

## 極限解析における上下界定理の新しい解釈とその適用に関する研究

西原 晃\*

A study on a New Interpretation of Upper and Lower Bound Theorem  
in Limit Analysis and its Application

Akira NISHIHARA\*

### ABSTRACT

The classical methods of analysing the failure state of geo-materials, *e.g.* the bearing capacity theories, are classified into three groups: (a) theories of characteristic line field (b) limit equilibrium methods and (c) limit analysis. Many of the methods of practical use are categorized as the limit equilibrium method which are considered as the easy-to-handle tools for engineering practice. On the other hand, in the limit analysis method, the upper and lower bound solutions of limit load of the failure problems can be obtained using the principle of maximum plastic work.

In this paper, the relationship of the solutions obtained by the limit equilibrium method and the limit analysis are examined based on the theory of plasticity, then, a set of new methods (stress equilibrium methods) of obtaining both of the upper and the lower bound solutions by searching the equilibrium stress state are proposed.

キーワード：破壊荷重，剛塑性，極限つり合い解析，極限解析

Keywords: limit load, rigid plasticity, limit equilibrium method, limit analysis

#### 1. まえがき

地盤の安定に関する問題は、土質力学における最も古く、かつ大きなテーマであり、土圧論、支持力理論、斜面や盛土の安定問題といった形で発展してきた。土はその性質の複雑さゆえに、対象とする問題によって、連続体、粒状体、また弾性体、弾塑性体、剛塑性体などのように、さまざまな仮定に基づき取り扱われてきた。また、用いる仮定が異なるために、地盤の変形と破壊の問題は、それぞれ別の問題として取り扱わざるを得なかった。近年では、有限要素法などの数値解析手法の発達によって、変形とその極限状態である破壊を同一線上で議論することも可能になりつつあるが、微小変形から破壊時の非常に大きな変形までを整合性を保ちつつ、一つの手法で解析するには、まだ多くの問題を抱えている。

実務的には、地盤の破壊の問題は、地盤を剛塑性体と仮定した、古典的塑性理論に基づいた解析手法が多く用いられている。これらの解析手法は、細かな差異は別と

して、極限つり合い解析、すべり線解析（特性曲線法）、極限解析の3つに大別される。これらの解析法によって得られる解は、破壊状態の応力と変形が満足しなければならない条件のうちの、限られたいくつかの条件しか満たさない近似解である。これらの解法のうち、極限つり合い法は、すべり面を仮定し、そのすべり面に沿ってすべろうとする土塊に作用する力のつり合いをもとに解く方法である。この方法は、土質力学において最も古くから、また現在においても広く用いられている解析法で、古典的な土圧論、支持力理論や円弧すべり面法などはいずれもこの方法である。極限つり合い法は、直感的でわかりやすくまた、解析も比較的容易であることから、実務でも最も多く用いられているが、得られた解が正しい解（正解）に対してどのような関係にあるか、また、どの程度正解に近いかが明確でなく、従来からその解の意味について議論がなされてきた<sup>1,2)</sup>。

極限つり合い法では、すべり面の形状や位置はあらか

\* 建設環境工学科

じめ仮定されるが、これに対して、地盤内部の応力状態とすべり面を同時に求めて行こうとする方法が、すべり線法である。破壊条件と応力のつり合い条件からなる連立偏微分方程式を特性曲線の考え方をを用いて解く方法が主で、最初は kotter によって土質材料に対して提案されたが、後に金属塑性力学の分野で発達した。すべり線法では、塑性領域の応力状態を応力の特性曲線に沿って数値的に解かなければならず、計算手順はかなり煩雑である。そのため、実務で用いられることは少ないが、解の精度は高く、他の手法で得られた解の検証に用いられることもある。

残る1つの極限解析法は、塑性理論における最大塑性仕事の原理を利用した方法である。この方法では、破壊条件を破らないような応力状態から正解よりも小さな下界値と、破壊領域の速度場から正解より大きな上界値を求めることができ、破壊荷重の正解が存在する範囲を明確に示すことができる。しかし、この方法も、解析手順が煩雑で、実務に適用されることは少ない。

本研究では、これらの手法のうち、極限つり合い法と極限解析法によって得られる解の関係について考察するとともに、応力のつり合い式から解の上界と下界を求める方法を新たに提案する。

## 2. 塑性仕事の原理と極限解析

### 2.1 剛塑性体における塑性仕事の原理

図-1に示すように、ある荷重系のもとで、静的つり合いの状態にある物体を考える。ここで、問題とするのは、与えられた条件のもとで、物体が破壊を生じるであろう荷重系あるいは内部の応力状態を求めることである。

ある荷重系のもとで、破壊に至った物体を考えると、その内部には、弾性域、破壊域（完全塑性域）、また破壊に至らないまでも塑性変形が生じた塑性域（非破壊塑性域）が混在している。このような境界値問題を厳密に解くためには、弾性域および非破壊塑性域における弾性ひずみ成分を無視することはできない。しかし、実際上多くの問題においては、解析上の困難さを避けるために、ひずみの弾性成分はしばしば無視され、物体は完全塑性状態として取り扱われる。

完全塑性状態にある領域において、応力と変形が満足しなければならない条件は以下の通りである。

#### ① 応力のつり合い式

$$\sigma_{ij,j} + \rho_i = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\sigma_{ij}$ : 応力テンソル、 $\rho_i$ : 物体力ベクトルである。

#### ② 応力（表面力）に関する境界条件

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = \bar{T}_i \quad (2)$$

ここに、 $T_i$  は表面力ベクトルで、 $\bar{T}_i$  は表面力が与えられる境界  $S_T$  における境界条件である。また、 $n_j$  は境界表面における単位法線ベクトルである。

#### ③ 破壊条件

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3)$$

#### ④ 適合条件（ひずみ増分～速度関係）

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (4)$$

ここに、 $\dot{\epsilon}_{ij}$  はひずみ速度テンソル、 $v_i$  は速度ベクトルである。

#### ⑤ 速度に関する境界条件

$$v_i = \bar{v}_i \quad (5)$$

ここに、 $\bar{v}_i$  は速度が与えられる境界  $S_v$  における境界条件である。

#### ⑥ 応力～ひずみ増分関係（流れ則）

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \Lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}} \quad (6)$$

ここに、 $f$  は式(3)で与えられる破壊関数、 $\Lambda$  は比例定数である。

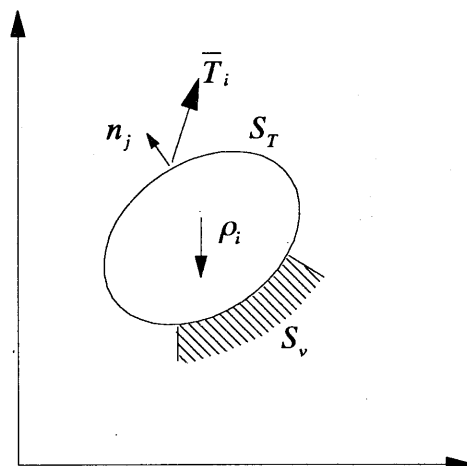


図 1 つり合い状態にある系

これらのすべての条件を満足するような正解を求めるのは容易ではなく、そのため実際にはこれらの条件のうちいくつかの条件を満足するような解が求められる。たとえば、極限つり合い解析、すべり線解析および極限解析における下界解析は応力に関する条件のみを考えており、変形はまったく考慮されていない。

前出の条件のうち、①応力のつり合い式と、②応力に関する境界条件を満足するような応力および表面力の系をつり合い応力系と呼び、 $\sigma^E$  あるいは  $T^E$  と表すことにする。一方、④適合条件（ひずみ増分～速度関係）と、⑤速度に関する境界条件を満足するひずみ増分および速度を適合速度系と呼び、 $\epsilon^K$  あるいは  $v^K$  と表すことにする。これらつり合い応力系と適合速度系がなす仕事より次の関係式が導かれる<sup>1)</sup>。

$$\int_{S_V} T^E \cdot \bar{v} \, dS_V + \int_{S_T} \bar{T} \cdot v^K \, dS_T + \int_V \rho \cdot v^K \, dV = \int_V \sigma^E \cdot \epsilon^K \, dV \quad (7)$$

式(7)は、外力によってなされる仕事と内力によってなされる仕事がつり合っていることを意味しており、塑性仕事の原理と呼ばれる。塑性仕事の原理は、応力～ひずみ関係や破壊条件など、物体の特性に関係なく成り立たなければならない。また、式(7)において、速度が与えられる境界  $S_V$  における表面力が求めようとする解である。

従来、地盤の破壊問題では、破壊領域を速度不連続線（すべり線）によっていくつかの剛体ブロックに分けて取り扱うことが多い。このような場合、剛体ブロック内は変形しないから、内力によってなされる仕事は速度不連続線  $\Gamma$  においてなされる塑性仕事のみとなり、塑性仕事の原理は次式のように表される。

$$\int_{S_V} T^E \cdot \bar{v} \, dS_V + \int_{S_T} \bar{T} \cdot v^K \, dS_T + \int_V \rho \cdot v^K \, dV = \int_{\Gamma} T_{\Gamma}^E \cdot [v^K] \, d\Gamma \quad (8)$$

ここに、 $T_{\Gamma}^E$  は速度不連続線における表面力、 $[v^K]$  は速度の不連続量である。

## 2.2 最大塑性仕事の原理と下界定理

式(8)の塑性仕事の原理は、つり合い系の応力と、適合系の速度であれば、応力～ひずみ増分関係や破壊条件に関係なく成り立つ式である。したがって、つり合い応力系の解の一つである正解の応力ならびに表面力に関

して塑性仕事の原理は、

$$\int_{S_V} T^* \cdot \bar{v} \, dS_V + \int_{S_T} \bar{T} \cdot v^K \, dS_T + \int_V \rho \cdot v^K \, dV = \int_{\Gamma} T_{\Gamma}^* \cdot [v^K] \, d\Gamma \quad (9)$$

と表される。ここに、 $T^*$  は正解の表面力である。式(8)と(9)の差を取ると、次式が得られる。

$$\int_{S_V} (T^* - T^E) \cdot \bar{v} \, dS_V = \int_{\Gamma} (T_{\Gamma}^* - T_{\Gamma}^E) \cdot [v^K] \, d\Gamma \quad (10)$$

すなわち、つり合いの状態にある任意の応力から導かれる表面力  $T^E$  と正解  $T^*$  との大小関係は速度不連続線における塑性仕事の正負できまることになる。

ここで、ある速度不連続線上の一点における応力状態を考える。速度不連続線においては、物体は破壊の状態にあるから、図-2に示すように、正解に対する表面力  $T_{\Gamma}^*$  は破壊曲面上にある。また、関連流れ則が成り立つとすると、速度の不連続量は破壊曲面に垂直なベクトルで示される。つり合い応力の一つとして、破壊条件を破らなような静的可容応力を考え、その応力から導かれる表面力を  $T_{\Gamma}^S$  とすると、図-2より、

$$(T_{\Gamma}^* - T_{\Gamma}^S) \cdot [v^K] \geq 0 \quad (11)$$

であり、式(10)の関係から、

$$\int_{S_V} (T^* - T^S) \cdot \bar{v} \, dS_V \geq 0 \quad (12)$$

が得られる。ここに、 $T^S$  は速度境界において、静的可容応力に対応する解であり、静的可容解と呼ばれる。式(12)は、正解の表面力とそれに適合する速度がなす仕事は、他のいかなる静的可容解がなす仕事より大きいことを意味しており、最大塑性仕事の原理と呼ばれる<sup>3)</sup>。

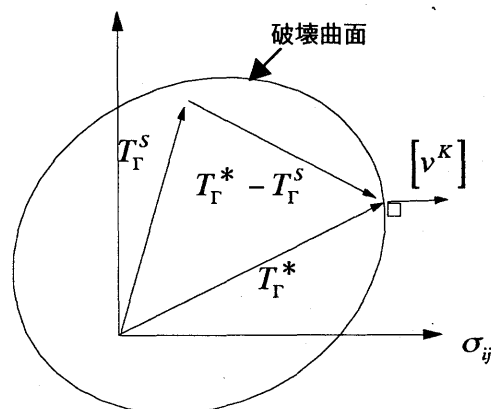


図-2 速度不連続線における塑性仕事

式(12)において、境界条件として与えられる速度  $\bar{v}$  が一定値であるとする、

$$\int_{S_v} T^* dS_v - \int_{S_v} T^S dS_v \geq 0 \quad (13)$$

が得られる。すなわち、静的可容応力から導かれる表面力  $T^S$  は正解より小さいことが保証される。これが下界定理である<sup>1)</sup>。下界定理においては、破壊領域を含めて、すべての領域において、応力が静的可容条件、すなわち、応力のつり合いと破壊条件を破らないという条件を満たさなければならない。このような静的可容応力場を想定するには、地盤を応力不連続線によっていくつかの領域に分割し、隣接する領域間の応力のつり合いを考慮しつつ、それぞれの領域において破壊条件を破らないような応力状態を設定する手法が用いられる。

例として、浅い基礎の支持力問題を考える。図-3は、地盤の内部摩擦角  $\phi = 0$ 、粘着力  $c = k$  とした場合の静的可容応力場の一例で<sup>1)</sup>、この支持力問題の正解は、

$$q = 5.14c \quad (14)$$

である。一方、図-3の静的可容応力場から得られる支持力値は、

$$q = 4c \quad (15)$$

であり、正解より小さいことがわかる。静的可容応力場を想定することは、図-3の例のように地盤特性、地盤形状、载荷状態が簡単な場合を除いて難しく、また、応力不連続線による領域の分割数が多くなれば、手順が非常に煩雑になるため、下界定理による解析事例は少ない。

### 2. 3 上界定理

極限解析における上界定理では、地盤の破壊領域を速度不連続線によっていくつかの剛体ブロックに分け、それらのブロックの運動を考える。図-4は、前述の浅い基礎の支持力問題におけるブロックの分割例である<sup>1)</sup>。基礎底面の速度境界における速度を  $\bar{v}$  とするとき、各ブロックにおける速度は図中に示すようになる。このように、ブロックの運動と矛盾しない速度系が適合速度系  $v^K$  である。適合速度系は、ブロックの分割の仕方によって無数に想定することができる。そのような適合速度系の一つが想定されたとき、その速度系から、応力~ひずみ関係によって導かれ、かつ破壊条件を満たすような応力を適合系の応力と呼ぶ。また、速度不連続線において、適合系の応力から導かれる表面力を適合系の表面力と呼び、 $T_\Gamma^K$  で表すことにする。このとき、速度不連続線において、適合系の速度、表面力と正解の関係は図-5に示すようになる。 $[v^K]$ 、 $[v^*]$  は、それぞれ、適合系と正解の速度場から求められる速度不連続量で、

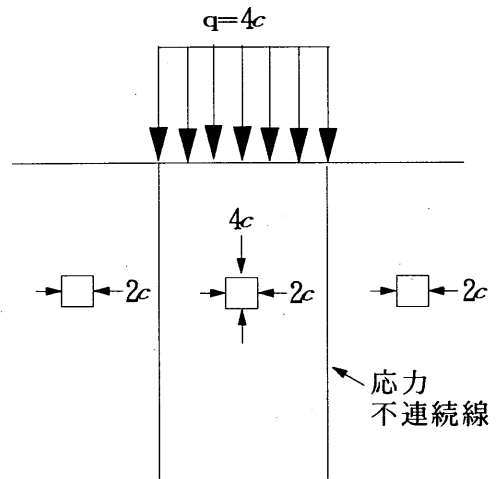


図-3 支持力問題における静的可容応力場

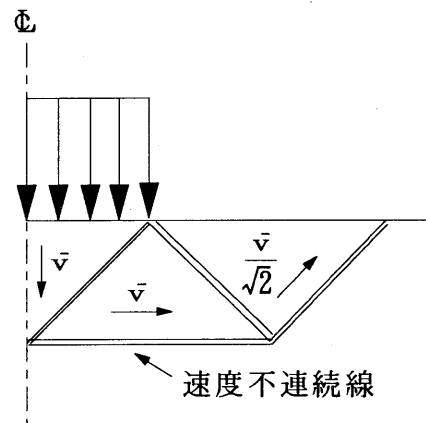


図-4 支持力問題における適合速度場

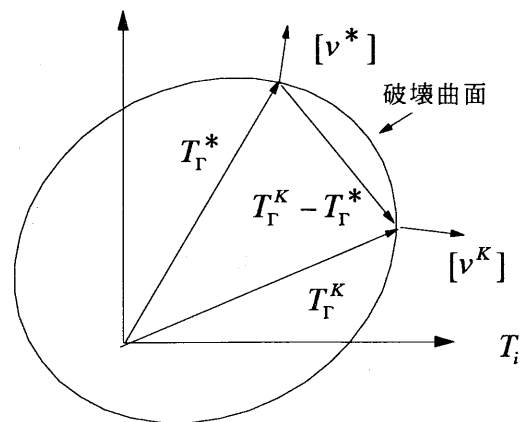


図-5 速度不連続線における適合速度系による塑性仕事

適合系と正解の応力に対応している。図-5の幾何学的関係から、次の関係が成り立つ。

$$(T_{\Gamma}^K - T_{\Gamma}^*) \cdot [v^K] \geq 0 \quad (16)$$

したがって、式(12)より、

$$\int_{S_V} T^K dS_V - \int_{S_V} T^* dS_V \geq 0 \quad (17)$$

の関係が得られる。すなわち、適合速度系から導かれる解  $T^K$  は正解  $T^*$  より大きいことが保証される。これが上界定理である。

上界定理において適合系の表面力を求めるには、破壊条件を満たすような表面力  $T_{\Gamma}^K$  が速度不連続線においてなす塑性仕事に対して、次式を満たすような解  $T^K$  を求めればよい、

$$\int_{S_V} T^K \cdot \bar{v} dS_V + \int_{S_T} \bar{T} \cdot v^K dS_T + \int_V \rho \cdot v^K dV = \int_{\Gamma} T_{\Gamma}^K \cdot [v^K] d\Gamma \quad (18)$$

例えば、図-4の例で得られる解は、

$$q = 6c \quad (19)$$

であり、式(14)の正解より大きい。

上界定理に基づく上界解析では、速度不連続線における速度不連続量と表面力の仕事から解を比較的容易に求めることができるため、支持力問題をはじめ、土圧、斜面の安定問題など多くの問題に適用されている<sup>1), 4), 5)</sup>。

## 2. 4 上界定理の意味

上界解析では、得られた解が正解より大きいことが保証される。したがって、さまざまな剛体ブロックの運動を想定して試行計算を繰り返し、その内の最小の解を求めることになる。一方、極限つり合い解析は剛体ブロックに作用する力のつり合いをもとに解を求めるが、極限つり合い解析においても、さまざまなブロック分割に対して試行計算を繰り返し、その内の最小の解を求める点で上界解析と同じである。そこで、極限つり合い解析は上界解析と本質的に同じものではないかと考えられている。たとえば、Davis<sup>6)</sup>、Collins<sup>7)</sup>は、単一ブロックを想定した極限つり合い法の典型的な例であるクーロンの土圧理論が上界定理と同じ結果を与えることを示している。また、Drescher<sup>2)</sup>は、多くのブロックからなる一般的な場合に関して、剛体ブロックの運動の連続性を考慮すると、式(18)が次のように表されることを示した。

$$\int_{S_V} T^K dS_V + \int_{S_T} \bar{T} dS_T + \int_V \rho dV = \int_{\Gamma} T_{\Gamma}^K d\Gamma \quad (20)$$

式(20)は力のつり合いを表しており、このことから、極限つり合い解析は動的解析と等価であり、極限つり合い解析の解は上界であるとの議論がなされている。しかし、ここで注意しなければならないことがある、式(20)は塑性仕事の原理を表す式(7)から導かれてきたものであり、その塑性仕事の原理は、もともと、応力つり合い式を前提として導かれている。したがって、式(20)が力のつり合い式となることは、当然の帰結である。

さらに注意しなければならないことは、上界定理で想定される適合系の応力および表面力は、つり合い条件を満たすことが要求されていないことである。先述のように、完全塑性領域における応力と変形は、①応力のつり合い式、②応力(表面力)に関する境界条件、③破壊条件、④適合条件(ひずみ増分～速度関係)、⑤速度に関する境界条件、⑥応力～ひずみ増分関係(流れ則)を満足しなければならない。上界定理における適合系のひずみ増分および速度は、変形が満足しなければならない④、⑤の条件のを満たしている。また、適合系の応力および表面力は、適合系の変形に対して、流れ則(条件⑥)を満たし、さらに境界条件(条件②)と破壊条件(条件③)を満たすことが要求されている。したがって、もし、適合系の応力および表面力がつり合い条件(条件①)を満たすならば、適合系の応力と変形は要求されるすべての条件を満たすことになり、上界解析によって得られる解は正解となってしまうことになる。

極限解析は、塑性仕事の原理と最大塑性仕事の原理に基づいているが、その併用に関して大きな誤解があるように思われる。最大塑性仕事の原理は、破壊条件と流れ則を前提とした原理であり、つり合い条件には関係しない。一方、塑性仕事の原理は、流れ則に関係せず成り立つ式である。下界定理における静的可容応力系は応力のつり合い式を満たしているため、塑性仕事の原理と最大塑性仕事の原理を併用するのに矛盾はない。しかし、上界定理において、応力のつり合い条件を要求されない適合系の応力・表面力に対しては、本来塑性仕事の原理を用いることはできないのである。逆に、Drescher<sup>2)</sup>が示すように、式(18)を用いて得られた適合系の解  $T^K$  が速度に関係なく、つり合い式のみから得られるということは、 $T^K$  は速度場に関連づけられた解であることが保証されないことを意味している。すなわち上界定理の論拠となる最大塑性仕事の原理が成り立たず、得られた解が上界であることは保証されない。すなわち、上界解析によって得られた解が正解より大きいことを保証

するには、他の論拠が必要となる。

### 3. 応力つり合い法による上・下界解析

#### 3.1 上界つり合い解析

式(10)で示したように、つり合い状態にある応力系から導かれる解と正解との大小関係は速度不連続線における塑性仕事の正負で定まる。そこで、つり合い状態にあり、かつ破壊条件を破るような応力場（破壊応力系）を考え、この応力場から導かれる表面力を  $T_T^F$  および  $T^F$  とすれば、図-6に示す関係より、

$$(T_T^* - T_T^F) \cdot [v^K] \leq 0 \quad (21)$$

が成り立つ。したがって、破壊応力系から導かれた解  $T^F$  は正解より大きいことが保証される。 $T^F$  は速度  $v^K$  に無関係につり合い式から導かれる。このように、つり合い応力系から上界値を求める方法を上界つり合い解析と呼ぶことにする。

具体例として、ここでは浅い基礎の支持力問題を例にとって応力つり合い法によって上界を求める手順を示す。簡単のために  $\phi=0$  とし、図-7に示すような速度不連続線からなる破壊メカニズムを考える。図-7のブロック分割は図-4に示す例と全く同じのものである。また、この例では、基礎底面以外の地表面には、等分布荷重  $\sigma_0$  が作用しているものとする。

それぞれのブロック内および速度不連続線における応力・表面力は、破壊条件を満たすか、それができない場合は破壊条件を破るものでなければならない。そのような応力状態として、極限つり合い解析あるいは従来の上界解析と全く同様に、速度不連続線における応力が破壊条件

$$\tau = c \quad (22)$$

を満足するとしよう。図-7の受働領域Iにおける応力状態は、辺aにおいて、境界条件  $\bar{T} = \sigma_0$  を満足し、速度不連続線bとcにおいて、破壊条件(22)を満足しなければならない。そのような応力状態はモールの応力円を利用した用極法によって容易に求めることができる。陽極法によれば、領域Iの応力状態は、図-8の応力円Iで与えられ、辺a, b, cの応力は応力円上の点a, b, cで示される。このとき、応力円Iの極は  $P_1$  にあり、 $P_1$  と点a, b, cを結ぶ線の方がそれぞれ応力境界aと速度不連続線b, cの方向を与える。次に、領域IIの応力状態を表す応力円は、応力円Iの点cを通り、さらにc, d, eの3辺において破壊条件を満足しなければならない。また、領域IIは受働領域Iと主働領域IIIの応力状態と連続でなければならない。そのような応力状

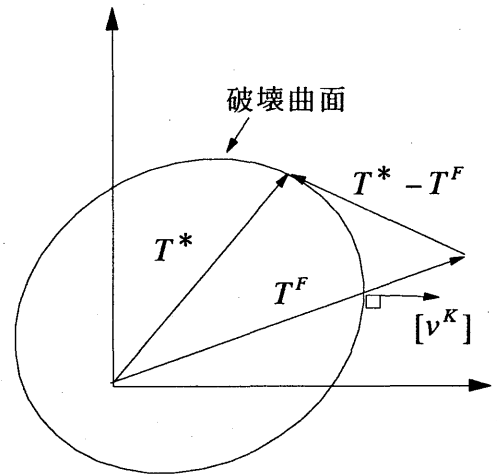


図-6 破壊応力系による塑性仕事

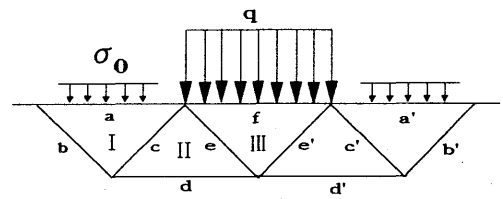


図-7 速度不連続線の例

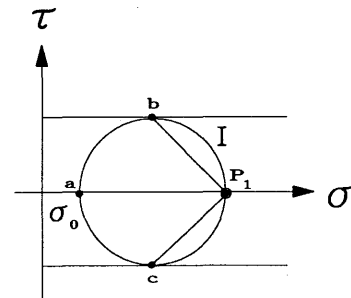


図-8 領域Iの応力円

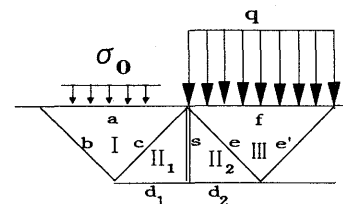


図-9 応力不連続線による領域IIの分割

態を与えるには、領域IIの内部に応力不連続線を設定して、領域を二分する以外に方法がない。図-9のように応力不連続線sを設けたときの各領域の応力円は図-10のようになる。図中の $P_1 \sim P_3$ はI~IIIの応力円の極である。境界fにおける解qは応力円IIIの点fで与えられ、

$$q = 6c + \sigma_0 \quad (23)$$

となる。図-10の応力円は、地盤を図-11のように分割したときの領域I~IIIの応力状態を表している。これ以外の領域IVとVにおいて、図-12に示すように破壊条件を満足する応力状態を想定することができる。したがって、このような破壊応力系から導かれる解は上界であることが保証される。実際にこの支持力問題の正解はよく知られているように、

$$q = 5.14c + \sigma_0 \quad (24)$$

であり、式(23)の解は正解より大きい。

図-9のようなブロック分割を考えると、図-10に示す応力状態は、すべてのブロックの境界で破壊条件と境界条件および力のつり合いを満たしており、そのまま極限つり合い解析の解となる。一方、Drescherら<sup>2)</sup>が示したように、図-7に示す速度不連続線に対して、従来の上界解析によって求めた解は極限つり合い解析と同じく、式(23)で与えられる<sup>1)</sup>。つまり、従来の上界解析および極限つり合い解析は、破壊条件を破るようなつり合い系の応力を暗黙の内に想定して解を求めていることになる。しかし、従来の解析法では、ブロック内部の応力状態を全く考慮していないので、解が正解より大きいことは保証されない。もし、ブロック内部の応力が破壊条件を満たすか、あるいは破壊条件を破っていることが確認されれば、従来の上界解析および極限つり合い解析は、いずれも上界つり合い解析であり、それらの解は式(21)により、正解より大きいことが保証される。

### 3.2 下界つり合い解析

正解より小さいことが保証される解を求めるには、地盤全体において、破壊条件を破らないようなつり合い応力すなわち静的可容応力を求めればよい。このような静的可容応力は、上界つり合い解析と同様に、モールの応力円と用極法を用いて、容易に求めることができる。

図-7に示すようなブロック分割を考えると、各領域の静的可容応力状態は図-13に示すようになる。静的可容応力を求める場合においても、領域IIの内部に応力不連続線を考える必要がある。領域II<sub>1</sub>の応力は応力円Iと同じであり、極は $P_1$ で与えられる。鉛直方向の速度不連続線sの応力は極 $P_1$ の位置にある。そして領域II<sub>2</sub>の応力は点sを通る任意の応力円でよく、その最大のも

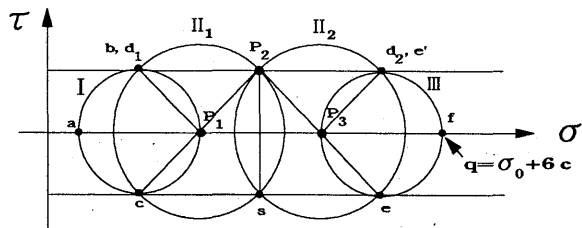


図-11 破壊応力場

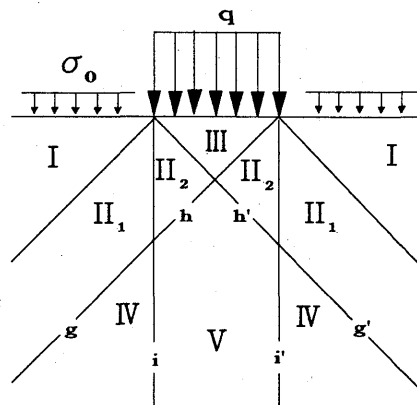


図-11 地盤の分割例

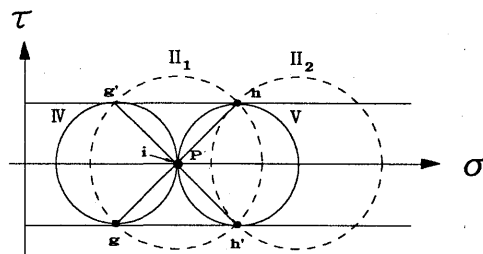


図-12 領域IV, Vの応力

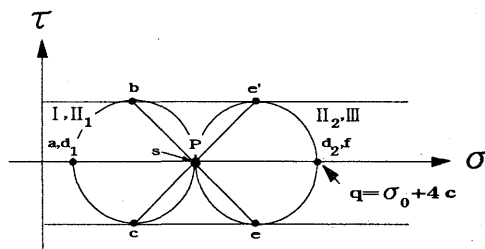


図-13 静的可容応力場

のは破壊線に接する応力円  $\Pi_2$  で与えられる。このとき、図-9の辺  $d_1, d_2$  においては、 $\tau=0$  であり、これらの辺は速度不連続線ではなくなることに注意する。領域IIIの応力円は円  $\Pi_2$  と等しくなり、境界fにおける解  $q$  は点fで与えられる。

このような静的可容応力場は図-11に示すような地盤のすべての領域で想定することができる。ちなみに、領域IVとVにおける応力状態は図-14に示すようになる。したがって、地盤全域で静的可容応力場が得られるため、その解が下界であることが保証される。以後、この解析法を下界つり合い解析法と呼ぶ。下界つり合い解析は、用極法を利用した下界解析と考えることができる。

上界つり合い解析と下界つり合い解析の解析手順を示すと図-15のようになる。すなわち、応力不連続線における応力をいかに設定するかの違いによって、同じ手法で上界と下界を同時に求めることができる。ここで示した解析例は、遷移領域を一つのブロックとした場合であるが、遷移領域を多くのブロックに分割して解析することも容易である。遷移領域を図-16に示すように  $n$  個のブロックに分割し、それぞれのブロックを二分するように応力不連続線を設けたときの、上界値と下界値は図-17に示すようになる。分割数を増やすにつれて、上・下界値は急速に正解である 5.14c に近くなることがわかる。

この例では、モールの応力円の幾何学的関係から、上・下界値を解析的に求めることができ、それぞれ次式で与えられる。

$$\text{上界 } q_U = 2c + \sum_n (4c \tan \frac{\pi}{4n}) \quad (25)$$

$$\text{下界 } q_L = 2c + \sum_n (2c \sin \frac{\pi}{2n}) \quad (26)$$

式(25), (26)において、 $n \rightarrow \infty$  の極限をとれば、

$$q_U = q_L = (2 + \pi)c \quad (27)$$

の正解が得られる。

#### 4. 結論

本研究で得られた結果をまとめると以下のようなになる。

- 1) 従来の上界定理では、塑性仕事の原理と最大塑性仕事の原理を併用することができず、解が正解より大きいことは保証されないことを示した。
- 2) 従来の上界解析にかわって、応力不連続線を利用して、破壊条件を破るようなつり合い応力系(破壊応力系)から、上界値を求める方法(上界つり合い解析)をあらたに提案した。

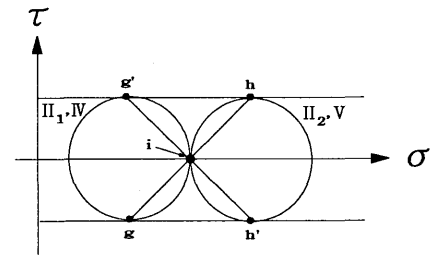
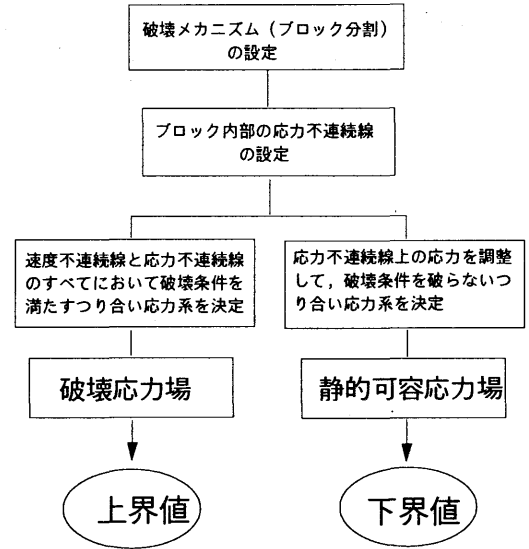


図-14 領域IV, Vの静的可容応力



【上界つり合い解析】

【下界つり合い解析】

図-15 上界・下界つり合い解析法の手順

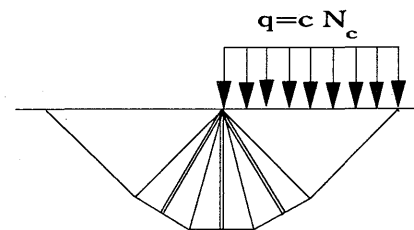


図-16 遷移領域の分割

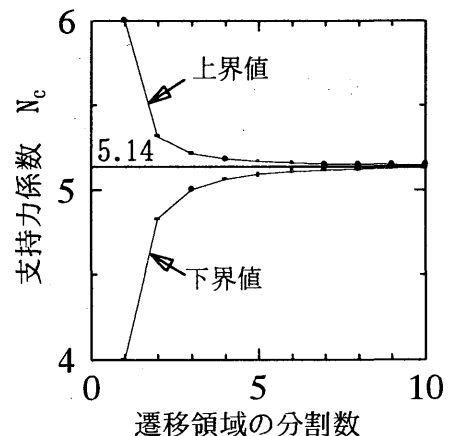


図-17 支持力の上・下界値



- 3) 従来の上界解析と極限つり合い解析は、破壊条件を破るようなつり合い応力系を求めていることと等価であることを示した。ブロック内部の応力状態が破壊条件を破っていることが保証されるならば、従来の上界解析と極限つり合い解析は上界つり合い解析であり、これらの方法による解が正解より大きいことが保証される。
- 4) 上界つり合い解析と同様の手法で、静的可容応力場からなる下界値を求める方法（下界つり合い法）を提案した。
- 5) 本研究で提案した上界つり合い解析と下界つり合い解析は、同じブロック分割に対して解を求めることができるため、正解の範囲を明確に求めることができる、さらに、ブロック分割を多くすれば、正解を高い精度で予測することもでき、非常に有用な解析法といえる。

#### 参考文献

- [1] Chen, W. F.: Limit analysis and soil plasticity. Amsterdam, Elsevier (1975)
- [2] Drescher, A. and Detoumay, E.: Limit load in translational failure mechanism for associative and non-associative, *Geotechnique*, Vol.43, No.3, pp.443-456, (1993)
- [3] Hill, R. : A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity, *Quat. J. Mech. Appl. Math.*, Vol.1, pp.18-28, (1948)
- [4] Chen W. F. and Rosenfarb, J. L. : Limit analysis solutions of earth pressure problems, *Soils and Foundations*, Vol.13, No.4 (1973)
- [5] Michalowski, R. L. : Upper-bound load estimates on square and rectangular footings, *Geotechnique*, Vol.51, No.9, pp.787-798
- [6] Davis, E. H. : Theories of plasticity and the failure of soil masses, "Soil Mechanics, Selected Topics", Butterworth, pp.341-380 (1968)
- [7] Collins, L. F. : A note on the interpretation of Coulomb's analysis of the thrust on rough retaining wall in terms of the limit theorems of plasticity theory *Geotechnique*, Vol.23, No.3, pp.442-447 (1973)