福山大学工学部紀要
第31巻 2007年12月

「モンテカルロ」の成功率

新谷 敏朗*

The Success Rate of "Monte Carlo"

Toshio Shintani*

ABSTRACT

"Monte Carlo" is a solitaire game with one deck of cards. The game is played with 5 rows and 5 columns of cards. In this game you can discard cards in pairs of the same rank if the two cards of the pair are adjacent in a row, a column, or a diagonal. The theoretical rate of success has not been found. In this paper, I treat the game as a complete information game and then I can look ahead all nodes in the game tree. Then I use the same algorithm as that for "Superpuzz" to solve the game. By using a program to play a game with the algorithm on personal computers, I confirmed that the rate of Success is about 87%. This rate of Success is the upper limit for the game and higher than I expected from my own experiences of play.

キーワード: トランプ, ひとり遊び, モンテカルロ, 不完全情報
Key words: Card game, Solitaire, Monte Carlo, Rate of success, Incomplete Information

1 まえがき

「モンテカルロ」はよく知られたトランプの一人遊びゲームである。[1] 5×5 の 2 次元配列状に表向きに並べた場と残り 27 枚の裏向きの山からなる初期状態で始める. 縦・横・斜めに隣り合った同じ数値のカードを 2 枚ずつ捨てることができる. 捨てた後を山のカードから補充してさらに可能であればカードを 2 枚ずつ捨てていき, 最終的に 52 枚のカードをすべて捨てることができれば成功, 途中で捨てるカードがなくなれば失敗である. 山のカードは裏向きで見えないので, 完全情報ゲームではない. これまでに山のカードがなくなった後に先読みをするプログラムがつくられていて, それによると成功率は約 50%である. [2] 今回は, 成功率の理論的上限を知るために, 山のカードを表向きにして完全情報ゲームとして扱う. そうすることにより, 筆者がこれまで使用してきた「スーパーパズ」などのトランプの一人遊びゲームを解くプログラム[3]を利用することができる. 容易に想像できるように, ゲームの初期局面で捨てることができる隣り合ったカードが 1 組も存在しないことがあり得る. 従って, 成功率の上限は 100%ではない. 本論文では, まずルールに則してゲームの性質を考察する. つまり 2 枚のカードの「距離」がそれらのカードが「隣り合っている」かどうかに関係することに着目し, ゲームが失敗に終わるための十分条件を明らかにする. 次に, 筆者がこれまで他の完全情報ゲームに適用してきた深さ優先探索アルゴリズムを用いて, ゲーム

*情報工学科

を解き「モンテカルロ」の成功率を実験的に求める．また，このゲームは場のカード数を変えても成立するので，場の大きさを 2×2,3×3, ... ,7×7 までの間で変更した場合についても成功率を調べた．

2　ルールと性質

モンテカルロでは以下で説明するように，スートは意味を持たないが，便宜上 H,D,S,C で表す．絵札の数値は A:1,J:11,Q:12,K:13 のように対応する．n(C)はカード C の数値を表す．n(C1)=n(C2)のとき，C1 と C2 は同位札であるという．

2.1　ルール

モンテカルロのルールは以下のようなものである．

(1) 52 枚のカードをよくシャッフルして，表向きに配り図 1 のように 5×5=25 枚を場札とする．場札の左上から右下まで左→右，上→下のように自然な順序があると考える。残りの 27 枚は裏向きに重ねて山札とする．

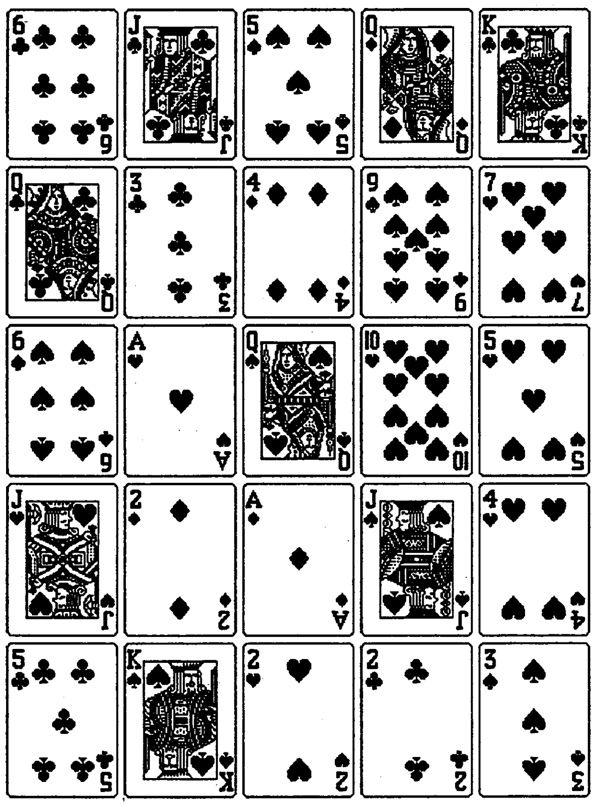


図 1　初期局面の例

(2) 上下，左右，斜めに隣り合っている 2 枚の同位札を場札から削除できる．この操作によって生じた場所を「穴」と呼ぶ。削除可能な同位札の組が複数存在する場合は，連続して削除してよい．

(3) 「穴」を(1)の自然な順序に従って前に詰める．詰めることによって生じる右下の「穴」は，山札が残っていれば山札から補充する．

52 枚のカードすべてを削除することができれば，「成功」である．成功」していない状態で，削除可能な同位札の組が存在しなければ，「失敗」である．

2.2　性質

この節では，同位札の位置関係に関して考える．場は見かけ上 5×5 の 2 次元配列であるが，ルールで述べた自然な順序で並んでいる 1 次元配列 a[i]と考えることができる．そのとき，a[i]と a[j]の距離 d を i-j と定義する．d>0 の場合のみ考えればよいので，同位札の位置関係は以下のように分類できる．

・d=1 の場合

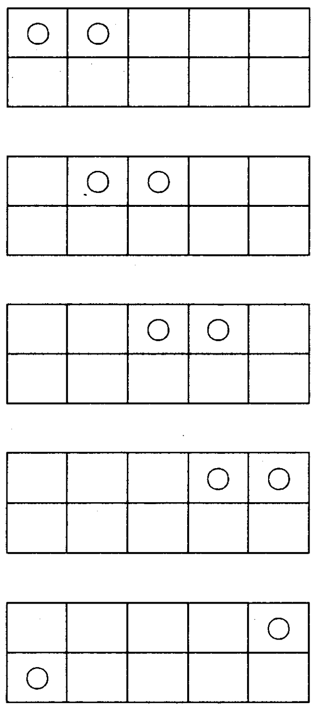


図 2　連続した同位札の位置関係

図2では○が同位札を表す．つまり，5通りのうち連続した同位札が右端と左端に分かれた場合は削除できないが，それ以外の4通りの場合は左右に隣り合うので削除できる．同様に考えていくと，

- d=2,3 の場合：上下，左右はもちろん，斜めにも隣り合うことはないので，常に削除できない．
- d=4 の場合：同じ行の左端と右端に分かれた場合のみ削除できない．それ以外は斜めに隣り合うので削除できる．
- d=5 の場合：上下に隣り合うので常に削除できる．
- d=6 の場合：1行空いて右端と左端に分かれた場合のみ削除できない．それ以外は斜めに隣り合うので削除できる．
- d≧7 の場合：隣り合うことはなく，常に削除できない．

以上の分類により，例えば次のように4枚のカードが場に残った状態は失敗であることがすぐにわかる．

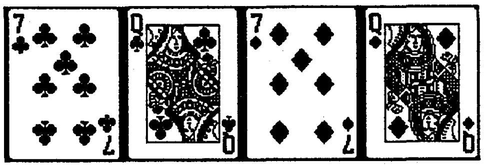


図3　失敗局面の例1

これを一般化すると，次の性質が成り立つ．

性質1　数値が異なる同位札のペアをC1,C2とD1,D2とする．場にC1D1C2D2という並びが存在して，C1のC2以外の同位札のペアとD1のD2以外の同位札のペアがどちらも既に削除されていれば，そのゲームは失敗である．

証明：ルールにより2枚のカードの距離が増すことはない．従って，C1とC2を削除するためにはD1を削除する必要がある．しかし，そのためにはD1とD2の間にあるC2を削除する必要がある．すなわち，堂々めぐり（オペレーティングシステムでいうところのデッドロック）が生じているので，この4枚のカードを削除することはできない．

（証明終わり）

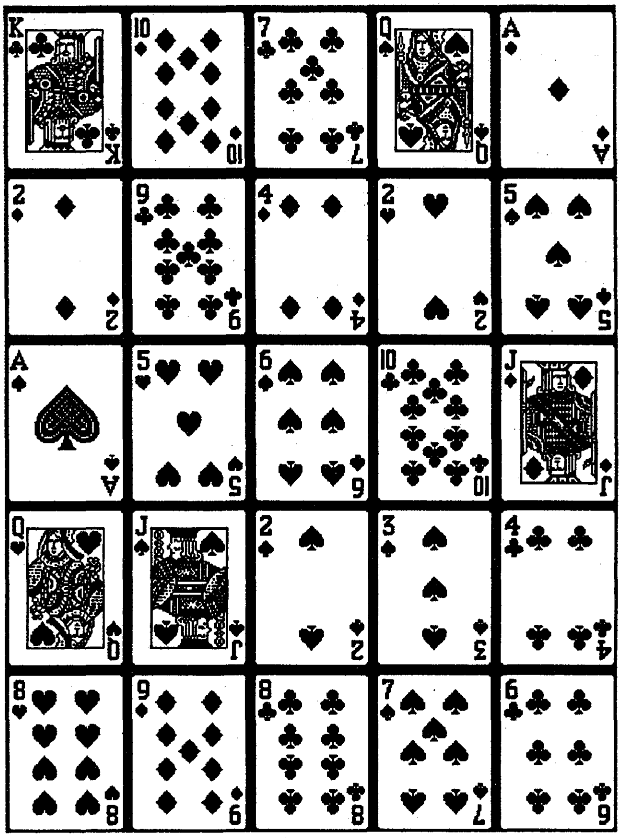


図4　失敗局面の例2

モンテカルロでは，場に25枚のカードを配置した初期状態で削除できる同位札のペアが1組も存在しない例を図4のように容易につくることができる．従って，性質1はゲームが失敗するための必要条件ではなく，十分条件である．しかし，図3は失敗する場合の典型例と考えられるので，特に人間がプレイする場合は図3の状態を避けることに注意するとよいと考えられる．

距離が3の場合も同様に6枚が残った失敗の状態が存在する．

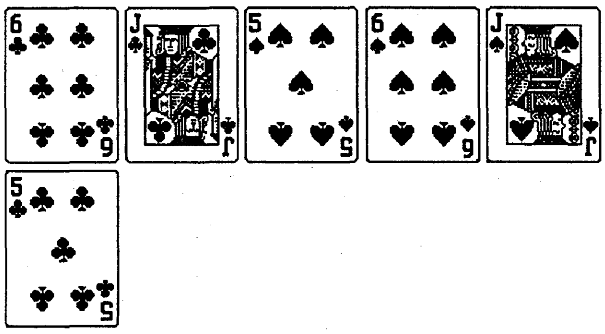


図5　失敗局面の例3

ただし，実際にプレイしてみるとこの状態で失敗となる場合はほとんどないようである．その理由は以下のように考えられる．図 5 の局面の親局面を考えると，同位札のペアをこれら 6 枚の並びの先頭や末尾に挿入する場合以外は，距離が 4 または 5 のペアができることがわかる．従ってたいていの場合は図 5 の局面になることは避けられる．

3 アルゴリズム

場と山のカードを配った状態を初期局面として，ルールに従って実行可能な同位札のペアの削除や穴を詰めることを枝に対応させて子局面を作成していくと「モンテカルロ」のゲームの木を作成することができる．このゲームは山のカードが裏向けになっているので不完全情報ゲームである．ここでは，理論的な成功率を考えるために，山のカードもすべて見えているとする．そうすると完全情報ゲームなので，先読みが可能になる．このことによって，筆者がこれまで研究してきた「スーパーパズ」などのトランプの一人遊びのゲーム木の探索アルゴリズムを使用することができる．文献[3] のプログラムで，子局面を作成する部分と重複局面をチェックする際に使用するパトリシアでの局面に対応する整数を計算する部分をそれぞれ「モンテカルロ」のルールと局面にあわせて修正すればよい．「モンテカルロ」では同位札の削除によってカードの残り枚数が減っていくので「スーパーパズ」のように同じ局面が繰り返して現れることはないが，異なる手順で同じ局面が生じることはある．

このゲームで，ひとつの局面から生成される子局面の個数は，以下のように考えられる．

① 同位札の削除：削除できる同位札の組が n 通りあれば，それぞれ削除するかどうか 2 通りの選択肢がある．少なくとも 1 組は削除するので，2^n-1 個

② 穴を詰める：複数の穴が存在しても同時に詰めるので，①の操作によって生じる局面に対して各々 1 個

従って①の場合，単純に考えると n の最大値は 12 なので，子局面数の最大値は $2^{12}-1 = 4095$ である．しかし，同位札は初期局面では 4 枚ずつ存在する．もしこの 4 枚の同位札がすべて隣り合っている場合は，削除できる組の数は ${}_4C_2=6$ である．ただし，「モンテカルロ」ではスートは意味を持たないので，削除後に穴を詰めた状態で異なる局面は 4 通りしかない．よって，ある局面で 4 枚の同位札が 6 組すべて場にある場合でも子局面の個数は，$4^6-1=4095$ である．これらのことと，削除可能な組の最大個数は当然 26 であることから，ゲーム木の局面数は $2^{26}\times 2 \fallingdotseq 10^8$ 程度であると予想できる．この値は「スーパーパズ」と比べるとかなり小さい．また，成功局面が見つかればその時点で探索は終了できるので実際に探索に必要な計算量も「スーパーパズ」と比べるとかなり小さいと予想される．

4 計算結果

実際の計算は，OS が Solaris10, CPU が AMD の Dual Opteron1.8GHz で主記憶 16GB のマシンを用いた．また，「モンテカルロ」は場のカードの枚数を変更しても実行可能なので，本来の 5×5 の場以外にも，2×2, 3×3, ..., 7×7 までの場合について計算を実行した．疑似乱数を用いて発生させた初期局面 10000 個に対する成功数は，

2×2 : 0
3×3 : 24
4×4 : 3806
5×5 : 8726
6×6 : 9802
7×7 : 9916

であった．この結果より，5×5 の本来の「モンテカルロ」の成功率の上限は 87% 程度であることがわかる．2×2 や 3×3 ではほとんど成功しない．また当然ではあるが場のカードの枚数が多いほど成功率は高い．ただし，7×7 の場合は，ゲーム木の局面数が多くなりすぎて，計算を途中で打ち切った初期局面が 5 局面存在した．次頁の図 6 に図 1 の初期局面から探索

した場合の途中局面と手の例を示す．なお，山のカードで 0 は数値が 10 であることを表す．

ここで手の表記は，

0000：穴を詰める

ijkl：第 i 行 j 列のカードと第 k 行 l 列のカードを削除する

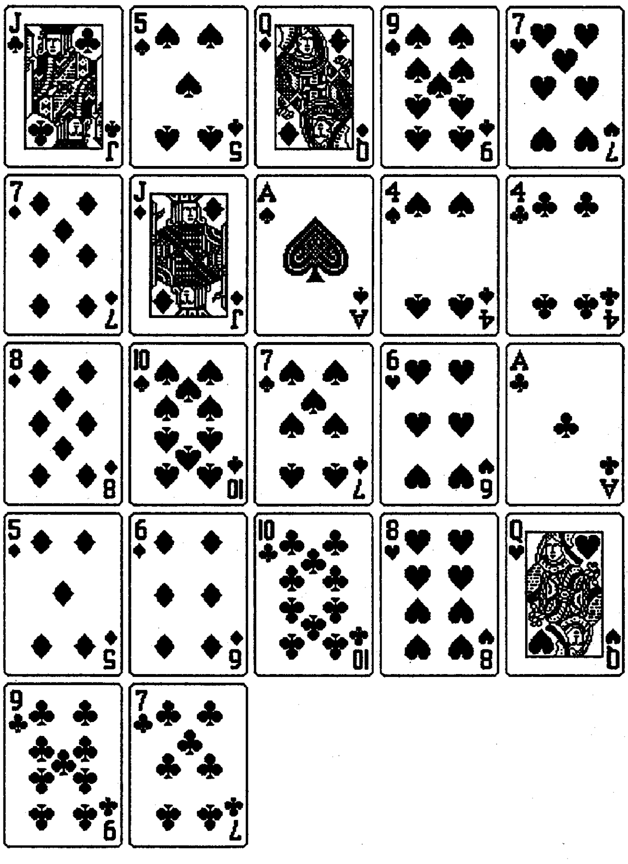
である．手順の表示は，成功が確定した局面から初期局面までさかのぼるようになっているので，初手は 3243（図 1 で HA と DA を削除）であって第 42 手の 1112 ですべてのカードが削除され成功している．

「モンテカルロ」の成功局面では場にカードはないので，図 6 では途中の山のカードがなくなった局面（第 23 手の 4252 の次の 0000 つまり「穴を詰める」を行った後の局面を示している．探索には，単純な深さ優先探索を用いて，削除可能なカードは場の自然な順序に従って探索している．そして最初に見つかった解を示しているので，左上から見ていって削除できるカードはどんどん削除していくような解になっている．

初期局面から成功局面に至るまでの平均局面数は，

2×2：　0
3×3：　97
4×4：278
5×5：1377
6×6：18613
7×7：45125

であった．生成される局面数は「スーパーパズ」の場合と比較すると非常に少ないことがわかる，これは，「モンテカルロ」ではカードが少なくとも 2 枚ずつ削除されていくので局面のカード数が単調に減少していくためであると考えられる，図 7～9 に 4×4, 6×6, 7×7 各々の場合の成功例を示す．



(a) 山のカードがなくなった局面

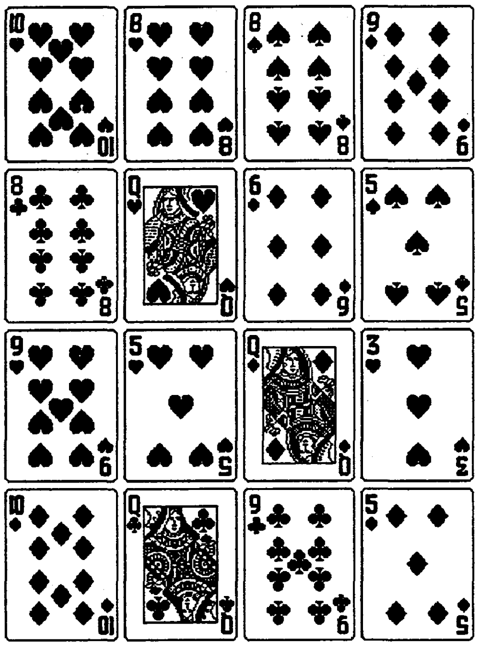
```
HK D0 D7 DJ SA
S4 S2 DK C4 H9
D8 S0 C8 S7 H6
D9 H3 CA S8 D5
D6 C0 D3 H8 HQ
C9 C7
```

(b) 山のカード

```
Success! No.120, level=42, duple=0,
0 Cards
1112<-0000<-1213<-0000<-1221<-0000<-
1121<-0000<-1121<-0000<-2131<-1415<-
0000<-2132<-1415<-0000<-3243<-1122<-
0000<-4252<-2131<-0000<-4252<-2132<-
0000<-4253<-1122<-0000<-2132<-1525<-
0000<-3142<-2232<-0000<-3233<-0000<-
3241<-0000<-2132<-0000<-4253<-3243
```

(c) 成功までの手順

図 6　成功までの途中局面と手順の例



(a) 初期局面

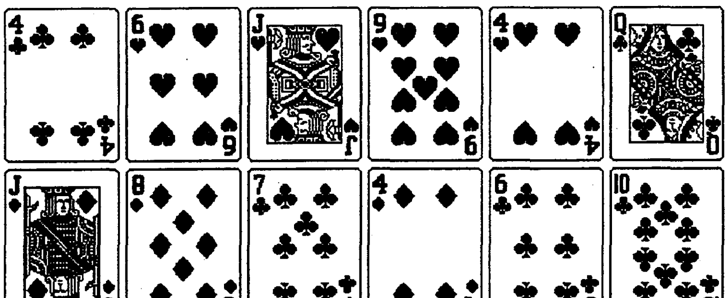
S2 S7 H2 D3 C4 DJ SK DK CJ H7 D7 H4 D8 H6 C6 D2
HA S0 SJ C7 SQ S9 SA CK HK DA S6 C5 C3 C2 C0 CA
HJ D4 S4 S3

(b) 山のカード

1112<-0000<-1112<-0000<-1222<-0000<-1221<-0000<-
1122<-0000<-2132<-1222<-0000<-1223<-0000<-1223<-
0000<-3233<-1324<-0000<-3141<-1324<-0000<-3142<-
2334<-0000<-3334<-0000<-3142<-0000<-3233<-0000<-
3242<-0000<-3142<-0000<-3443<-0000<-2334<-0000<-
2232<-0000<-2333<-0000<-3342<-1213

(c) 成功までの手順

図 7　初期局面と手順の例 1



(a) 初期局面

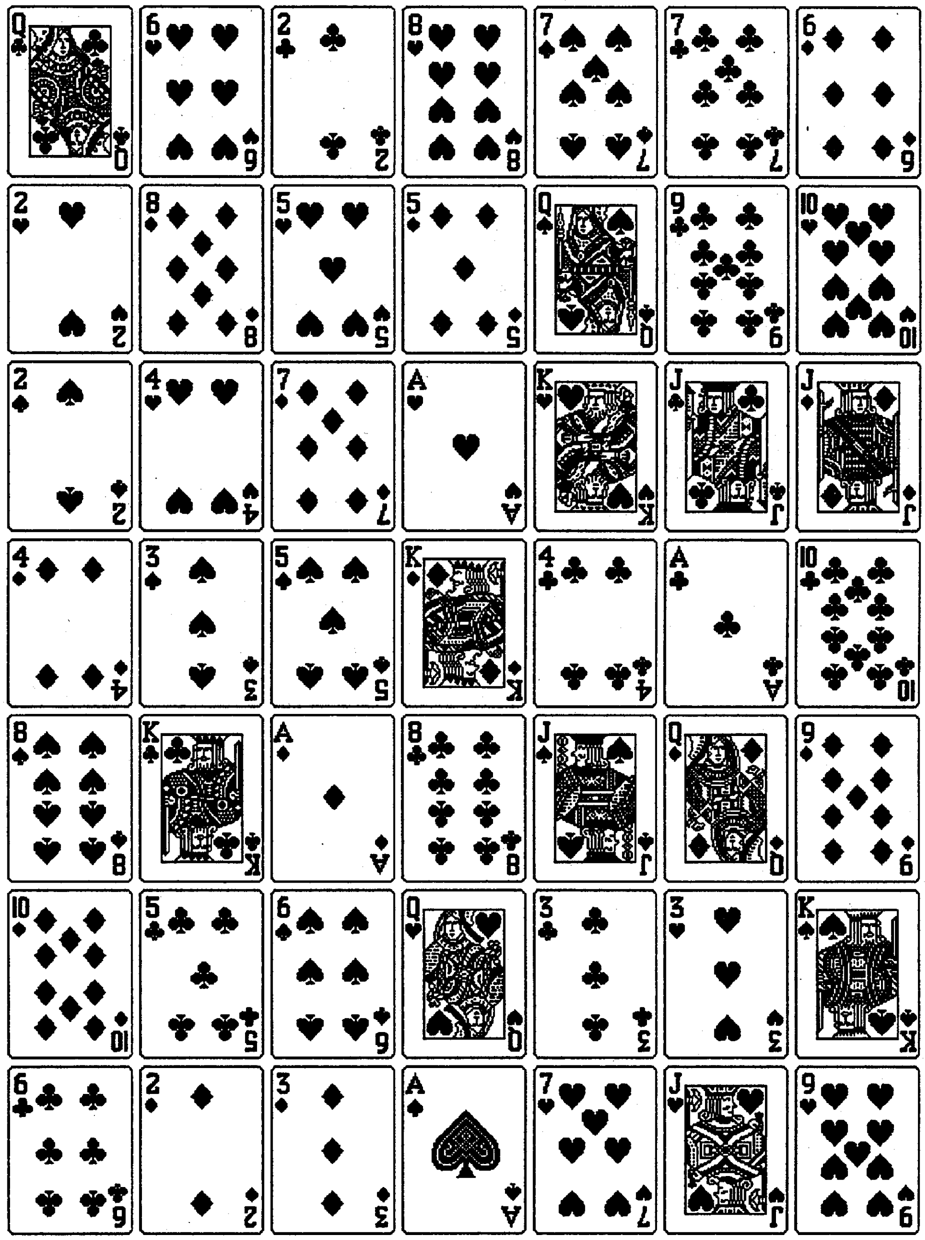
D3 SA C3 H2 DQ D7
H5 H0 S5 CJ C9 DA
D2 CK DK HQ

(b) 山のカード

0000<-1112<-0000<-1213<-0000<-
2122<-1112<-0000<-1223<-0000<-
1122<-0000<-2132<-1425<-0000<-
3141<-3343<-2334<-0000<-4152<-
3243<-0000<-5455<-3343<-0000<-
4142<-2535<-0000<-4142<-2435<-
0000<-5465<-3545<-1222<-0000<-
5253<-4142<-2333<-1524

(c) 成功までの手順

図 8　初期局面と手順の例 2



(a) 初期局面

S0 S4 S9

(b) 山のカード

0000<-1112<-0000<-1112<-0000<-1213<-0000<-1121<-1222<-0000<-1121<-1322<-
0000<-1122<-0000<-1625<-0000<-2132<-1324<-0000<-1425<-0000<-1324<-0000<-
2334<-0000<-2435<-1526<-0000<-2231<-0000<-2231<-0000<-2334<-1617<-0000<-
4354<-3233<-1122<-0000<-6566<-2131<-1516

(c) 成功までの手順

図 9　初期局面と手順の例 3

5　あとがき

本論文では，トランプの一人遊びである「モンテカルロ」について，ゲームの性質について簡単な考察をし，ゲームが失敗するための十分条件を明らかにした．

次に完全情報ゲームとみなして実際にゲーム木の深さ優先探索を行うプログラムを実行して理論的な成功率を求めた．その結果，「モンテカルロ」では成功率の上限は87%程度であることを明らかにした．また，場のカードの枚数を2×2, 3×3, 4×4, 6×6, 7×7とした場合についても理論的な成功率を求めた．当然予想されるように成功率は場のカードが多いほど高く，2×2 と 3×3 の場合はほとんど成功せず，6×6 と 7×7 の場合はほとんど失敗しないという結果であった．

本論文の計算結果で失敗した1274個の初期局面のうち，山のカードがなくなるところまで到達したものは 144 個であった．成功数が 8726 なので，8726/(144+8726)=0.984 つまり山のカードがなくなった局面から考えれば98.4%の割合で，成功していることになる．逆の見方をすると，(1274-144)/1274=0.887 つまり失敗する場合は，88.7%の割合で山のカードがなくなる前に削除できる同位札の組がなくなって失敗することになる．

文献[2]の山のカードがなくなってから先読みをするプログラムでは，

山札がなくなるまでに失敗する割合が28.7%,

山札がなくなってから失敗する割合が21.3%,

（山札がなくなって）成功する割合が50.0%

であった．従って，山のカードがなくなるまでに失敗する割合を減らす工夫ができれば，本来のルールのもとでの成功率を本論文で得られた理論的な成功率の上限に近づけることができると考えられる．

人間がプレイする場合の指針としては，次のようなことが考えられる．削除できる同位札の組が1組しかない場合は選択肢がないので，複数存在する場合を考える．その場合，前のほうにある（物理的に左または上にある）組を1組以上削除せずに残しておくと詰めた後にすぐには失敗局面にならない可能性が高いということが挙げられる．これは詰める動作は削除してできた穴の後のカードが前に詰められていくので，穴の前にあるカードは影響を受けないことによる．もうひとつは，距離が2の同位札の間にあるカードを優先的に削除していくことが考えられる．これは第2節で述べた「失敗するための十分条件」をできるだけ満たさないようにするためである．

参考文献

[1] 野崎，トランプひとり遊び88選，朝日選書416, pp.230-235(1990)

[2] 神田，Windows版「モンテカルロ」の改良，福山大学卒業論文 (2007年2月)

[3] 新谷，スーパーパズを解くプログラム，第5回ゲームプログラミングワークショップ論文集，IPSJ Symposium Series Vol.99, No.14, pp.84-91(1999)