

有限要素法による衝撃波捕獲解析

真鍋 圭司* 中村 弘明** 西尾 正富*

Shock Capturing Analysis by Finite Element Method

Keiji MANABE* Hiroaki NAKAMURA** Masatomi NISHIO*

ABSTRACT

The shock capturing analysis by using FEM (Finite Element Method) is described. The artificial viscosity is necessary for stable calculation to capture the shock wave, but it decreases the accuracy of solution. In this paper, the artificial viscosity is discussed from the viewpoint of SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) method and tensor viscosity. The strain invariant is used in order to judge the region to operate the artificial viscosity. Flowfield around the sphere and cylinder under several Mach numbers are calculated, and good correlation between numerical and experimental results are obtained. The transonic flow can be also simulated by this FEM.

キーワード：数値流体力学，有限要素法，衝撃波，人工粘性

Keywords: CFD, FEM, Shock wave, Artificial viscosity

1. 緒言

数値流体力学 (CFD: Computational Fluid Dynamics) では、流れ場の詳細をコンピューターによって計算することができ、極超音速流の衝撃波計算に対しても有効である。衝撃波を計算する衝撃波捕獲法は、物理量の変化の大きい部分として、衝撃波の位置が計算結果として求まる。しかし、不連続に伴う計算のため計算が不安定になりやすい。

著者らは有限要素法 (FEM: Finite Element Method) による圧縮性流体の新たな定式を示し、極超音速流の解析を行った。そして、放電発光法による可視化実験結果と比較し、この計算手法が衝撃波解析に有効であることを示した [1]。

FEM により衝撃波捕獲解析を行うには、SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) 法や人工粘性などの計算安定化処理が必要である。本報

告では、FEM による衝撃波捕獲法の解の人工粘性について考察し、2, 3 の計算結果を示す。

2. 基礎的定式化

2.1 保存形の基礎式

まず、人工粘性と FEM の SUPG 法について考察を加える。衝撃波解析においては圧縮性流体の基礎式を、質量、運動量、エネルギーの保存を一まとめにして次の形で表示される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = \frac{\partial G_k}{\partial x_k} \dots \dots \dots (1)$$

この式では、物理量は微分演算子の中に入れており、保存形と言われる。なお、添字には総和規約を使用している。

U は未知数ベクトルである。また、通常の圧縮性流体解析と異なり、 F_k において圧力項を分離した定

*機械システム工学科 **設計生産工学専攻

式を用い、その有効性を示した[1]。その場合、 F_k は次式で表示できる。

$$F_k = v_k U \quad \dots \dots \dots (2)$$

v_k は速度ベクトルである。この定式では、圧力は G_i に含めるため、通常定式のように粘性応力（偏差応力）として扱わず、圧力も含めた応力として扱うが、詳細については省略する。

2. 2 人工粘性の付加

計算の振動を防ぎ、安定した計算のため、式(1)に人工粘性を次のように付加する。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = \frac{\partial G_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[v_{kl} \frac{\partial U}{\partial x_l} \right] \dots \dots (3)$$

この人工粘性に関する係数 v_{kl} は次式で定義する。

$$v_{kl} = \alpha v_k v_l + \beta \delta_{kl} \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 α 、 β は定数であり、また δ_{kl} はクロネッカデルタである。この式の右辺第一項は、流れの上流化に関して流れ方向の異方性を表し、tensor viscosity と言われる[2]。また、右辺の第二項は等方的な拡散を表す。

2. 3 FEMによる離散化

次に、FEMの基本原則である重み付残差法による定式を示す。式(3)に重み w を乗じ、解析領域で積分する。Gaussの発散定理を用いて部分積分すると、最終的に次式になる。この部分積分が、差分法や有限体積法にはないFEMの特徴であり、これによって微分の階数を減らすことができる。

$$\begin{aligned} & \int_V w \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_V w \frac{\partial F_k}{\partial x_k} dV \\ &= - \int_V \frac{\partial w}{\partial x_k} G_k dV - \int_V \frac{\partial w}{\partial x_k} \left[v_{kl} \frac{\partial U}{\partial x_l} \right] dV \dots \dots (5) \\ &+ \int_S w G_k n_k dS \end{aligned}$$

ここで、 n_k は表面 S の外向き単位ベクトルであり、この表面においては、 $G_k n_k$ が与えられているものとする。

式(5)の右辺第2項は、式(4)を用いて整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial w}{\partial x_k} \left[v_{kl} \frac{\partial U}{\partial x_l} \right] dV \\ &= \int_V \alpha \frac{\partial w}{\partial x_k} v_k v_l \frac{\partial U}{\partial x_l} dV + \int_V \beta \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_k} dV \\ &\approx \int_V \alpha v_k \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial F_l}{\partial x_l} dV + \int_V \beta \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_k} dV \quad \dots \dots (6) \end{aligned}$$

ここでは式(2)、および $v_{kl}=0$ の近似を行った。従って、式(5)は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \int_V w \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_V w \frac{\partial F_k}{\partial x_k} dV \\ &= - \int_V \frac{\partial w}{\partial x_k} G_k dV - \int_V \beta \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_k} dV \dots \dots (7) \\ &+ \int_S w G_k n_k dS \end{aligned}$$

ここで、移流項にかかる重みを W で表したが、これは具体的には、

$$W = w + \alpha v_k \frac{\partial w}{\partial x_k} \quad \dots \dots \dots (8)$$

となる。この重み W の式はSUPG法そのものである。従って、SUPG法は、式(4)の α の異方性を示す項に対応することがわかる。

2. 4 2次精度の時間積分

次に時間積分について考える。いま、変数 U を時間 t に関して2次の項までTaylor展開する。

$$U(t + \Delta t) \approx U(t) + \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} (\Delta t)^2 \quad \dots \dots \dots (9)$$

次に、式(1)の右辺を移流項に比較して無視できるものとし、時間微分と空間微分に次の関係を仮定する。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = - \frac{\partial v_k U}{\partial x_k} \quad \dots \dots \dots (10)$$

これを用い、 v_k を要素内で一定とすれば、次のように式変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\partial v_k U}{\partial x_k} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\frac{\partial v_k U}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_l} (v_k v_l U) \right] \end{aligned} \quad \dots \dots (11)$$

従って、式(9)の時間に関して2次精度の項を考えることは、 $\alpha = \Delta t/2$ とおき、人工粘性を加えることと等しい。すなわち、SUPG法において $\alpha = \Delta t/2$ と置けば、時間に関して2次精度の計算を行っていることになる。これは差分法におけるLax-Wendroff法に対応する処理である。

以上の定式は多少の近似を含むが、このような定式化が可能なのは、式(2)の関係があるためであり、筆者らの提案した圧力を分離した手法により衝撃波の妥当な計算が可能である理由がここにもある。

式(3)の β に関する人工粘性項は、本来は存在しない項であるが、これを0とすると解が振動してしまう。そこで、衝撃波のような変化の急峻な個所のみこの項が働くようにすれば、衝撃波以外の部分では人工粘性による影響を除去できると考えられる。そこで本研究では β を次式で計算した。

$$\beta = \beta' \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)} \Delta t \quad \dots \dots (12)$$

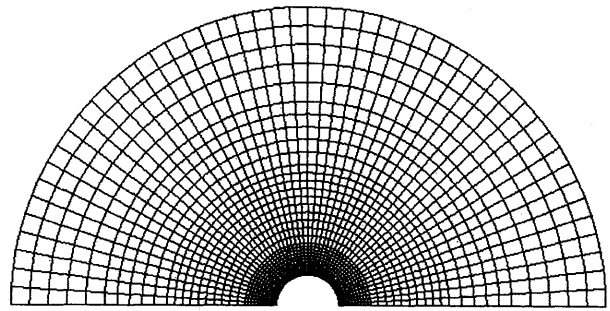
すなわち、ひずみの2次不変量で変形の程度を判断し、それが大きい所に人工粘性を作用させる。

以上で示した定式は、直交座標による2及び3次元問題の定式であるが、軸対称問題の場合は2次元問題の定式にさらに付加する項[1]が必要であるが、ここでは省略する。

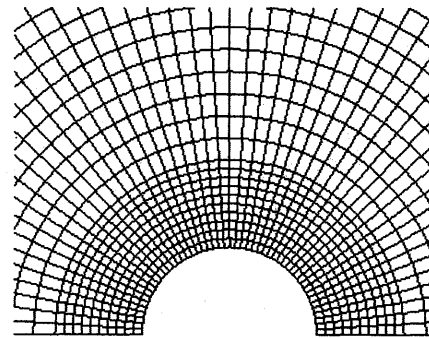
3. 計算結果

3.1 計算モデル

以上により、著者らが開発したFEMによる解析手法の有効性をSUPG法との関係で示した。マッハ10のカプセル周りの流れ場については、放電発光法の実験結果と比較することにより、本手法が有効であることを示した[1]。この計算は、非常に細かいメッシュを使ったため、実験結果とほぼ一致した解が得られた。FEMによる本手法を用いればマッハ10以外のマッハ数の計算や、任意の物体周りの流れを計算できる。加えて粗いメッシュで精度よい計算ができ



(a)全体図



(b) 円の周りのメッシュの詳細

図1 計算メッシュ例

れば望ましい。

そこで本報告では、幅広いマッハ数の流れ場について、円柱および球の周りの流れ場を解析する。文献[3]には実験結果が示されているから、その実験結果と比較することによって計算手法を検討する。

計算条件は福山大学に設置されている風洞と同じ条件で、一様流密度 $\rho_\infty = 4.5 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ 、温度 $T_\infty = 54\text{K}$ とした。一様流速度 $V_\infty = 150\text{m/s}$ のときマッハ1であり、速度を変化させてマッハ2~8の間で計算を行った。

3.2 β' の変化による衝撃波捕獲解析

計算モデルは対称性を考慮し、上半分の半円の周りを要素分割し、節点数1581、要素数1500の比較的粗いモデルを使用した。物体まわりのメッシュを図1に示す。なおモデルの直径は60mmである。図1(a)が全体のメッシュであり、図(b)が物体付近の拡大図である。

Δt はCFL条件を満たすように決定し、2000ステップの計算を行った。Fortranでプログラムを作成したが、このモデルは要素数が少ないため、Windows XPのOSのパーソナルコンピュータで1分以内で計算が終了する。

人工粘性を、衝撃波内部のような流れが急激に変化する所にのみかかるよう式(12)のひずみ不変量を

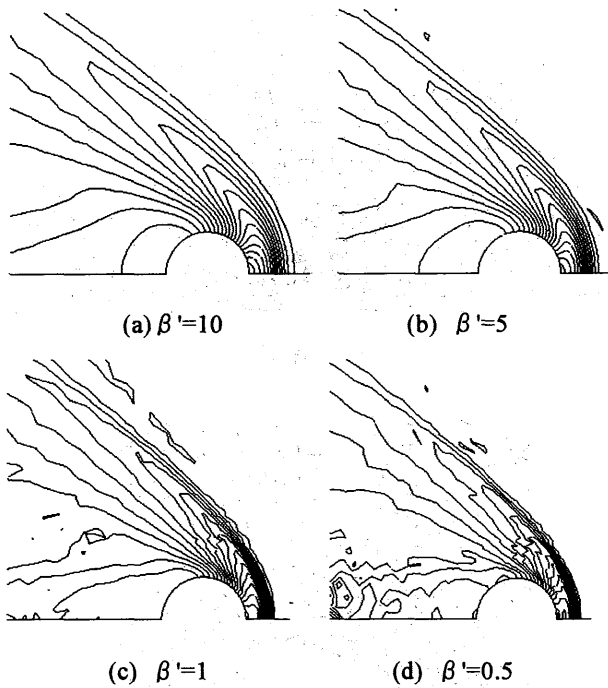


図2 β' の変化による衝撃波捕獲の変化 (M=2)

用いる。式(12)で β' を変化させ、衝撃波がどれほど鋭く捕獲できるかをテスト計算した。時間的に2次精度を保つため、 $\alpha = \Delta t/2$ と置いたSUPG法を用いた。計算は軸対称である球とし、マッハ2の場合を計算した。なお、壁面上は固定条件とした。

式(12)の Δt はCFL時間として固定し、 β' を10, 5, 1, 0.5と4通りに変化させた場合の衝撃波捕獲計算の結果を図2に示す。なお、ひずみが大きく β が0.5を超えると $\beta=0.5$ とし、また β が0.03以下の場合 $\beta=0$ とした。図2は密度の最大値と最小値の間に20本の等密度線を引いた結果である。

図2から β' が小さくなるに伴い、衝撃波が鋭く捕獲されていることがわかる。また、 β' が小さくなるに伴い、衝撃波位置は、球の近くの側に収束してゆくことがわかる。図1の有限要素メッシュを対応させると、衝撃波の幅は要素1つの幅まで小さくできることがわかる。

しかし、 β' が大きい場合は等密度線が滑らかであるのに対し、 β' が小さくなるに伴い、密度線が滑らかでなくなり、計算が不安定になってゆく傾向が認められる。 β' にさらに小さい値を用いると計算が発散した。適当な β' を決定する何らかの手法の開発が今後の課題である。

3.3 マッハ数による衝撃波の変化

マッハ数の変化により、物体と衝撃波の距離、すなわち衝撃波離脱距離がどのように変化するかを

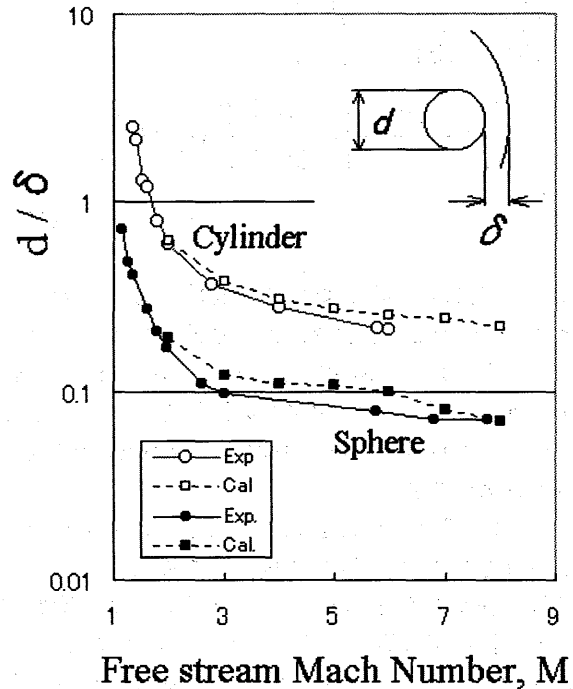


図3 衝撃波離脱距離とマッハ数の関係

円柱および球について調べた。その結果を図3に示す。この図は、 $\alpha = \Delta t$ とし、また $\beta' = 1$ としたときの計算例である。図2より、衝撃は物体に近い位置に収束することがわかったため、物体に最も近い側を衝撃波離脱距離とした。

マッハ数が大きくなるにつれ、衝撃波離脱距離が小さくなる傾向が計算されている。また、2次元の円柱周りの流れに比べ、球周りの流れの方が衝撃波離脱距離が小さい。文献による実験値[3]も同図に示すが、計算結果は実験結果とよく対応していると言える。これらの計算は前述の比較的粗いメッシュで行ったが、メッシュを細かくすれば、さらにより結果が得られると考えられる。

3.4 遷音速流の計算

次に、マッハ数が1よりわずかに小さい遷音速流に対して計算を行った。この問題は、局所的に超音速となるため、例えば翼型モデルの場合、衝撃波が物体表面から生ずる。そこで、翼型に類似した楕円モデルで計算を行った。図4に迎角が5度の楕円体まわりの、マッハ0.8の計算結果を示す。この楕円モデルは長軸が220mm、短軸が20mmである。2次元モデルとし、楕円周りを節点数3990、要素数3885の要素分割である。

この計算は安定した計算が困難であり、前述のよ

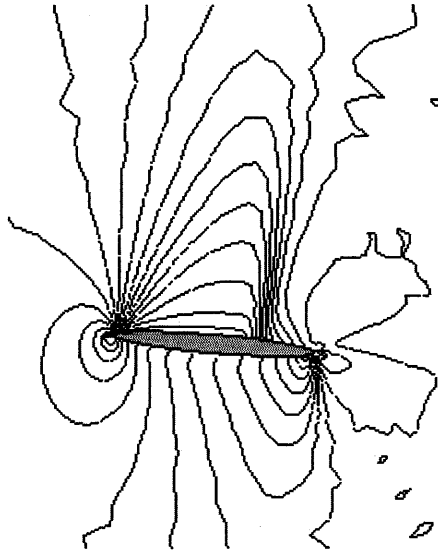


図4 楕円体周りの遷音速流の解析例
($M=0.8$)

うにはひずみによって β を変化させる方法では、滑らかな解が得られなかった。そこで人工粘性 β' を解析領域全体に対して等しく0.1と置いた。なお、 $\alpha = \Delta t/2$ とした。また壁面上はすべり条件を与え、インパルススタートにより計算を行った。なお時間増分は、CFL条件により Δt を設定し、10000ステップ計算した。

図4は図2と同様、密度の最大値と最小値の間に20本の等密度線を引いたものである。図から、楕円体の物体の上面から衝撃波が生じていることがわかる。従ってFEMによる本解析手法により、遷音速の計算も可能ではあるが、計算安定化や、衝撃波を鋭く捕獲するには、さらに工夫が必要である。

さらにマッハ数の低い亜音速の流れに対しては、計算結果が非現実的にあることも多かった。これは亜音速では密度、温度とも変化が小さく、気体の状態方程式による圧力の計算が妥当に作用しないものと思われる。従ってマッハ1以下の流れでは、非圧縮性流体の基礎式によって計算する方が効率がよいと言える。

4. 結言

本研究の成果を以下にまとめる。

- (1) 圧縮性流れの解析において、圧力項を移流項より分離して定式化するFEMを以前に提案したが、その定式においてSUPG法を用いる場合、係数を $1/2\Delta t$ に選べば時間積分について2次精度になる。
- (2) 衝撃波付近の物理量の急激に変化する場所をひずみの2次不変量から判断し、そこのみ人工粘性が作用させた。その場合、作用する人工粘性が小さいほど衝撃波が鋭く捕獲でき、物体に近い側に収束する。しかし、小さい値にしすぎると計算が発散するため、適当な値の決定には試行錯誤が必要である。
- (3) 円柱および球周りの流れに関し、マッハ数を変化させてFEM計算を行った。衝撃波離脱距離とマッハ数の関係は、計算値と実験値はよい対応が認められた。
- (4) このFEMにより人工粘性を全域に与えれば、遷音速流の計算も可能であった。一方、音速以下の流れの計算は、本手法では計算が不安定になりやすい。その場合は非圧縮近似による定式化が必要と考えられる。

参考文献

- [1] 西尾正富, 真鍋圭司, 中村弘明, 瀬崎新士: 超音速/極超音速流れの新しい計算手法, 日本航空宇宙学会論文集. 51, pp.683-689, (2003).
- [2] 棚橋隆彦: 流れの有限要素法解析II, 朝倉書店, pp.208, (1997).
- [3] H.W. Liepmann and A. Roshko, Elements of gasdynamics, John Willy & Sons, Inc.(1956), p.105.