図）

3. さまざまな関数の表示について

２つの変数 x,y の関数 $z=f(x,y)$ を考えるとき、この関数のグラフは、3 次元 xyz 空間内の曲面として描かれる。

以下、さまざまな関数をグラフ表示した例、およびそれぞれの極値を挙げる。

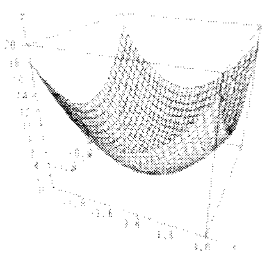


図 3. 1a　$z=x^2+y^2$

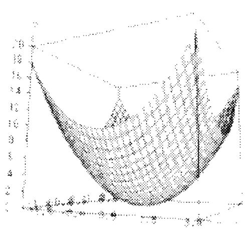


図 3. 1b　$z=x^2+y^2$

表 3. 1　$z=x^2+y^2$ **の表示範囲内における極値**

	解
x	0
y	0

極値	0
判定	極小
収束解の個数	23

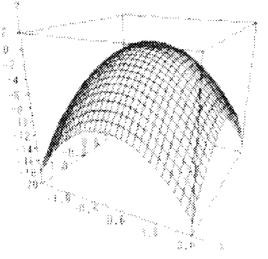


図 3. 2a　$z=-x^2-y^2$

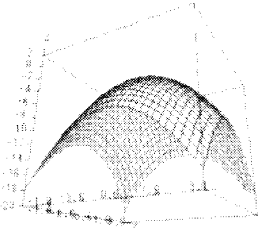


図 3. 2b　$z=-x^2-y^2$

表 3. 2　$z=-x^2-y^2$ の表示範囲内における極値

	解
x	0
y	0
極値	0
判定	極大
収束解の個数	20

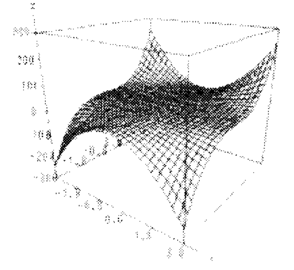


図 3. 3a　$z=x^2y^3$

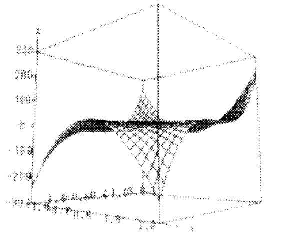


図 3. 3b　$z=x^2y^3$

表 3. 3　$z=x^2y^3$ の表示範囲内における極値

	解
x	0
y	0
極値	0
判定	他停留点
収束解の個数	100

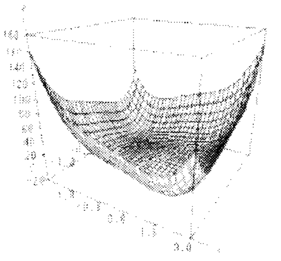


図 3. 4a　$z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

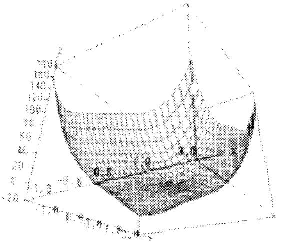


図 3. 4b　$z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

表 3. 4　$z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ の表示範囲内における極値

	解 1	解 2	解 3	解 4
x	1.4142	0	-1.4142	0
y	-1.4142	-0.0001	1.4142	0
極値	8	0	8	0
判定	極小	他停留点	極小	他停留点
収束解の個数	32	14	27	14

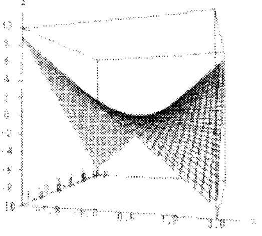


図 3. 5a　$z=xy$

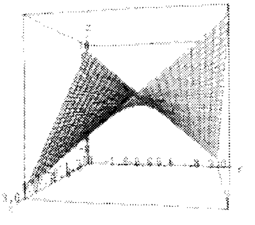


図 3. 5b　$z=xy$

表 3. 5　$z=xy$ の表示範囲内における極値

	解
x	0
y	0
極値	0
判定	鞍点
収束解の個数	14

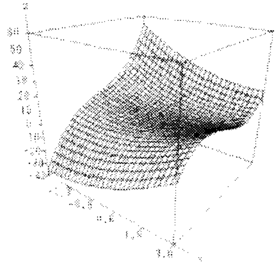


図 3. 6a　$z=x^2-2xy+y^3$

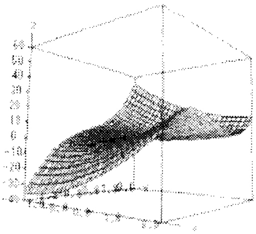


図 3. 6b　$z=x^2-2xy+y^3$

表 3. 6　$z=x^2-2xy+y^3$ の表示範囲内における極値

	解 1	解 2
x	0.6667	0
y	0.6667	0
極値	-0.1481	0
判定	極小	鞍点
収束解の個数	44	55

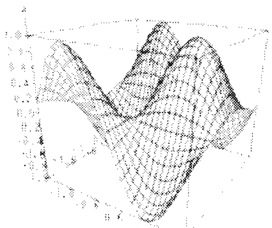


図 3. 7a　$z=\sin x \cos y$

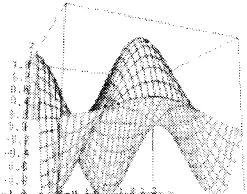


図 3. 7b　$z=\sin x \cos y$

表 3. 7　*z=sin x cos y* の表示範囲内における極値

	解 1	解 2	解 3	解 4
x	1.5708	0	0	-1.5708
y	0	1.5708	-1.5708	0
極値	1	0	0	-1
判定	極大	鞍点	鞍点	極小
収束解の個数	5	11	7	6

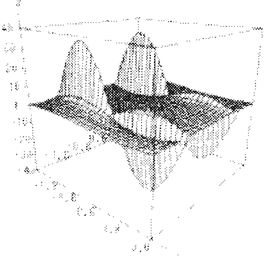


図 3. 8a　*z=sin x / cos y*

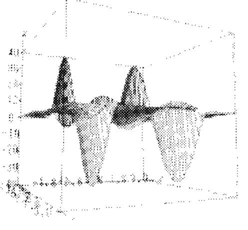


図 3. 8b　*z=sin x / cos y*

表 3. 8　*z=sin x / cos y* の表示範囲内における極値

	解 1	解 2
x	1.5708	-1.5708
y	0	0
極値	1	-1
判定	鞍点	鞍点
収束解の個数	22	22

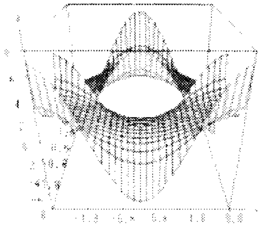


図 3. 9a　$z=\cos x / \sin y$

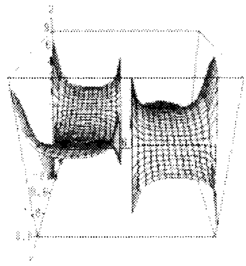


図 3. 9b　$z=\cos x / \sin y$

表 3. 9　$z=\cos x / \sin y$ の表示範囲内における極値

	解 1	解 2
x	0	0
y	1.5708	-1.5708
極値	1	-1
判定	鞍点	鞍点
収束解の個数	23	25

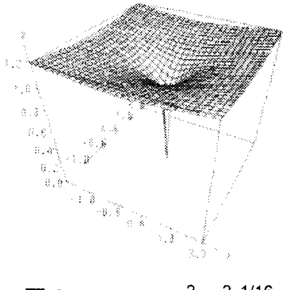


図 3. 10a　$z=(x^2+y^2)^{1/16}$

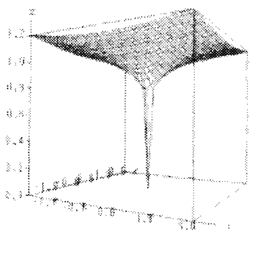


図 3. 10b　$z=(x^2+y^2)^{1/16}$

なお、最後の例 $z=(x^2+y^2)^{1/16}$ においては、実数解が見つからず、極値を求めることはできない。

鞍点を内包する例としては、図 3.5a, 図 3.5b に示した $z=xy$ の式が簡潔でよいと筆者は考えるが、文字通り直観的に分かりやすい模範例として、以下も挙げておく。一般に、鞍点の解説にはこちらの式がよく用いられている。

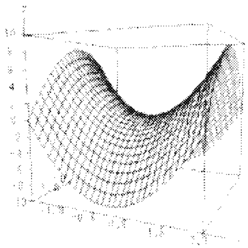


図 3. 11a　$z=x^2-y^2$

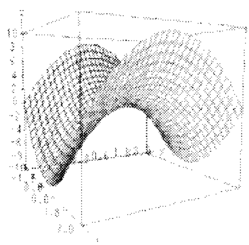


図 3. 11b　$z=x^2-y^2$

表 3. 10　$z=x^2-y^2$ の表示範囲内における極値

	解
x	0
y	0
極値	0
判定	鞍点
収束解の個数	15

これに接平面 $z=0$ を描き加えたのが以下の図 3.12a および図 3.12b であり、極大でも極小でもある鞍点の性質がよく見てとれる。

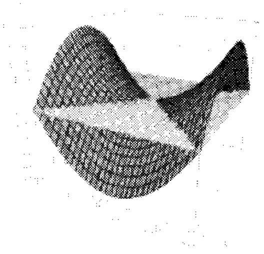


図 3. 12a　$z=x^2-y^2$ と接平面

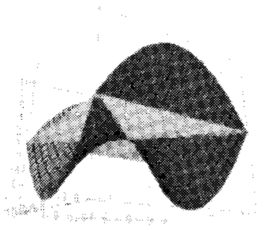


図 3. 12b　$z=x^2-y^2$ と接平面

4. おわりに

極値の判定として、極大・極小の他、鞍点とその他の停留点を求めることができる仕様にしているが、鞍点は極大と極小を同時に持つ点、その他の停留点は変曲点になっている点と定義してプログラムに組み込んでいる。場合によっては改良点となりうる箇所である。

接平面をグラフ曲面と同空間に表示できる機能は稀有であり、College Analysis の特長の１つに挙げることができる。これは、今回取り上げた２変量関数表示ユーティリティに限らず、他のユーティリティにも使われている図形描画のアルゴリズムが優れていることを示しており、高い汎用性を生み出す原動力となっている。

今後さらに改良を加えて利便性の高いソフトウェアへと発展させていきたい。

参考文献

1）武隈愼一, 石村直之, 基礎コース［経済学］－９『基礎コース　経済数学』, 新世社, 2003.
2）竹之内脩, 新経済学ライブラリ＝別巻９『経済・経営系　数学概説』, 新世社, 1998.
3）岡部恒治, 新経済学ライブラリ =13『経済数学入門』, 新世社, 1998.
4）岡村宗二,『やさしい経済教室　経済学のための数学応用』, 同文館出版, 1994.
5）岡村宗二, 加藤正昭,『経済学によく出てくる数学』, 同文館出版, 2006.

Structure and function of "Two variable function display utility" in College Analysis

Keiji ISHIMARU[†], Masayasu FUKUI[‡]

[†]Department of Economics, Faculty of Economics,
Fukuyama University
[‡]Department of Business Administration,
Faculty of Business Administration, Fukuyama Heisei University

Abstract

In this paper, for use in the field of education, we added utility that displayed the function graph in three dimension coordinates to integrated program for the analysis of social systems "College Analysis Ver.4.0". In College Analysis, this "Two variable function display utility" is the beginning in grappling with the problem of three dimension display in full scale.

Keywords

College Analysis, social system analysis, 3D graph