福山大学工学部紀要
第29巻 2005年12月

カルキュレーションの成功率に関する考察

新谷 敏朗* 南崎 好律**

Consideration on the Rate of Success of Calculation

Toshio Shintani* and Yoshinori Nanzaki**

ABSTRACT

Calculation is a solitaire game with one deck of cards. The game is played with 3 or 4 stacks and with no card or 4 cards in the foundation. It is more difficult to solve with 3 stacks than with 4 stacks. The rate of success is about 60% with 3 stacks and without foundation when human expert plays the game. The theoretical upper limit for the success rate has not been found. In this paper, we suppose that the success rate of the game increases as the number of the cards in the foundation increases. By using a program to play calculation on personal computers, we confirmed that assumption. The upper limit of the rate of success is estimated as about 72 % with 3 stacks and without foundation.

キーワード:トランプ, カルキュレーション, 理論的成功率, 台札
Key words : Card game, Calculation, Theoretical Rate of success, Foundation

1. まえがき

カルキュレーションはトランプの一人遊びの一種であり，情報処理学会プログラミングシンポジウムのGPCC[1]でたびたび取り上げられてきた．カードの待避場所である「スタック」の台数（3あるいは4），あるいは最初に場に出しておく台札の列数（0,1,2のいずれか）によりいくつかの変形版が存在する．初期状態によって必ず失敗する場合が存在するが，運に左右されることは少なく，スタックへの積み方などの戦略によって成功率が大きく変わるゲームである．人間の熟練者では台札なしの場合スタックを4台とすると95%,3台とすると60%程度の成功率であるといわれている．最近の研究で，田中哲朗氏のプログラムはスタック4台の場合に約99%，3台の場合に約72%（どちらも台札なし）という成果をあげている．[2] しかし，理論的な成功率についてはまだ明らかになっていない．本論文では，カルキュレーションにおいて台札の列数を多くした場合について理論的に考察して，成功率に関する基本的な性質を明らかにした．さらに筆者らがこれまで作成してきた，カルキュレーションをパソコンレベルの計算機でプレイさせるプログラム[3]を使用して，台札の列数を多くした場合の成功率を実験的に計算した．その結果，人間によるプレイの経験からある程度予想できることではあるが，台札の列数が増えるに従って成功率が上がることを確認した．そして計算の精度が比較的高いと考えられる台札の列数が大きい部分の計算結果から外挿することによって，台札なしでスタックを3台使用した場合の理論的な成功率が 72%程度であるという結果を得たことを報告する．

*情報処理工学科 **大学院情報処理工学専攻

2. ルール

(1) 52 枚のカードをシャッフルして伏せて置く．これを山と呼ぶ．

(2) 山からカードを 1 枚引く．

(3) 引いたカードの値に従って，テーブルと呼ばれる 4 つの場所に図 1 のような順序に従って置いていく．(左から右に)

(4) (3)で，山から引いたカードが 4 つのテーブルのどれについても次に置くべきカードでない場合，一時的な避難場所としてスタックに積むことができる．スタックの個数は 3 または 4 のどちらかである．山から引いたカードがすぐにテーブルに置くことができる場合でもそのカードをスタックに積んでよい．

テーブル 1：	A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K
テーブル 2：	2 4 6 8 10 Q A 3 5 7 9 J K
テーブル 3：	3 6 9 Q 2 5 8 J A 4 7 10 K
テーブル 4：	4 8 Q 3 7 J 2 6 10 A 5 9 K

図 1 カルキュレーションのテーブル配置

(5) スタックトップのカードが 4 つのテーブルのどれかについて次に置くべきカードならば，そのテーブルに移動してもよい．

(6) (2)〜(5)の動作を繰り返して，52 枚のカードをすべてテーブルに置くことができれば成功である．山のカードがなくなった後で，スタックトップの 4 枚のカードのどれもテーブルへ移動させることができなければ失敗である．

このゲームはカードのスートは意味を持たずカードの値(A,2,3,...,9,10,J,Q,K)のみが意味を持つ．なお以後本論文においてスタックは Z, X, C, V の 4 台とし，3 台の場合はそのうち，Z, X, C を使うことにする．

これがカルキュレーションの基本的なルールである．変形版では，各テーブルの最初の 1 あるいは 2 枚のカードを置いた状態（それ以外のカードをシャッフルして山とする）から始める．文献[4]によると，スタックを 4 台使い，台札の列数が 1 の場合（図 1 の左端の 4 枚のカードが置かれた状態から始める）が「カルキュレーション」あるいは「計算」と呼ばれている．このほかに変形版として，台札なしでスタックが 4 台の場合に「コンピュータ」，台札の列数が 1 でスタックが 3 台の場合に「超人」という名称が使われている．さらに，台札の列数が 2（図 1 の左端 2 列の 8 枚のカードが置かれた状態から始める）でスタックが 4 台の場合は「ベスティ・ロス」と呼ばれている．GPCC においては，台札はなしでスタックの台数が 3 と 4 の場合を総称して「カルキュレーション」と呼んでいる．

3. ゲームの成功率に関する考察

このゲームにおいて台札の列数を n とし，スタックの台数を m とする．前節の定義によると「カルキュレーション」は $n=1, m=4$ の場合，「コンピュータ」が $n=0, m=4$ の場合，「超人」が $n=1, m=3$ の場合，「ベスティ・ロス」は $n=2, m=4$ の場合ということになる．本論文では，$n=0,1,2,\ldots,12$, $m=3,4$ の場合を考えることにする．するとすぐに次の補題が成り立つことがわかる．

補題 1　$m=3$ の場合は，$n \geqq 9$ であれば，また $m=4$ の場合は，$n \geqq 8$ であれば，山のカードの並び方に関係なく成功することができる．

証明　$m=3, n=9$ の場合を考える．$n=9$ なので，第 1 列から第 9 列までは既にテーブルに置かれている．次のように列ごとにカードに対して操作を割り当てる．

第 13 列のカード(4 枚の K)：スタック Z に積む．
第 12 列のカード(Q, J, 10, 9)：スタック X に積む．
第 11 列のカード(10, 9, 7, 5)：スタック C に積む．
第 10 列のカード(9, 7, 4, A)：テーブルに置く．

こうすると，16 枚の山のカードを引き終わった時点で第 10 列までのカードはテーブルに置かれ，第 11 列から第 13 列までのカードは列ごとに別々のスタックに積まれている．よってスタック C に積まれている第 11 列のカードをテーブルに移動することができる．第 12 列と第 13 列のカードも同様にテーブルに移動することができる．A, 4, J と Q 以外のカード(5, 7, 9, 10, K)は山に複数枚存在するので上の操作の割り当ては一意的には決まらないが，その割り当て方は明らかに任意でよい．$m=4$ の場合は第 10 列のカードをスタック V に積み，第 9 列のカードをテーブルに置けばよい．

補題 1 は $m=3$ の場合は，$n \geqq 9$ であれば，また $m=4$ の場

合は，n≧8 であれば，理論的成功率が 100%であることを意味する．しかし，m=3 の場合は，n≦8 であれば，また m=4 の場合は，n≦7 であれば，成功することが不可能な山のカードの並びが存在することが知られている．

補題 2　n=7 の場合はカルキュレーションの理論的成功率は 100%未満である．

証明　山のカードが次のような並びで引かれたとする．

9, 9, 9, 10, 10, 10, J, J, J, Q, K, K, K, K

テーブル 1 に着目すると，第 8 列の 8 がまだ置かれていないので，これらのカード(9 から K まで)はすべてスタックに積む必要がある．この場合他のテーブルについても 10 をテーブル 4 に置くことはできるがそれ以外のカードはスタックに積む必要がある．かつ引いた順序が 9, 10, J, Q, K の順なのでそれぞれを同じスタックに積むと文献[3]で定義した単純なデッドロックが生じて失敗する．従って，それら 5 種類のカードを別々のスタックに積む必要がある．しかしスタックは 4 または 3 台しかないのでそれは不可能である．

スタックの台数 m を 3 または 4 に限定しない場合，補題 2 を一般化すると次の定理が成り立つ．

定理 1　カルキュレーションの理論的成功率が 100%であるための必要十分条件は台札の列数を n として(12-n)台以上のスタックを使用できることである．

証明　n=12 の場合はスタックを使わずに常に成功することは自明なので，0≦n≦11 とする．

まず十分条件について考える．次のように列ごとにカードに対して操作を割り当てる．列番号を k として，

n+2≦k≦13 の場合

第 k 列のカードを第(k-1)番のスタックに積む．

k=n+1 の場合

テーブルに置く．

第 n 列までは既にテーブルに置かれているので第 n+1 列のカードはテーブルに置くことができる．第 n+2 列以降の 13-(n+2)+1=12-n 列については(12-n)台のスタックを使えるので，列ごとに別々のスタックに積むことができる．よって補題 1 と同様に必ず成功する．

次に必要条件について考える．(12-n)台未満のスタックしか使うことができない場合に必ず失敗する山のカードの並びの例を挙げればよい．n=0（台札なし）の場合ではスタックを 11 台しか使えないとして，山のカードが次のような並びで引かれたとする．

2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6,7,7,7,7,8,8,8,8,
9,9,9,9,10, 10,10,10,J,J,J, J,Q,Q,Q,Q,K,K,K,K

テーブル 1 に着目すると，左端の A がまだ置かれていないので，これらのカードのうち 2 から K までの 12 種類について各々1 枚はスタックに積む必要がある．かつ引いた順序が 2,3,...9,10,J,Q,K の順なのでそれらのどの 2 種類も同じスタックに積むと単純なデッドロックが生じて失敗する．従って，それら 12 種類のカードを別々のスタックに積む必要がある．しかしスタックは 11 台しかないのでそれは不可能である．n≧1 の場合は，2 ではなく n+2 から始まる n=0 の場合と同様な山のカードの並びを考えることにより(12-n)より少ない台数のスタックでは必ず失敗する例を挙げることができる．

通常カルキュレーションはスタックの台数 m=4 または 3 でプレイするので，台札の列数 n が 7 以下の場合は定理 1 より理論的成功率は 100%より小さい．かつ，補題 1 より n≧9 の場合には理論的成功率は 100%である．これらのことと人間によるプレイの経験より，「カルキュレーションの理論的成功率は台札の列数 n に関して単調増加である」という推測ができる．

4.　計算結果

前節の推測を確かめるために文献[3]のプログラムを n=0 から n=10 まで適用して成功率を調べた．その際 n≧1 の場合には台札として置くべきカードを山の先頭に配置して残りのカードを疑似乱数によってシャッフルして得られた 10000 個の山データを使用した．例えば，n=2 の場合には，山の最初の 8 個のカードが，

A, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 8,

となっている．そしてそれらの台札とすべきカードがまずテーブルに置かれるようするために文献[3]の優先順位表を「テーブルに置く操作を最も高い優先順位にする」ように変更して適用した．本論文で使用した優先順位表を表 1 と表 2 に示す．n によって条件を変えないために n=0 から n=10 まで同じ優先順位表を用いた．

表 1　カードごとの操作に対する優先順位表
(スタックを 4 台使用する場合のもの)

A: T1 T2 T3 T4 N4 N3 N2 N1 X4 X3 Z2 C4 C3 X2 Z4 Z3 C2 V4 V3 V2
2: T2 T1 T3 T4 N4 N3 N1 N2 Z4 Z3 Z1 X4 X3 X1 C4 C3 C1 V4 V3 V1
3: T3 T1 T4 T2 N2 N4 N1 N3 Z2 Z4 Z1 X2 X4 X1 C2 C4 C1 V2 V4 V1
4: T4 T2 T1 T3 N3 N1 N2 N4 X3 Z1 Z2 C3 X1 X2 Z3 C1 C2 V3 V1 V2
5: T1 T3 T2 T4 N4 N2 N3 N1 X4 X2 Z3 Z1 C4 C2 X3 X1 Z4 Z2 C3 C1 V4 V2 V1 V3
6: T3 T2 T1 T4 N4 N1 N2 N3 Z4 Z1 Z2 Z3 X4 X1 X2 X3 C4 C1 C2 C3 V4 V2 V1 V3
7: T4 T1 T2 T3 N3 N2 N1 N4 X3 X2 Z1 Z4 C3 C2 X1 X4 Z3 Z2 C1 C4 V3 V2 V1 V4
8: T4 T2 T3 T1 N1 N3 N2 N4 Z1 Z3 Z2 Z4 X1 X3 X2 X4 C1 C3 C2 C4 V1 V3 V2 V4
9: T3 T1 T2 T4 N4 C4 N2 N1 N3 X2 X1 Z3 X4 C2 C1 X3 Z4 Z2 Z1 C3 V4 V2 V1 V3
10: T2 T4 T1 T3 N3 C3 N4 N1 N2 X1 X4 Z2 X3 C1 C4 X2 Z3 Z1 Z4 C2 V3 V1 V4 V2
J: T4 T3 T1 T2 N2 C2 N4 N1 N3 X1 X3 Z4 X2 C1 V3 X4 Z2 Z1 C3 C4 V2 V1 C3 V4
Q: T4 T3 T2 T1 N1 C1 N2 N3 N4 Z2 Z3 Z4 X1 X2 X3 X4 V1 C2 C3 C4 Z1 V2 V3 V4
K: V3 V1 V4 V2 T1 T2 T3 T4

表 2　カードごとの操作に対する優先順位表
(スタックを 3 台使用する場合のもの)

A: T1 T2 T3 T4 N4 N3 N2 N1 X4 X3 Z2 C4 C3 X2 Z4 Z3 C2
2: T2 T1 T3 T4 N4 N3 N1 N2 Z4 Z3 Z1 X4 X3 X1 C4 C3 C1
3: T3 T1 T4 T2 N2 N4 N1 N3 Z2 Z4 Z1 X2 X4 X1 C2 C4 C1
4: T4 T2 T1 T3 N3 N1 N2 N4 X3 Z1 Z2 C3 X1 X2 Z3 C1 C2
5: T1 T3 T2 T4 N4 N2 N3 N1 X4 X2 Z3 Z1 C4 C2 X3 X1 Z4 Z2 C3 C1
6: T3 T2 T1 T4 N4 N1 N2 N3 Z4 Z1 Z2 Z3 X4 X1 X2 X3 C4 C1 C2 C3 c4 c1 c2 c3
7: T4 T1 T2 T3 N3 N2 N1 N4 X3 X2 Z1 Z4 C3 C2 X1 X4 Z3 Z2 C1 C4 c3 c2 c1 c4
8: T4 T2 T3 T1 N1 N3 N2 N4 Z1 Z3 Z2 Z4 X1 X3 X2 X4 C1 C3 C2 C4 c1 c3 c2 c4
9: T3 T1 T2 T4 N4 C4 N2 N1 N3 X2 X1 Z3 X4 C2 C1 X3 Z4 Z2 Z1 C3 c4 c2 c1 c3
10: T2 T4 T1 T3 N3 C3 N4 N1 N2 X1 X4 Z2 X3 C1 C4 X2 Z3 Z1 Z4 C2 c3 c1 c2 c4
J: T4 T3 T1 T2 N2 C2 N4 N1 N3 X1 Z3 Z4 X2 C1 X3 X4 Z2 Z1 C3 C4 c2 c1 c3 c4
Q: T4 T3 T2 T1 N1 C1 N2 N3 N4 Z2 Z3 Z4 X1 X2 X3 X4 Z1 C2 C3 C4 c1 c2 c3 c4
K: C1 C2 C3 C4 T1 T2 T3 T4 X1 X2 X3 X4 Z1 Z2 Z3 Z4

表1と表2では，次のような表記法を採用している．[3]まず，x = 1, 2, 3, 4 によって4台のテーブルを表す．S = C, X, V によって3台のスタックを表す．そして，テーブルに置くことはTによって表す．

（操作の表記法）

Tx：そのカードをテーブルxに置く．

Sx：そのカードをテーブルxに移動する予定でスタックSに積む．

Nx：そのカードをテーブルxに移動する予定で並べ積みを行う．

cx：デッドロックと判定されてもそのカードをテーブルxに移動する予定でスタックCに積む．

文献[3]のプログラムを表1と表2の優先順位表を適用して，台札の列数 n=0～8 までについてそれぞれ疑似乱数を用いて作成した10000個の山データについて実行したところ，表3のような結果が得られた．

表3の数値は10000個の山データに対する成功数である．なお，n≧9 の場合はスタックの台数が3,4いずれの場合もすべて成功した．これは第3節の考察から当然の結果なので表には記載していない．表3を図示すると図2のようになる．前節で予測したように成功率は台札の列数に対して単調に増加している．図2から，n=0 と n=1 の場合の値が n≧2 の場合の値に比べてかなり低いことがわかる．これは本論文で計算のために用いた文献[3]のプログラムに改良の余地がかなりあることを示唆している．n≧2 の場合は理論値に比較的近いと仮定して，2≦n≦8 の値から線形近似で外挿すると図3が得られる．図3によると，カルキュレーションの成功率はスタック3台で台札なしの場合72%，スタック4台で台札なしの場合98%程度になる．

表3　台札の列数とスタックの台数を変えて実行した試行の結果（10000回のうちの成功数）

スタックの台数 ＼ 台札の列数	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	8826	9120	9876	9865	9841	9991	10000	10000	10000
3	5521	6513	7890	8327	8592	9121	9493	9893	10000

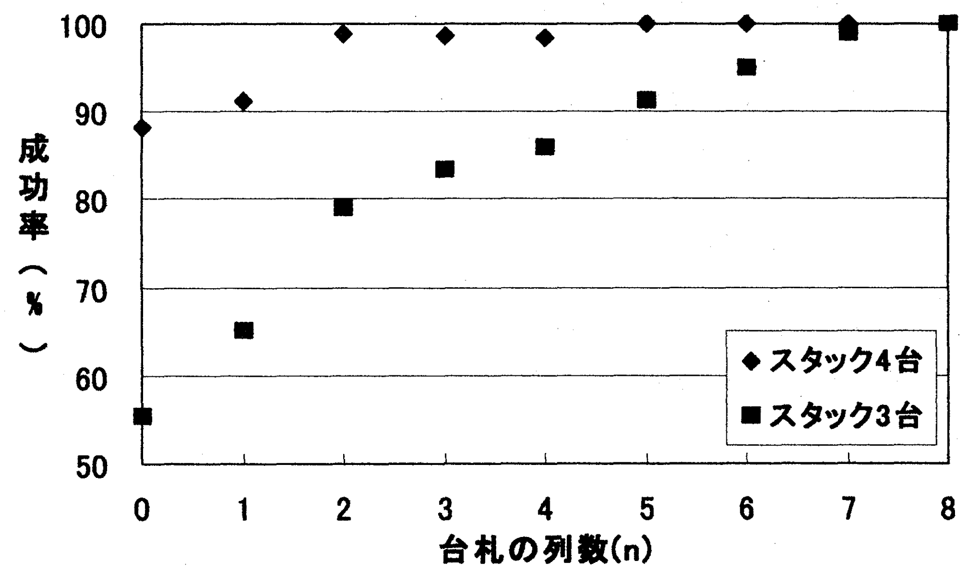

図2　台札の列数と成功率の関係

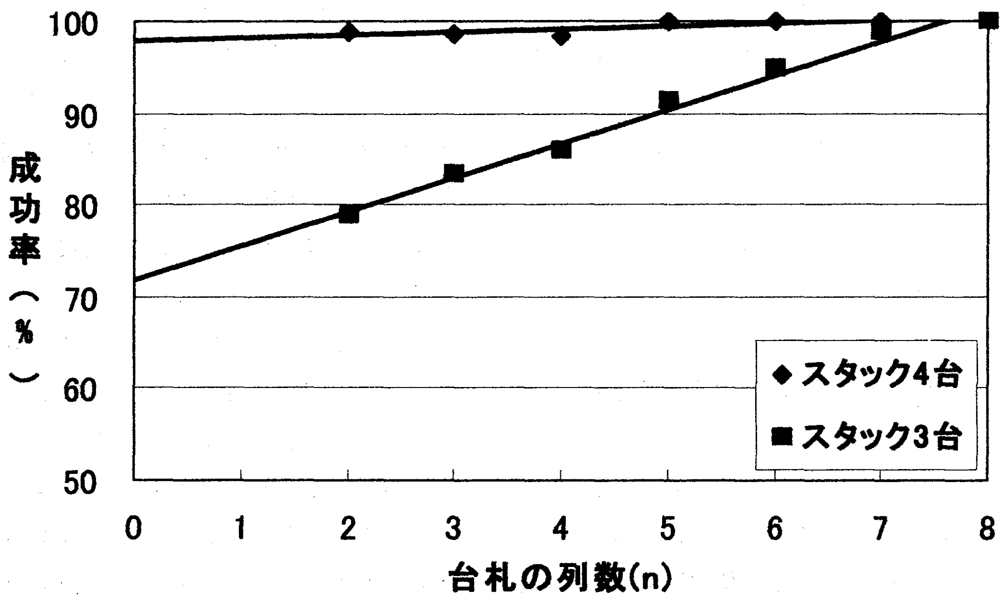

図3　台札の列数と成功率の関係の予測

6. あとがき

カルキュレーションはトランプの一人遊び（いわゆるソリティア）の一種であるが，使用できるスタックの台数とあらかじめ場に出しておく台札の列数によっていくつかの変形版が存在する．本論文では特に台札の列数を多くした場合に着目して，カルキュレーションの成功率に関する理論的および実験的考察を行った．その結果，

1) カルキュレーションの成功率は台札の列数 n に関して単調増加である
2) 成功率が 100%であるための必要十分条件は，台札の列数を n として(12-n)台のスタックを使用できることである
3) スタック 3 台で台札なしの場合，理論的成功率は 72%程度と予想できる

ことが明らかになった．今後，本論文で予測した理論的な成功率に近づくように文献[3]のプログラムを改良していく予定である．

参考文献

[1] 小谷善行：「GPCC　ウルトラナノピコ問題」，Bit 共立出版社株式会社 Vol.20，No.4，pp99-100 (1988 年)

[2] 田中哲朗：「部分ゲームの解析を用いたカルキュレーションの戦略」，情報処理学会論文誌 Vol.43, No.10, pp3064-3073(2002 年)

[3] 南崎好律，新谷敏朗：「カルキュレーションを解くプログラム」，福山大学工学部紀要，(2004 年)

[4] 野崎昭宏：「トランプ 一人遊び 88 選」朝日選書 416, 朝日新聞社 pp.99-104, (1990 年)