福山大学工学部紀要
第30巻 2006年12月

ソリティアの成功率に関する考察

新谷 敏朗*

Consideration on the Rate of Success of Solitaires

Toshio Shintani*

ABSTRACT

"Freecell" is a solitaire game with one deck of cards. The game is played with 8 rows of cards, 4 free cells and 4 home cells. It is similar to the game named "Four Companies". The rate of success is expected to nearly 100%. But the theoretical upper limit for the success rate has not been found. In this paper, I show the maximum number of the cards which are able to move from a row to another. Then I use the same algorithm as that for "Superpuzz" to solve the game. By using a program to play a game with the algorithm on personal computers, I confirmed that the rate of Success is greater than 99.97%. The rate of Success for "Four Companies" is estimated to 91.73%, which is rather less than that of "Freecell"

キーワード: トランプ, ひとり遊び, フリーセル, 成功率, 4 人の仲間
Key words : Card game, Solitaire, Freecell, Rate of success, Four Companies

1 まえがき

ソリティアとはトランプの一人遊びゲームを意味し，多くの種類が存在する．情報処理学会のゲーム情報学研究会でもこれまでに，「カルキュレーション」，「スーパーパズ」などが取り上げられてきており成功率に関する研究がなされている．[1] 筆者もこれまでにこれらのゲームに関する研究を行ってきた．[2] [3] 今回は，ソリティアのうち Windows に付属している「フリーセル」というゲームを取り上げる．このゲームは 52 枚のカードをすべて表向きに配った状態で始めるので完全情報ゲームである．8 列の場札のカードをフリーセルと呼ばれる 4 カ所の一時待避場所を利用して，相互に移動して赤黒交互の数下がり列を作っていく．スタックトップのカードは可能であればホームセルと呼ばれる台札の席に移動することができる．ゲームの目的は，場札の天のカードをホームセルにスート別に移動してそれぞれエースから順にキングまでの数上がり列を作ることである．実際にプレイしてみるとわかるが，カードの並び方をよく見て移動していくとほとんどの場合に成功する．難しい初期局面もあるが，何回か試行を重ねると必ず成功するといっていいほどである．しかし，後で示すように理論的に成功が不可能な初期局面が存在するので，成功率の上限は 100%ではない．本論文では，まずカードの移動に関して考察し，場札のある列から別の列に一度に移動可能なカードの枚数を明らかにする．次に，筆者がこれまで他のソリティアに適用してきた深さ

*情報処理工学科

優先探索アルゴリズムを用いて，ゲームを解き「フリーセル」の成功率を実験的に求める．また，このゲームは「4 人の仲間」[4]　と呼ばれるソリティアの変種であると思われるので，「4 人の仲間」についても成功率を調べた．

2　ルールと性質

以下ではカードを C, スートを, T=H,D,S,C で表し，数値は N=A:1,10:0,J:11,Q:12,K:13 のように表示する．また，スートの色は，H,D:赤，S,C:黒である．場札の列を列番号 1～8 で表す．

2.1　ルール

フリーセルのルールは以下のようなものである．

(1) 52 枚のカードをよくシャッフルして，すべて表向きに配り図 1 のように 8 列の場札とする．4 列は 7 枚，残りの 4 列は 6 枚になる．場札の列は交換可能なので，第 3 節で述べるように左から昇順に整列している，図の左上がフリーセルで右上が台札の席（ホームセルと呼ばれる）である，場札の列は下に向けて積み上げていくので一番上が地で一番下が天である．以下の規則に従ってカードを移動できる．台札の席に移動したカードはそれ以上移動できない．

(2) 場札から台札：列の天にある A は台札の席に直ちに移動できる．A でないカードについては，どれかの列の天のカード C のスートを T，数値を N として，スート T の台札の席が(N-1)まで積まれていれば，C をスート T の台札の席に移動できる．

(3) 場札から場札：列 i の天のカードを Ci，列 j の天のカードを Cj とする．列 j が空の場合は Ci を列 j に移動できる．列 j が空でない場合は Ci と Cj の色が異なっていて，かつ Ci の数値が Cj の数値より 1 だけ小さければ，Ci を Cj の上に（列 j の天に）移動できる．

(4) 場札からフリーセル：場札の天のカードは，空いているフリーセルに移動できる．

(5) フリーセルから台札：フリーセルの札は，(2)と同様に台札の席に移動できる．

(6) フリーセルから場札：フリーセルの札は，(3)と同様に場札の列の天に移動できる．

4 つ台札の席がすべて K までの数上がり列になれば成功である．成功局面でなくて，移動できるカードがなければ失敗である．

「4 人の仲間」では，以下の 2 点で上のルールと異

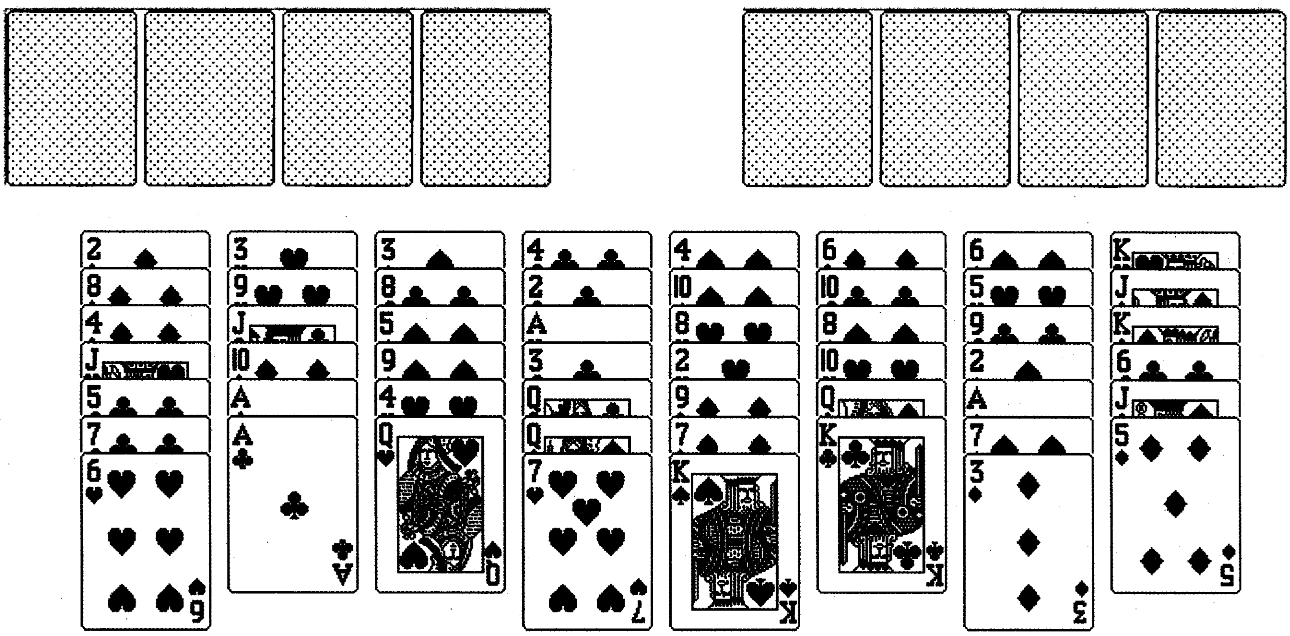


図 1　初期局面の例

なる．

まず，(3)と(6)の場札の列に移動する際の規則が異なる．

(i) 赤黒交互の数下がり列ではなく，「同じスート」の数下がり列を作るように移動する．

次に，フリーセルのルールに従ってカードを移動すると場札の列には赤黒交互の数下がり列ができる．それを「連」と呼ぶことにする．「4 人の仲間」では，同じスートの数下がり列が「連」である．

(ii) ある列の「連」x が別の列の「連」y に続くときは「連」x をまとめて y の上に移動できる．

2.2 性質

この節では，カードの場札から場札への移動について考察する．ルールによればカードの移動は一度には 1 枚だけである．しかし，次のように考えることで一連の移動をひとまとめにすることができる．

列 i に H7,S6,D5 という長さ 3 の連があるとする．別の列 j の天がスートの色が黒で数値が 8 のカードであって，かつフリーセルが 3 個空いていれば，列 i の連を構成する 3 枚のカード H7,S6,D5 をホームセルに移動して，その後列 j に H7,S6,D5 の順に移動することができる．つまり列 i から j に長さ 3 の連を一度に移動することができることになる．空いている場札の列があれば，空いているフリーセルと同じように連の移動のために途中場所として使うことができる．

例えば，フリーセルが 2 個空いており，かつ場札の列 k が空いているとする．k と異なる列 i と j があって，列 i に長さ 6 の連 SJ,H0,S9,D8,C7,D6 があり，列 j の天は色が赤で数値が Q のカードであるとする．するとまず，列 i から空いているフリーセルに D6 と C7 を移動すると，その後空いている列 k に D8,C7,D6 の 3 枚を移動できる．次に列 i から同様にフリーセルを経由して列 j に SJ,H0,S 9 の 3 枚を移動できる．その後列 k から列 j に同じくフリーセルを経由して D8,C7,D6 の 3 枚を移動できる．

このようにしてこの場合は長さ 6 の連が一度に移動できることになる．一般的には次の定理が成立する．

定理 1　空いているフリーセルと場札の列の数をそれぞれ m, n とする．このとき，場札の列から別の列 j に一度に移動できる連の長さの最大値は，

列 j が空　の　と　き：$2^{n-1}(m+1)$,

列 j が空でないとき：$2^{n}(m+1)$

である．

証明：移動先の列 j が空のときの最大値を $b_{m,n}$，列 j が空でないときの最大値を $c_{m,n}$ とする．列 j が空でないときは，空いている場札の列 n 個すべてをカードの移動のために経由場所として使用できるが，列 j が空のときは経由場所として使用できる列数が 1 だけ減って(n-1)である．よって，次式が成り立つ．

$$b_{m,n} = c_{m,n-1} \qquad (1)$$

また，列 j が空でないときは上の例で示したようにまず空いている列 k に連の一部を移動してその後連の残りを列 j に移動しさらに列 k から列 j に最初に移動しておいて連の一部を移動しなければならない．そうしないと，連の長さが 6 以上の場合は移動できないのはあきらかである．従って，次式が成り立つ．

$$c_{m,n} \leqq b_{m,n} + c_{m,n-1} \qquad (2)$$

この 2 つの関係式より，次の漸化式が成り立つ．

$$c_{m,n} \leqq 2c_{m,n-1} \qquad (3)$$

明らかに，$c_{m,0} = m+1$ なので，

$$c_{m,n} \leqq 2^{n}(m+1) \qquad (4)$$

$$b_{m,n} \leqq 2^{n-1}(m+1) \qquad (5)$$

が成り立つ．等号が成り立つのは次のように手順を構成することができるからである．一般性を失うことなく空いている場札の列を 1,2,...,n とする．(n≧1)

①移動したい連のうち天から $2^{0}(m+1)$枚のカードを，フリーセルを経由して列 1 に移動する．

n=1 の場合は列 1 の(m+1)枚のカードをフリーセルを経由して列 j に移動すれば終了である．

n≧2 の場合は，列 k(k<n)に $2^{k-1}(m+1)$のカードがあると仮定すると，

Ⓚ移動したい連のうち天から $2^{k-1}(m+1)$枚のカードを，フリーセルと列 1～(k-1)を経由して列(k+1)に移動する．その後，列 k の $2^{k-1}(m+1)$枚のカードを，フリー

セルと列 1〜(k-1)を経由して列(k+1)に移動する．
ことができる．よって数学的帰納法によって，移動したい連のうち天から $2^{n-1}(m+1)$枚のカードを列 n に移動できる．最後に，
ⓝ移動したい連のうち天から $2^{n-1}(m+1)$枚のカードを，フリーセルと列 1〜(n-1)を経由して最終目的の列 j に移動する．その後，列 n の $2^{n-1}(m+1)$枚のカードを，フリーセルと列 1〜(n-1)を経由して列 j に移動する．以上によって等号が成立することが示された．
（証明終わり）

従って，例えば m=2,n=2 で移動先の列が空でない場合は，一度に移動できる連の長さの最大値は，$c_{2,2}=2^2\times 3=12$ である．しかし，Windows に付属しているゲームではそのように解釈されていない．（図 2 参照）図 2 の例では，HJ から S2 までの長さ 10 の連を左隣の列（天が CQ）に移動しようとしている．「長さ 9 までしか移動できない」という旨のメッセージが表示される．しかし，上の例で示したように空いている列の一つに H7 から S2 までの長さ 6(=$2^{2-1}3$)の連を移動し，その後 HJ から S8 までを左隣の CQ の上に移動できる．そして H7 から S2 までを S8 の上に移動することによって，「HJ から S2 までの長さ 10 の連を（天が CQ である）左隣の列に移動する」ことは可能である．つまり，Windows に付属しているゲームが表示するメッセージは正しくないといえる．おそらく，$c_{m,n}=(n+1)(m+1)$と誤解しているようである．

「4 人の仲間」では，前節のルール(ii)により一度に移動できる連の長さに制限はない．

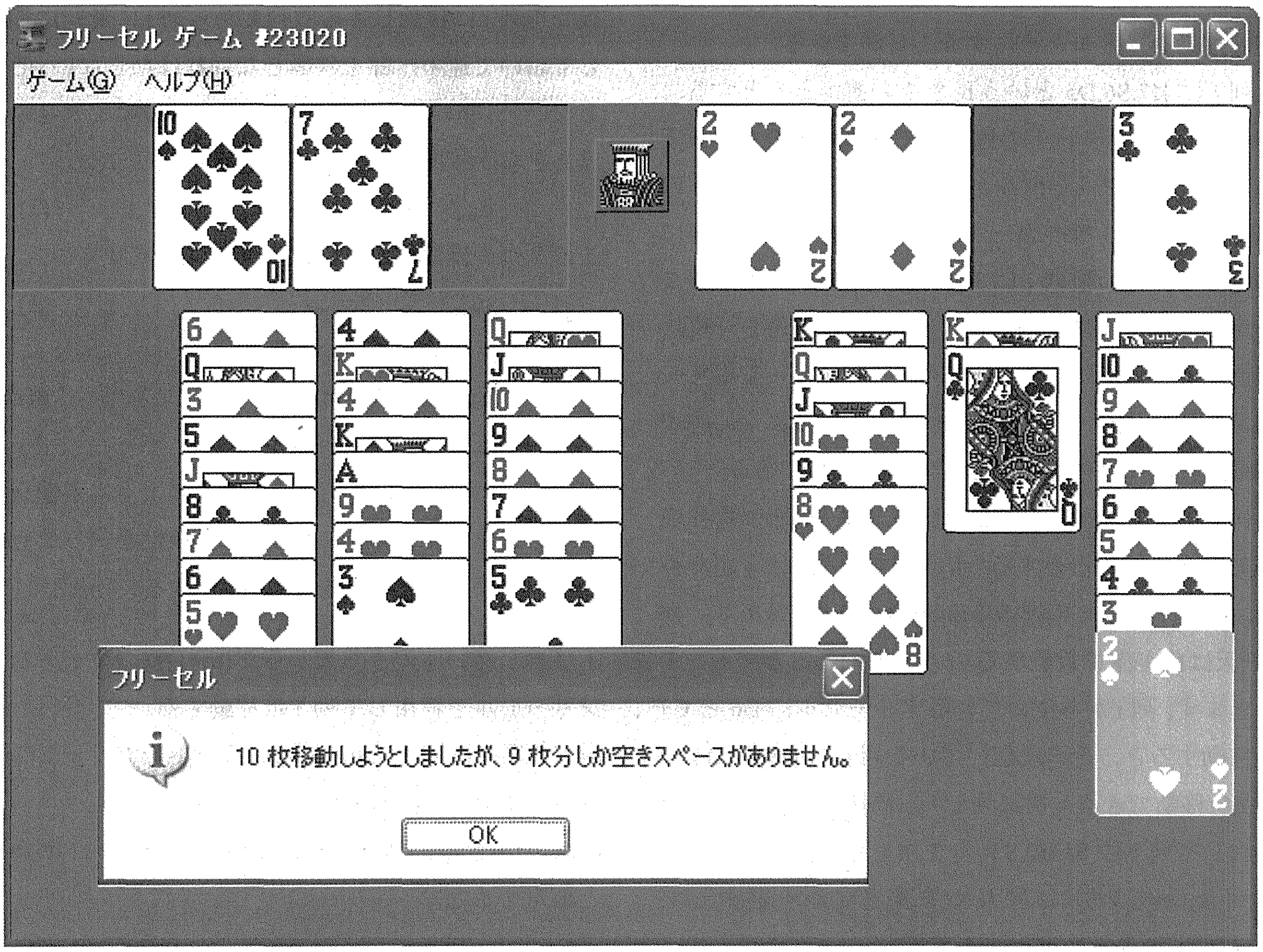


図 2　場札の列を一度に移動する例

2.3　成功が不可能な局面

図 3 に成功が不可能な局面の例を示す．この局面は Windows に付属のゲームで初期局面をゲーム番号を -1 として選択した場合に現れるものである．確かにこの局面では場札の列の天の札をフリーセルに移動することはできるが，それ以上の移動は不可能である．よって,「フリーセル」の成功率は 100%よりは小さい．

3　アルゴリズム

ルールに従って台札と場札を配った状態を初期局面として実行可能なカードの移動を枝に対応させて子局面を作成していくと「フリーセル」のゲームの木を作成することができる．このゲームは完全情報ゲームであり，トランプの一人遊び即ちソリティアの一種なので，筆者がこれまで研究してきた「スーパーパズ」のゲーム木の探索アルゴリズムを使用することができる．文献[3]　プログラムで，子局面を作成する部分と重複局面をチェックする際に使用するパトリシアでの局面に対応する整数を計算する部分をそれぞれ「フリーセル」のルールと局面にあわせて修正すればよい．「フリーセル」では「スーパーパズ」のように同じ局面が繰り返して現れることはないが，異なる手順で同じ局面が生じることはある，また，すぐ後で述べるようにフリーセルや場札の列の位置はそれぞれ交換可能なのでそれらを区別すると子局面の個数が非常に多くなることが考えられる，例えば，図 3 の 8 個の場札の列は 8!=40320 個の見かけは異なるが実質的には同じ局面を表している．

このゲームで，ひとつの局面から生成される子局面

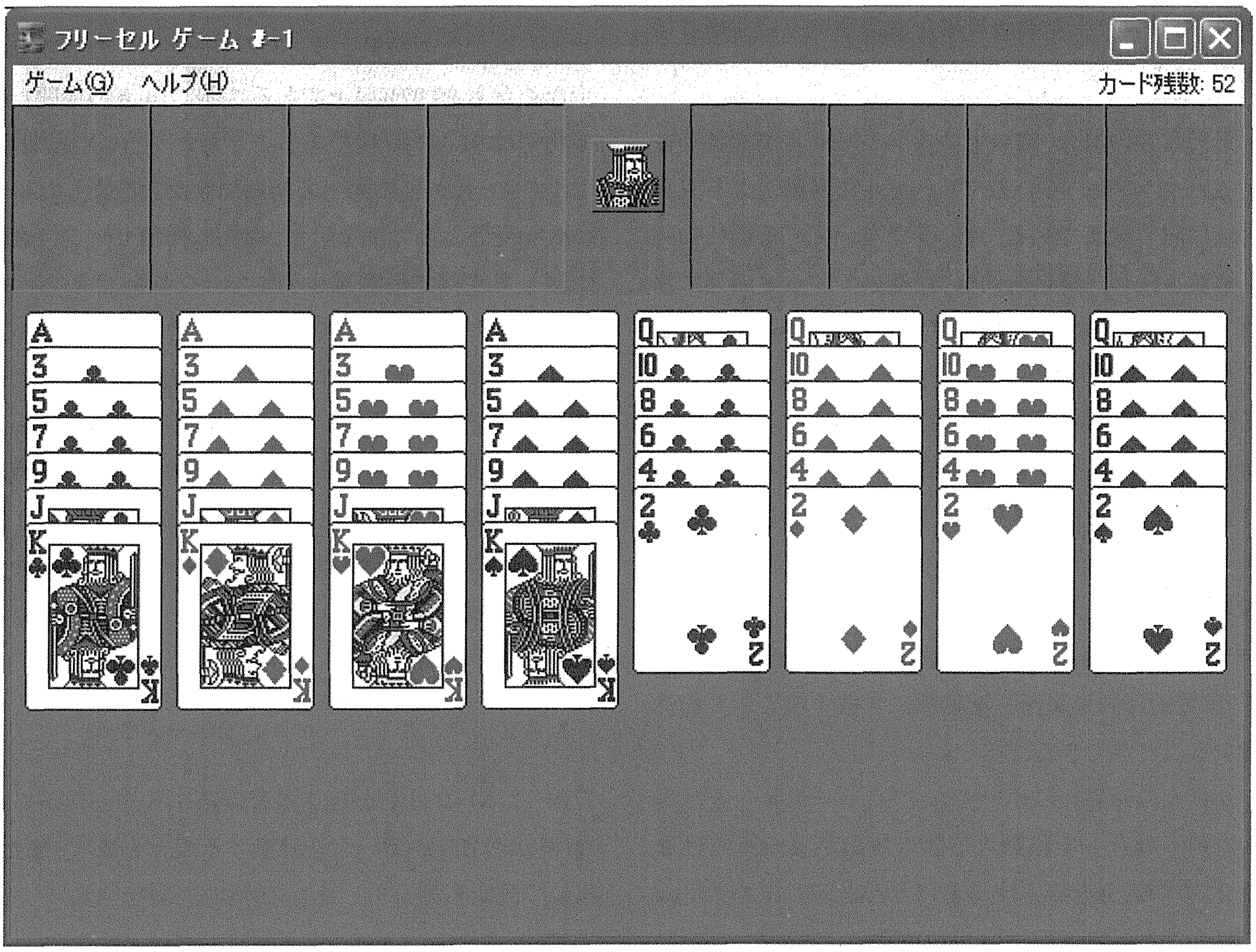


図 3　成功することが不可能な局面の例

の個数は、以下のように考えられる,

①場札から台札:移動箇所は可能な場合スートによって一意的に決まるので、1 個

②フリーセルから台札:①と同じく移動箇所は可能な場合一意的に決まるので、1 個

③場札からフリーセル:空いているフリーセルにはどの天のカードも移動できるので、最大 8×4=32 個

④場札から場札:天のカードが色違いで数値が 1 だけ大きい別の列の天のカードに続くので 2 カ所移動できる可能性がある. しかし, 空のスタックにはどのカードも移動できるので, 7 列空いている場合が最大で 7 個

⑤フリーセルから場札:④と同様に考えるとフリーセルに 4 枚カードがあって場が全部空いている場合に最大 4×8=32 個

ただし③の場合, 空いているフリーセルが複数存在すると, どの空いているフリーセルに移動しても実質的には同じ局面である. ④, ⑤で空いている場札の列が複数存在した場合も同様で, 空いているどの列に移動してもそれらは実質的には同じ局面である. 従って, それらの「実質的に同じ局面」を「異なる局面」として区別して子局面を生成していくとゲーム木全体の局面数が多くなりすぎる可能性がある. よって, 実際のプログラムでは図 1 や次頁の図 4 のように 4 つのフリーセルと 8 列の場札の列は常に昇順に整列した状態を保つようにした. そのことによって, 空いているフリーセルや場札の列が複数存在した場合に生じる『「実質的に同じ局面」を無駄に生成すること』を抑制することができる.

「4 人の仲間」についても,「フリーセル」とは場札の列へカードを移動する際の規則が異なるだけなので, その部分を修正するとほとんど同じプログラムで解くことができる.「4 人の仲間」の場合, ひとつの局面から生成される子局面は,「フリーセル」の場合と比較して, 最大個数は上の①～⑤の場合と同じである. しかし, 空でない場札の列に移動する場合は, 同じスートであることが必要なので, 平均的には「フリーセル」よりも少ないと考えられる. ただし, 空いている列に移動できる「連」の長さの制限はないので, その点では「フリーセル」より多くなる可能性がある. 初期局面では長さが 2 以上の「連」は存在しないことが多いので, 全体的に考えた場合,「4 人の仲間」の方がゲーム木の全局面数は少ないことが予想される.

4 計算結果

実際の計算は, OS が Solaris10, CPU が AMD の Dual Opteron1.8GHz で主記憶 12GB のマシンで実行した. ランダムに発生させた初期局面 4000 個に対する成功数は,

「フリーセル」: 4000
「4 人の仲間」: 3669

であった. この結果より,「フリーセル」の成功率は少なくとも 99.97%以上であること,「4 人の仲間」の成功率は 91.73%程度であることがわかる. 次頁の図 4 に「フリーセル」の図 1 の初期局面から探索した場合の成功局面と手の例を示す. 場札の列がカードの数値に関してすべて単調減少列になっていれば明らかに成功局面に至ることができるので, そのようになった時点で探索を中止するようにしている. 探索には, 単純な深さ優先探索を用いているので, 人間の立場から見ると無駄な動きも見られる. 手順の表示は、成功が確定した局面から初期局面までさかのぼるようになっているので、初手は S1T0 であって第 118 手の 63S0 で成功が確定している.

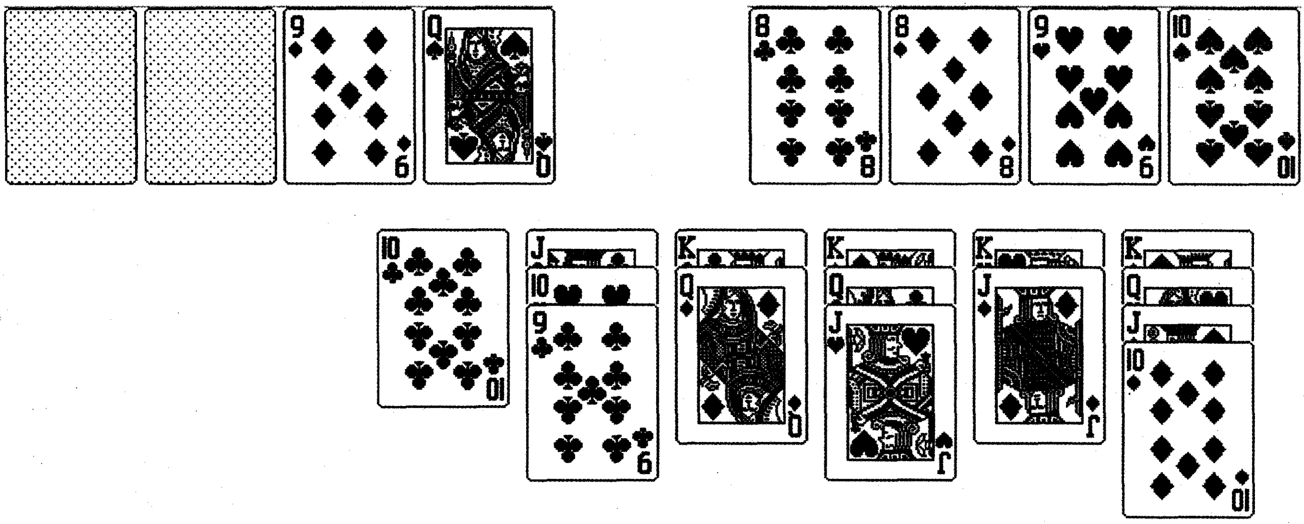
ここで手の表記は、

S:スタック、C:フリーセル、T:ホームセル

であり、S1T0 は左から 2 番目の第 1 スタックから左端(第 0)の台札へカードを移動することを表す. また, 場札の列から列への「連」の移動では例えば,

72S0

のように表記している, これは「第 7 列の長さ 2 の連を第 0 列に移動する」ことを意味する,



```
118 moves, 1385 states searched.
63S0<-S2T2<-S2T0<-S1T1<-S2T1<-S0T1<-11S0<-S6T3<-S7T3<-S7T2<-
C1T2<-S1T3<-S7T3<-S2T0<-S2T2<-S1T3<-S1T2<-11S4<-01S4<-01S5<-
11S0<-S3T3<-S3T2<-S0T3<-S3T3<-S2T3<-S2T3<-21S7<-01S6<-01S7<-
C0T2<-S0T2<-S0C0<-02S4<-C1S0<-S0C0<-42S0<-S0C0<-52S7<-12S7<-
12S5<-11S0<-S5T0<-C2T0<-S0T0<-C0T0<-S0T0<-S0T2<-S0C0<-62S2<-
12S2<-12S6<-02S7<-71S5<-62S1<-22S1<-71S2<-72S6<-11S2<-21S0<-
61S7<-22S1<-21S7<-31S0<-61S0<-S0C0<-72S2<-12S2<-12S7<-11S0<-
S0C0<-34S2<-72S3<-44S5<-22S3<-C3S5<-22S7<-31S0<-61S1<-73S2<-
32S2<-21S0<-52S6<-22S3<-11S0<-51S6<-32S2<-33S7<-11S0<-11S5<-
11S0<-S7T1<-C1T1<-C0T1<-S0T1<-01S5<-S0C0<-11S0<-61S2<-51S0<-
21S1<-11S0<-21S6<-21S1<-22S6<-C2S6<-S6C0<-S0C0<-01S2<-21S5<-
21S0<-S0C0<-43S5<-S0C0<-23S4<-12S2<-S1T1<-S1T0
```

図4　成功が確定した局面と初期局面からの手の列

初期局面から成功が確定する局面に至るまでの平均局面数は，

「フリーセル」：　75358

「4 人の仲間」：　1257

であった．また，成功が確定する局面までの平均の手数（カードの移動枚数）は，

「フリーセル」：　378

「4 人の仲間」：　74

であった．生成される局面数はどちらも「スーパーバズ」の場合と比較するとかなり少ないことがわかる，これは，「フリーセル」や「4 人の仲間」では台札に移動したカードはそれ以上移動しないので，移動可能なカードの数が単調に減少していくためであると考えられる，

5　あとがき

本論文では，ソリティアの一種である，「フリーセル」とその原型であると考えられる「4人の仲間」について，ゲームの性質について考察し，成功率を実際にゲーム木の深さ優先探索を行うプログラムを実行して求めた．その結果，

1) 「フリーセル」の成功率は99.97%以上である
2) 「4人の仲間」の成功率は91.73%程度である

ことを明らかにした．「フリーセル」では4000個の初期局面について失敗は0であり，非常に成功率が高いゲームであることが確認された。それに対して「4人の仲間」の場合は成功率が90%をやや上回る程度であった。この違いはカードの移動に関する規則の違いによるもので，「フリーセル」では赤黒交互の数下がり列であればよいのに対して，「4人の仲間」では同じスートの数下がり列でなければならないことによると考えられる．

また，「フリーセル」の赤黒交互の数下がり列に関して，ひとまとまりにして移動できるカードの最大値が，空いているフリーセルの個数をm，空いている場札の列数をnとすると，

a) 移動先の列が空の場合、

$$2^{n-1}(m+1)$$

b) 移動先の列が空でない場合、

$$2^{n}(m+1)$$

で表されることを示した．これについてはWindowsに付属しているゲームでは，この値が本論文で示したものより n>2 の場合には小さい値であるとされていることも指摘した．

人間がプレイする場合のアルゴリズムは本論文のプログラムのような単純な深さ優先探索ではない．空いている場札の列数が多くなってカードの移動の自由度が増すように，赤黒交互の数下がり列の長さを増すことを優先するのがわかりやすい戦略である．探索をそのような形に修正すれば，無駄な動きを除くことができると考えられる．

参考文献

[1] 小谷ほか，プログラミングシンポジウムとGPCCのゲームとパズル，情報処理学会研究報告，99-GI-1，pp.55-61(1999)

[2] 新谷ほか，カルキュレーションの成功率に関する考察，福山大学工学部紀要，No.29, pp.293-298, (2005)

[3] 新谷，スーパーパズを解くプログラム，第5回ゲームプログラミングワークショップ論文集，IPSJ Symposium Series Vol.99, No.14, pp.84-91(1999)

[4] 野崎，トランプひとり遊び88選，朝日選書416，pp.137-147(1990)