

三角形パッチを用いたモーメント法による アンテナの電磁界解析

坪井 始* 田中始男*

Electromagnetic Field Analysis of Antenna by a Method of Moments
Using Triangular Patches

Hajime TSUBOI* Motoo TANAKA*

ABSTRACT

Characteristics of antenna are often analyzed by the method of moments which are one of integral equation methods for frequency domain analysis using unknown current distribution. In this paper, a method of moments using triangular patches for the analysis of antenna characteristics is investigated. Triangular patch is suitable for approximating the surfaces of three-dimensional arbitrary shaped objects. The formulation of the method is shown, and the details and physical meanings of the formulation are described. Furthermore, numerical results and their comparisons with theoretical values are presented for a dipole antenna and a loop antenna.

キーワード：モーメント法、アンテナ、電磁界解析、三角形パッチ、積分方程式法

Keywords: method of moment, antenna, electromagnetic field analysis, triangular patch, integral equation method.

1. まえがき

アンテナの特性解析には、しばしばモーメント法が用いられている [1]。モーメント法は、積分方程式法の一つで、アンテナ導体上の電流を未知変数として解析を行う。アンテナを細線で近似するモーメント法 [2],[3] が最もよく使われているが、三次元形状のアンテナを解析する場合は、三角形パッチで導体表面を近似する方法が有用である [4],[5]。本稿では、三角形パッチを用いたモーメント法について検討した。まず、定式化を示し、その物理的な意味を検討する。さらに、開発したモーメント法のプログラムを解析解のあるダイポールアンテナとループアンテナに適用し、計算結果の妥当性を検討する。

2. 定式化

三角形パッチを用いる方法では、図1のような三角形パッチの対を考え、その共通辺を横切って流れる電流（密度）を未知変数とする。未知電流密度 J_n (A/m) は辺 m_1m_2

で定義され、その長さを l_n とし、ベクトル l_n を図のように定義する。さらに、 l_n の左側の三角形パッチを e_{n1} 、右側の三角形パッチを e_{n2} 、それぞれの三角形パッチの残りの頂点を m_3 、 m_4 とする。ここで、 e_{n1} と e_{n2} は、同一平面内にある必要はない。

また、各三角形パッチ内では、電流密度は座標の一次関数で定義され、計算点 P における J_n に対するベクトル補間関数 F_n は次式で定義される。

$$F_n = \begin{cases} \frac{l_n}{2S_{n1}} f_{n1} & : \text{on } e_{n1} \\ \frac{l_n}{2S_{n2}} f_{n2} & : \text{on } e_{n2} \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 S_{n1} 、 S_{n2} はそれぞれ e_{n1} 、 e_{n2} の面積、 f_{n1} 、 f_{n2} はそれぞれ m_3 から P へ向かうベクトル、 P' から m_4 へ向かうベクトルで、座標の一次関数である。

つぎに、P が辺上にある場合について、電流密度の連続

* 情報処理工学科

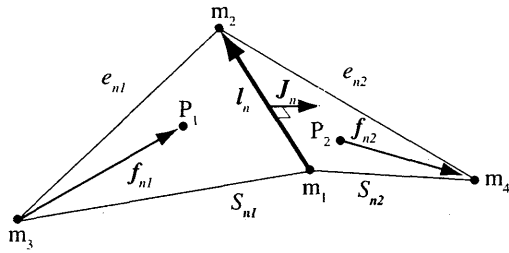


図1 三角形パッチ対と未知電流密度ベクトル

Fig. 1 Triangular patch pair and unknown electric current density vector.

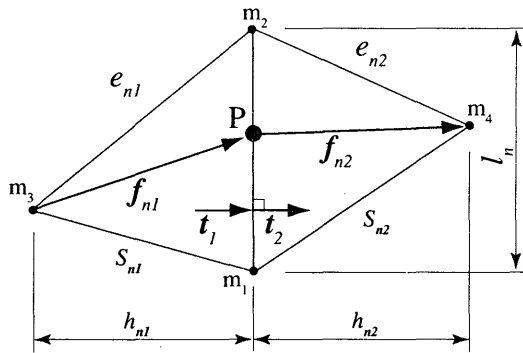


図2 計算点Pが辺m1m2上にある場合

Fig. 2 Case of computation point P on the edge m1m2.

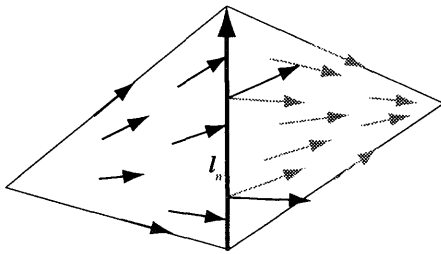


図3 ベクトル補間関数

Fig. 3 Vector interpolation functions.

性について検討する。図2に示すように、 e_{n1} と e_{n2} 上のPにおける l_n に垂直な単位ベクトル t_1, t_2 を考える。この場合、一般的には e_{n1} と e_{n2} は同一平面上にはなく、 $t_1 \neq t_2$ である。

F_n によって近似される電流密度ベクトル J_n は、

$$J_n = J_n F_n \quad (2)$$

で与えられ、 e_{n1} 側、 e_{n2} 側から計算される辺 l_n を通過する電流密度は、つぎのように計算される。

$$J_n F_n \cdot t_1 = J_n \frac{l_n}{2S_{n1}} f_{n1} \cdot t_1 = J_n \frac{l_n}{2S_{n1}} h_{n1} = J_n \quad (3)$$

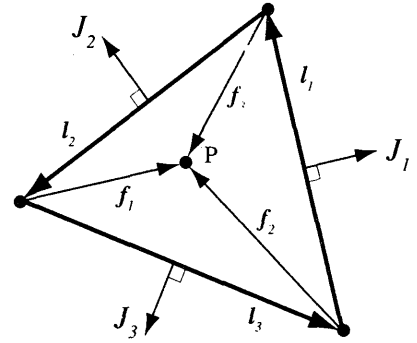


図4 三角形パッチ上の電流密度ベクトル

Fig. 4 Current density vector on the triangular patch.

$$J_n F_n \cdot t_2 = J_n \frac{l_n}{2S_{n2}} f_{n2} \cdot t_2 = J_n \frac{l_n}{2S_{n2}} h_{n2} = J_n \quad (4)$$

ここで、 h_{n1} 、 h_{n2} は、それぞれ辺 l_n を底辺とする e_{n1} 、 e_{n2} の高さである。

(3)、(4)式より、辺 l_n を通過する電流密度は J_n で、三角形パッチ境界で連続に定義されていることが確認された。

図3に、三角形パッチ上の補間関数 F_n の分布を示す。辺 l_n 上では、 F_n は不連続であるが、上述のように辺に垂直な成分は連続である。また、辺 l_n 以外の辺上では、 F_n は辺に平行になり、垂直成分はない。したがって、後述するように三角形上では電流密度の発散は生じるが、辺上では、電流密度の発散は零となり、電荷を生じない。

つぎに、三角形パッチ上で電流密度の発散を検討するために、 F_n の発散を求める。まず、三角形パッチ上の発散 $\nabla_s \cdot F_n$ に対するつぎの面積分を考える。

$$\iint_{e_{n1}} \nabla_s \cdot F_n dS = \int_{l_n} F_n \cdot t_1 dl = l_n \quad (5)$$

ここでは、ガウスの発散定理を e_{n1} に適用し、辺 l_n 以外の辺上では F_n が辺に平行になることを用いている。

さらに、 F_n が座標の一次関数であるから、 $\nabla_s \cdot F_n$ はパッチ e_{n1} 上で一定値になることに注意すると、

$$S_{n1} \nabla_s \cdot F_n = l_n \\ \therefore \nabla_s \cdot F_n = \frac{l_n}{S_{n1}}$$

を得る。

同様に、 t_2 方向に注意して三角形パッチ e_{n2} について求めると、 $\nabla_s \cdot F_n$ はつぎのようになる。

$$\nabla_s \cdot F_n = \begin{cases} \frac{l_n}{S_{n1}} & : \text{on } e_{n1} \\ -\frac{l_n}{S_{n2}} & : \text{on } e_{n2} \end{cases} \quad (6)$$

以上、三角形パッチ対について考えてきたが、一つの三角形パッチ e_k における電流密度ベクトル \mathbf{J} は座標の一次関数で近似され、次式で与えられる。

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^3 J_n \mathbf{F}_n \quad (7)$$

また、 \mathbf{J} の発散は、つぎのように三角形パッチ内では一定値で与えられる。

$$\nabla_s \cdot \mathbf{J} = \sum_{n=1}^3 J_n \nabla_s \cdot \mathbf{F}_n \quad (8)$$

つぎに、三角形パッチ上の電流によるベクトルポテンシャル \mathbf{A} 、スカラーポテンシャル ϕ 、電界 \mathbf{E} を考える。物理量の時間依存性が正弦波の場合、 \mathbf{E} は、 \mathbf{A} と ϕ からつぎのように与えられる。

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi \quad (9)$$

ここで、 j は虚数単位、 ω は角周波数で、 f を周波数として $\omega = 2\pi f$ で与えられる。

また、電荷の連続の式より、三角形パッチ上の電荷密度 ρ (C/m³) は、次式で与えられる。

$$\rho = -\frac{\nabla_s \cdot \mathbf{J}}{j\omega} \quad (10)$$

図5の三角形対 e_{n1} 、 e_{n2} 上の電流および電荷による点 Q の \mathbf{A} および ϕ は次式で計算される。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S_n} \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dS' \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{S_n} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dS' \\ &= -\frac{1}{j4\pi\omega\epsilon} \iint_{S_n} \nabla_s \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dS' \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 \mathbf{r} 、 \mathbf{r}' は図5に示される位置ベクトル、 $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ は基本解である。

$G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ は、次式で与えられる。

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (13)$$

ここで、 k は波数で次式で与えられる。

$$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$$

導体表面上では電界の接線成分が零となり、次式が成り立つ。

$$(\mathbf{E} + \mathbf{E}^i) \times \mathbf{n} = 0 \quad (14)$$

ここで、 \mathbf{E}^i は印加電界、 \mathbf{n} は導体表面の単位法線ベクトルである。

(14) 式の代わりに、Galerkin の重み付き残差方程式を作

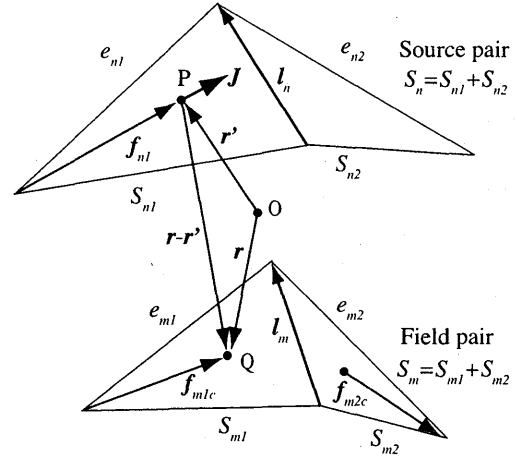


図5 連立一次方程式作成のための全体座標と局所座標

Fig. 5 Global and local coordinates for setting up final simultaneous equations.

成し、電界の接線成分を零とするつぎの式を用いて最終の連立一次方程式を作成する。

$$\iint_{S_m} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^i) \cdot \mathbf{F}_m ds = 0 \quad (15)$$

ここで、 \mathbf{F}_m は辺 l_m に対する補間関数、 S_m は \mathbf{F}_m が及ぶ範囲、すなわち図5における e_{m1} と e_{m2} で $S_m = S_{m1} + S_{m2}$ である。

(15) 式に (9) ~ (12) 式を代入し、整理する。

$$\iint_{S_m} j\omega\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}_m ds + \iint_{S_m} \nabla\phi \cdot \mathbf{F}_m ds = \iint_{S_m} \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{F}_m ds \quad (16)$$

(16) 式の各項は、つぎのように計算される。このとき、 S_m に関する面積分は、 e_{m1} と e_{m2} のそれぞれの重心を計算点とする数値積分で近似する。

$$\begin{aligned} \iint_{S_m} \nabla\phi \cdot \mathbf{F}_m ds &= -\iint_{S_m} (\nabla_s \cdot \mathbf{F}_n) \phi ds \\ &= -l_m \left(\frac{1}{S_{m1}} \iint_{S_{m1}} \phi dS - \frac{1}{S_{m2}} \iint_{S_{m2}} \phi dS \right) \\ &\approx -l_m \{ \phi(\mathbf{r}_{m1c}) - \phi(\mathbf{r}_{m2c}) \} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}_m ds &= l_m \left(\frac{1}{2S_{m1}} \iint_{S_{m1}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_{m1} dS \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2S_{m2}} \iint_{S_{m2}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_{m2} dS \right) \\ &\approx \frac{l_m}{2} \{ \mathbf{A}(\mathbf{r}_{m1c}) \cdot \mathbf{f}_{m1c} + \mathbf{A}(\mathbf{r}_{m2c}) \cdot \mathbf{f}_{m2c} \} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\iint_{S_m} \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{F}_m ds \approx \frac{l_m}{2} \{ \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_{m1c}) \cdot \mathbf{f}_{m1c} + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_{m2c}) \cdot \mathbf{f}_{m2c} \} \quad (19)$$

ここで、 r_{m1c} 、 r_{m2c} は e_{m1} 、 e_{m2} の重心の位置ベクトル、 f_{m1c} 、 f_{m2c} は重心の局所座標ベクトルである。

(16) 式における A および ϕ がすべての三角形パッチ上の電流の積分で求められること、すなわちすべての辺上の未知電流によって決まることに注意すれば、(16) 式から最終の連立一次方程式が作成される。

$$l_m \left\{ j\omega \left(\frac{f_{m1c}}{2} \cdot \sum_{n=1}^N A_{m1n} + \frac{f_{m2c}}{2} \cdot \sum_{n=1}^N A_{m2n} \right) - \sum_{n=1}^N \phi_{m1n} + \sum_{n=1}^N \phi_{m2n} \right\} = l_m \left(\frac{f_{m1c}}{2} \cdot E_{m1c}^i + \frac{f_{m2c}}{2} \cdot E_{m2c}^i \right) \quad (20)$$

ここで、 A_{m1n} 、 A_{m2n} は図5の辺 ln の未知電流密度による e_{n1} 、 e_{n2} の重心におけるベクトルポテンシャル、 ϕ_{m1n} 、 ϕ_{m2n} は同様にスカラーポテンシャルである。

A_{mun} 、 ϕ_{mun} は、次式で与えられる ($u=1, 2$)。

$$A_{mun} = \frac{\mu J_n}{4\pi} \iint_{S_n} F_n(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dS = \frac{\mu J_n}{8\pi} \left(\frac{1}{S_{n1}} \iint_{e_{n1}} f_{n1} \cdot G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dS + \frac{1}{S_{n2}} \iint_{e_{n2}} f_{n2} \cdot G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dS \right) \quad (21)$$

$$\phi_{mun} = -\frac{J_n}{j4\pi\omega\epsilon} \iint_{S_n} \nabla \cdot F_n(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dS = -\frac{J_n}{j4\pi\omega\epsilon} \left(\frac{1}{S_{n1}} \iint_{e_{n1}} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dS + \frac{1}{S_{n2}} \iint_{e_{n2}} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dS \right) \quad (22)$$

最終の連立一次方程式を、

$$[Z_{mn}] \{J_n\} = \{V_m\} \quad (23)$$

の形に書くと、

$$Z_{mn} = l_m \left\{ j\omega \left(\frac{f_{m1c}}{2} \cdot A'_{m1n} + \frac{f_{m2c}}{2} \cdot A'_{m2n} \right) - \phi'_{m1n} + \phi'_{m2n} \right\} \quad (24)$$

$$V_m = l_m \left(\frac{f_{m1c}}{2} \cdot E_{m1c}^i + \frac{f_{m2c}}{2} \cdot E_{m2c}^i \right) \quad (25)$$

ここで、 A'_{m1n} 、 A'_{m2n} 、 ϕ'_{m1n} 、 ϕ'_{m2n} は、(21)、(22) 式で $J_n=1$ とした各ポテンシャルの値である。

アンテナの入力アドミタンスおよび入力インピーダンスは、入力点の辺に単位電位 ($V=1$) を与えて、つぎのように計算される。すなわち、辺 k において、(25) 式右辺の括

弧内を1とし、

$$V_k = l_k \cdot 1 = l_k \quad (26)$$

を与え、(25) 式を用いて得られた J_k より、辺 k の入力アドミタンス Y_k は、

$$Y_k = \frac{I_k}{V_k} = \frac{l_k J_k}{l_k} = J_k = G_k + jB_k \quad (27)$$

で計算でき、入力インピーダンス Z_k は、

$$Z_k = \frac{1}{J_k} = R_k + jX_k \quad (28)$$

で計算できる。 G_k 、 B_k 、 R_k 、 X_k は、それぞれコンダクタンス、サセプタンス、抵抗、リアクタンスである。

3. 計算例

前章に述べた定式化を用いて解析プログラムを作成し、その妥当性を確認するためにダイポールアンテナとループアンテナの解析を行った。

ダイポールアンテナの計算モデルを図6に示す。ダイポールアンテナは円筒形状で近似され、その表面は、軸方向に6分割、円周方向に6分割した長方形領域をさらに2分割して、84の三角形パッチに分割している。この場合、電流密度を定義する辺の数は126であり、同図に示す中央部の6つの辺を給電点とし、1Vの電位を与えた。周波数を変化させて計算した給電点の入力インピーダンスの計算値と解析解[6]との比較を図7に示す。同図の横軸の kh は、図6に示すように、アンテナ長 $2h$ を給電周波数 f から計算される波長 λ で規格化したものである。このときの波長 λ は光速 c を周波数 f で割ったものである。また、縦軸は入力インピーダンス Z の抵抗分 R とリアクタンス分 X である。図7に示すように、計算結果は、周波数が低いところで解析解によく一致している。

図8に、ループアンテナの計算モデルを示す。ループアンテナは円環体(トーラス)で近似し、その表面を、円の軸方向に32分割、断面の円周方向に6分割し、さらにそれを2分割して、384の三角形パッチに分割している。電流密度を定義する辺の数は576であり、同図に示すように1つの断面の6つの辺を給電点とし、1Vの電位を与えた。給電点の入力インピーダンスの計算値と解析解[6]との比較を図9に示す。同図の横軸の kb は、図8に示すように、ループ長 $2\pi b$ を波長 λ で規格化したものである。図9に示すように、計算結果は解析解によく一致している。

2つのタイプのアンテナの計算例によって、三角形パッチで近似したアンテナの入力インピーダンスの計算値の妥当性確認することができた。また、ダイポールアンテナの場合のように、三角形パッチの形状がかなり細長い(三角形の高さが底辺の長さの約11.3倍)場合でも、計算精度が悪化しないことが確認された。

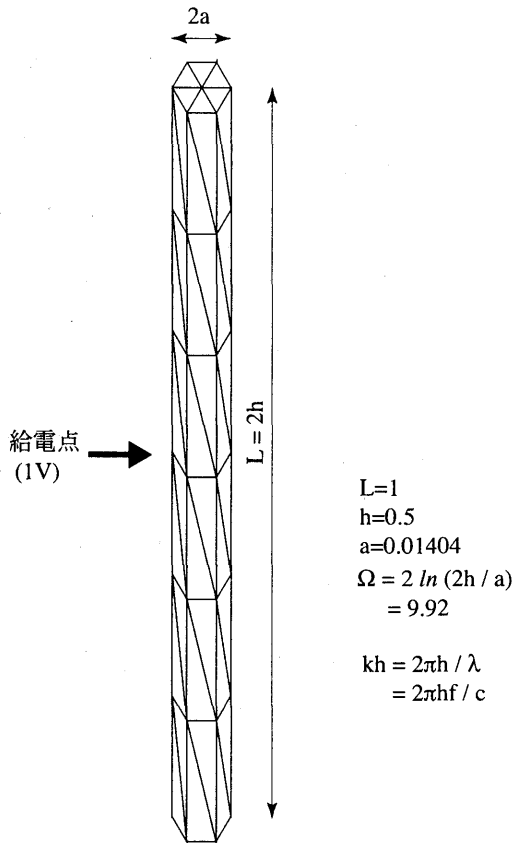


図6 ダイポールアンテナモデル

Fig. 6 Dipole antenna model.

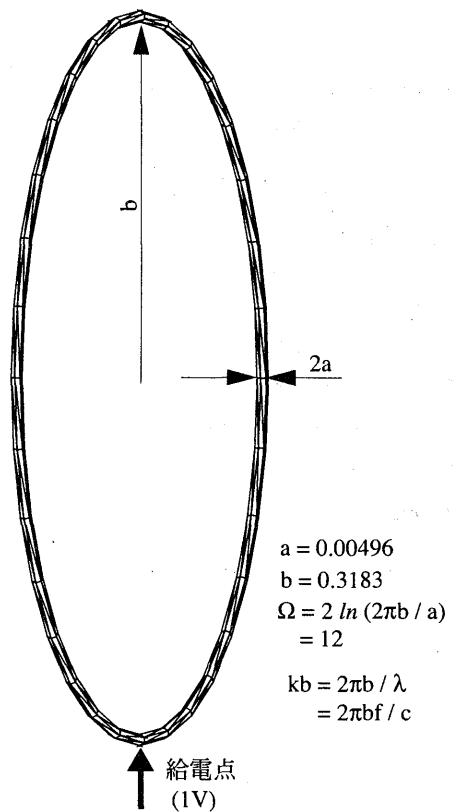


図8 ループアンテナモデル

Fig. 8 Loop antenna model.

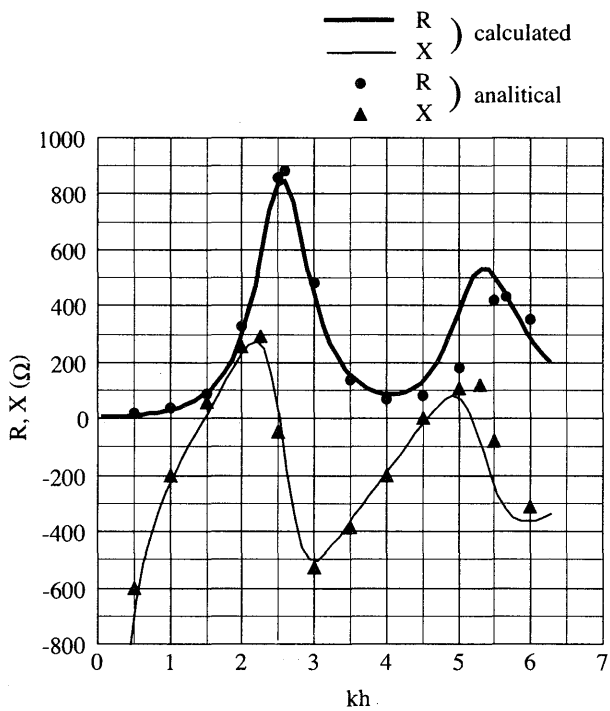


図7 ダイポールアンテナモデルの周波数特性

Fig. 7 Frequency characteristics of the dipole antenna model.

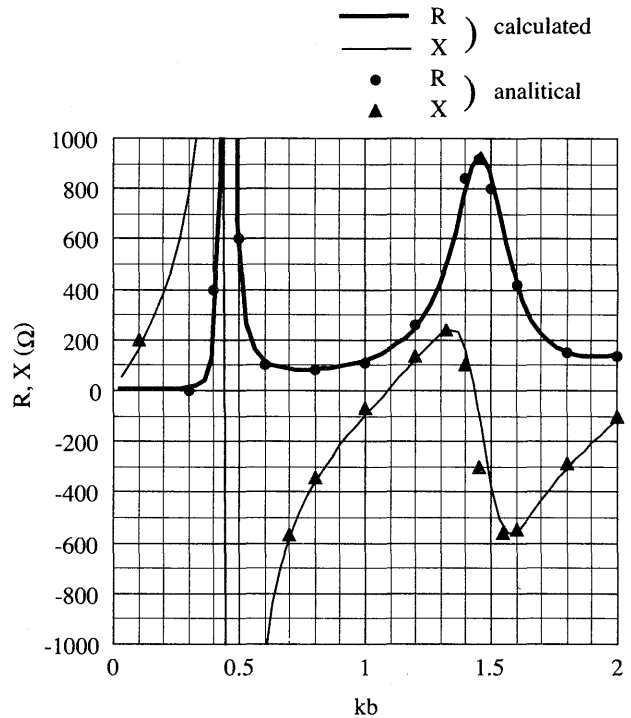


図9 ループアンテナモデルの周波数特性

Fig. 9 Frequency characteristics of the loop antenna model.

4. むすび

三角形パッチを用いたモーメント法によるアンテナの電磁界解析法について、定式化を検討した。さらに、その定式化を用いて開発した解析プログラムを解析解のあるダイポールアンテナおよびループアンテナに適用し、高い計算精度が得られることを確認した。本手法には汎用性があり、三次元形状のアンテナ導体表面を三角形パッチに分割するだけで、容易にアンテナ特性の解析が可能である。

本手法は、非接触 IC カード、無線タグ等の最近需要が増している無線通信、無線電力供給用のアンテナの特性解析に適用でき、様々な形状のアンテナに適用可能である。さらに、誘電体や磁性体がアンテナ付近に存在する場合の解析に拡張可能である。

参考文献

[1] R. F. Harrington: "Matrix Methods for Field Problems", *Proceedings of IEEE*, pp.136-149, Vol. 55, No. 2, 1967.

[2] H. Tsuboi, H. Tanaka, T. Misaki, M. Fujita: "Electromagnetic Field Analysis of RF Antenna for MRI", *IEEE Transactions on Magnetics*, pp.2591-2593, Vol.24, No.6, 1988.

[3] H. Tsuboi, H. Tanaka, M. Fujita: "Electromagnetic Field Analysis of the Wire Antenna in the Presence of a Dielectric with Three-Dimensional Shape", *IEEE Transactions on Magnetics*, pp.3602-3604, Vol.25, No.5, 1989.

[4] S. M. Rao, D. R. Wilson, A. W. Glisson: "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, pp.409-418, Vol.AP-30, No.3, 1982.

[5] M. Analoui, H. Tsuboi: "Moment Method Solution of Electromagnetic Scattering and Radiation from Wire Attached to Conducting Body by New Technique for Junction Treatment", *電気学会論文誌 A*, pp.796-804, Vol.110-A, No. 11, 1990.

[6] 電子情報通信学会編:「アンテナ工学ハンドブック」、p.39-62、オーム社、1980.