4 次交代群 A_4 のリー微分代数について

三　川　　　敦

Abstract

F を標数 0 の体，G を群とする．群代数 FG にブラケット積 $[f, g] = fg - gf$ を入れてできるリー代数 $[FG]$ の微分代数 (FG のリー微分代数という) $\mathrm{Der}_F [FG]$ と，群代数 FG の結合代数としての微分代数 $\mathrm{Der}_F FG$ の 2 つの微分代数を考えることができる．この論文では, 位数 12 の 4 次交代群 $G = A_4$ の場合に, リー微分代数についての考察を行う.

1 Introduction

F を標数 0 の体とし，A を F 上の結合代数とする．$A = F[x], F[x, x^{-1}]$ に対して，微分代数 $\mathrm{Der}_F A$ はそれぞれ古典的 Witt 代数，centerless Virasoro 代数として良く知られているリー代数となる．その一般化も色々され ([5],[12])，さらにその自己同型群なども良く調べられている ([6],[7])．また，[3] では，A が群代数の場合が調べられている．ブラケット積 $[x, y] = xy - yx$ により A をリー代数と考えたものを $[A]$ と表すとき，$[A]$ のリー代数としての微分 (リー微分) 全体 $\mathrm{Der}_F [A]$ も考えることができるが，[8] では，位数 6 の二面体群 $G = D_3$ の場合，[9] では，位数 8 の二面体群 $G = D_4$ の場合，[10] では，位数 10 の二面体群 $G = D_5$ の場合，[11] では，位数 8 の 4 元数群 Q_4 の場合をそれぞれ調べ，$\mathrm{Der}_F FG$ が $\mathrm{Der}_F [FG]$ の直和因子になっていることが分かった．この論文では，位数 12 の 4 次交代群 $G = A_4$ の場合のリー微分代数 $\mathrm{Der}_F [FG]$ について考察を行う.

2 Preliminaries

この論文における記号は [8,9,10,11] のものを使うが，読者の便宜を図り，必要な記号について説明をする．

標数 0 の体 F に対して，A を F 上の結合代数，L を F 上のリー代数とする．A に対して，新しい積 $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ ($\cdot$ は A における積) による代数を $[A]$ で表す (これは F 上のリー代数になる ([4, p.6]))．F の元を成分にもつ n 次の正方行列全体 $M(n, F)$ から得られるリー代数を $gl(n, F) = [M(n, F)]$ で表し，一般線形リー代数といい，トレースが 0 の n 次の正方行列全体から得られるリー代数を $sl(n, F)$ で表し，特殊線形リー代数という．また，有限群 G に対して，その元を基底とする F 上のベクトル空間に，G の積を拡張したものを考えて得られる結合代数を群代数といい，FG とかく．

結合代数 A の任意の元 $x, y \in A$ に対して

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$$

を満たす A の線形写像 δ を A の微分といい，その全体を $\mathrm{Der}_F A$ とかく．そして，F 上のリー代数 L の線形写像 δ で L の任意の元 $x, y \in L$ に対して

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

が成り立つものを L の微分といい，その全体も $\mathrm{Der}_F L$ とかく．よって，結合代数 A に対しては，$\mathrm{Der}_F A$ の元と $\mathrm{Der}_F [A]$ の元である 2 種類の微分を考えることができる．このとき，$\mathrm{Der}_F [A]$ の元を A の**リー微分**という．また，$L^2 = sp\{[x, y] \mid x, y \in L\}$，$Z(L) = \{x \in L \mid$ 任意の $y \in L$ に対して $[x, y] = 0\}$ を，それぞれ L の導来イデアル，L の中心といい，ともにリー代数になる．

3 The case of the Alternating group A_4 of order 12

4 次の置換 $1 \to i_1$, $2 \to i_2$, $3 \to i_3$, $4 \to i_4$ を $p(i_1 i_2 i_3 i_4)$ と略記する．このとき，4 次交代群の各元は $A_4 = \{e, p(1342), p(1423), p(3241), p(4213), p(2431), p(4132), p(2314), p(3124), p(2143), p(3412), p(4321)\}$ となる．ここで，$e = p(1234)$ は単

位元である．この A_4 からできる群代数を以下 $A = FA_4$ とかく．

$L = [A]$ の基底 $A_4 = \{e, p(1342), p(1423), p(3241), p(4213), p(2431), p(4132), p(2314), p(3124), p(2143), p(3412), p(4321)\}$ のブラケット積は（$[x, x] = 0$, $[y, x] = -[x, y]$, $[e, x] = 0$ を除いて），次の $55 = {}_{11}C_2$ 種類である．

$$
\begin{aligned}
&[p(1342), p(1423)] = p(1234) - p(1234) = 0,\\
&[p(1342), p(3241)] = p(4321) - p(3412),\\
&[p(1342), p(4213)] = p(2314) - p(4132),\\
&[p(1342), p(2431)] = p(3241) - p(2314),\\
&[p(1342), p(4132)] = p(2143) - p(4321),\\
&[p(1342), p(2314)] = p(3412) - p(2143),\\
&[p(1342), p(3124)] = p(4132) - p(3241),\\
&[p(1342), p(2143)] = p(3124) - p(2431),\\
&[p(1342), p(3412)] = p(4213) - p(3124),\\
&[p(1342), p(4321)] = p(2431) - p(4213);\\
&[p(1423), p(3241)] = p(2431) - p(3124),\\
&[p(1423), p(4213)] = p(3412) - p(4321),\\
&[p(1423), p(2431)] = p(4321) - p(2143),\\
&[p(1423), p(4132)] = p(3124) - p(4213),\\
&[p(1423), p(2314)] = p(4213) - p(2431),\\
&[p(1423), p(3124)] = p(2143) - p(3412),\\
&[p(1423), p(2143)] = p(4132) - p(2314),\\
&[p(1423), p(3412)] = p(2314) - p(3241),\\
&[p(1423), p(4321)] = p(3241) - p(4132);\\
&[p(3241), p(4213)] = p(1234) - p(1234) = 0,\\
&[p(3241), p(2431)] = p(2143) - p(3412),\\
&[p(3241), p(4132)] = p(1342) - p(3124),\\
&[p(3241), p(2314)] = p(2431) - p(1342),\\
&[p(3241), p(3124)] = p(4321) - p(2143),\\
&[p(3241), p(2143)] = p(2314) - p(4132),\\
&[p(3241), p(3412)] = p(4132) - p(1423),\\
&[p(3241), p(4321)] = p(1423) - p(2314);\\
&[p(4213), p(2431)] = p(2314) - p(1423),\\
&[p(4213), p(4132)] = p(3412) - p(2143),\\
&[p(4213), p(2314)] = p(2143) - p(4321),\\
&[p(4213), p(3124)] = p(1423) - p(4132),\\
&[p(4213), p(2143)] = p(2431) - p(3124),\\
&[p(4213), p(3412)] = p(1342) - p(2431),\\
&[p(4213), p(4321)] = p(3124) - p(1342);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[p(2431), p(4132)] = p(1234) - p(1234) = 0,\\
&[p(2431), p(2314)] = p(4321) - p(3412),\\
&[p(2431), p(3124)] = p(3241) - p(1423),\\
&[p(2431), p(2143)] = p(4213) - p(1342),\\
&[p(2431), p(3412)] = p(3124) - p(4213),\\
&[p(2431), p(4321)] = p(1342) - p(3124);\\
&[p(4132), p(2314)] = p(1342) - p(4213),\\
&[p(4132), p(3124)] = p(3412) - p(4321),\\
&[p(4132), p(2143)] = p(1423) - p(3241),\\
&[p(4132), p(3412)] = p(3241) - p(2314),\\
&[p(4132), p(4321)] = p(2314) - p(1423);\\
&[p(2314), p(3124)] = p(1234) - p(1234) = 0,\\
&[p(2314), p(2143)] = p(3241) - p(1423),\\
&[p(2314), p(3412)] = p(1423) - p(4132),\\
&[p(2314), p(4321)] = p(4132) - p(3241);\\
&[p(3124), p(2143)] = p(1342) - p(4213),\\
&[p(3124), p(3412)] = p(2431) - p(1342),\\
&[p(3124), p(4321)] = p(4213) - p(2431);\\
&[p(2143), p(3412)] = p(4321) - p(4321) = 0,\\
&[p(2143), p(4321)] = p(3412) - p(3412) = 0;\\
&[p(3412), p(4321)] = p(2143) - p(2143) = 0.
\end{aligned}
$$

よって，簡単な計算により，L の中心 $Z(L)$ は

$$
\begin{aligned}
Z(L) = sp\{e, p(1342) &+ p(2431) + p(3124) + p(4213),\\
&p(1423) + p(2314) + p(3241) + p(4132),\\
&\qquad p(2143) + p(3412) + p(4321)\}
\end{aligned}
$$

で，L の導来イデアル L^2 は

$$
\begin{aligned}
L^2 = sp\{p(1342) &- p(2431), p(1342) - p(4213),\\
&p(1423) - p(3241), p(1423) - p(4132),\\
&\qquad p(2143) - p(4321), p(2314) - p(3241),\\
&\qquad\qquad p(3124) - p(4213), p(3412) - p(4321)\}
\end{aligned}
$$

であることがわかる．したがって，$L = L^2 \oplus Z(L)$ が成り立つ．次に，

$$H = sp\{p(2143) - p(4321), p(3412) - p(4321)\}$$

とおくと，H は L^2 の可換部分リー代数である．H 上の 1 次形式 α, β を次で定義する．

$$\alpha(p(2143)-p(4321))=2,\quad \alpha(p(3412)-p(4321))=4,$$
$$\beta(p(2143)-p(4321))=2,\quad \beta(P(3412)-P(4321))=-2.$$

このとき，$M=L^2$ をブラケット積により H-加群と考えると，次のように固有空間に分解できる．

$$M=H\oplus M(\alpha)\oplus M(\beta)\oplus M(\alpha+\beta)$$
$$\oplus M(-\alpha)\oplus M(-\beta)\oplus M(-\alpha-\beta)$$

ここで，

$$M(0)=sp\{p(2143)-p(4321),\ p(3412)-p(4321)\},$$
$$M(\alpha)=sp\{p(1423)-p(2314)+p(3241)-p(4132)\},$$
$$M(\beta)=sp\{p(1423)+p(2314)-p(3241)-p(4132)\},$$
$$M(\alpha+\beta)=sp\{p(1342)+p(2431)-p(3124)-p(4213)\},$$
$$M(-\alpha)=sp\{p(1342)-p(2431)-p(3124)+p(4213)\},$$
$$M(-\beta)=sp\{p(1342)-p(2431)+p(3124)-p(4213)\},$$
$$M(-\alpha-\beta)=sp\{p(1423)-p(2314)-p(3241)+p(4132)\}$$

である．したがって，

$$L^2=M\cong sl(3,F)$$

となることが分かる．よって，[9, 定理 3.1] と同様にして次の定理が成り立つことがわかる．

定理 3.1　$G=A_4$，$A=FG$ とすると，次の同型が成り立つ．

$$\mathrm{Der}_F A=\mathrm{Inn}_F A\cong A/\mathrm{Z}(A),$$
$$\mathrm{Der}_F[A]\cong \mathrm{Der}_F A\oplus gl(4,F).$$

よって，F が代数的閉体の場合は，

$$\mathrm{Der}_F A=\mathrm{Inn}_F A\cong sl(3,F),$$
$$\mathrm{Der}_F[A]\cong sl(3,F)\oplus gl(4,F).$$

ここで，$\mathrm{Inn}_F A$ の記号について説明をしておく．$x, y \in A$ に対して，

$$\mathrm{ad}\, x(y) = xy - yx$$

とすると，$\mathrm{ad}\, x$ は A の微分であり，この形の微分を A の内部微分といい，その全体を $\mathrm{Inn}_F A$ とかく．[2, p.490] より，有限群から出来る群代数の微分は内部微分に限るので，$\mathrm{Der}_F A = \mathrm{Inn}_F A$ が成り立つ．

References

[1] C.P. Milies and S.K. Sehgal *An Introduction to Group Rings*, Kluwer Academic Publishers, 2002

[2] C.W. Curtis and I. Reiner *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience, New York, 1962

[3] T. Ikeda and N. Kawamoto *On derivation algebras of group algebras*, Nonassociative Algebras and its Applications, 188-192, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994

[4] N. Jacobson *Lie Algebras*, Interscience, New York, 1962

[5] N. Kawamoto *Generalizations of Witt algebras over a field of characteristic zero*, Hiroshima Math. J., **16** (1986), 417-426

[6] ——— *On G-graded automorphisms of generalized Witt algebras*, Contemp. Math., **184** (1995), 225-230

[7] N. Kawamoto, A. Mitsukawa, K-B. Nam and M-O. Wang *The automorphisms of generalized Witt type Lie algebras*, J. Lie Theory, **13** (2003), 573-578

[8] A. Mitsukawa 群代数のリー微分代数について，福山大学経済学論集，**30**(2006), 29-34

[9] ——— 群代数のリー微分代数について (2)，福山大学経済学論集，**32**(2007), 133-137

[10] ——— 二面体群 D_5 のリー微分代数について，福山大学経済学論集，**33** (2008), 221-228

[11] ——— 4 元数群 Q_4 のリー微分代数について，福山大学経済学論集，**34** (2009), 87-90

[12] K-B. Nam *Generalized W and H type Lie algebras*, Algebra Colloq., **6** (1999), 329-340