

超音速/極超音速飛翔体周りの流れ場の新しい計算手法

中村弘明** 真鍋圭司* 瀬崎新士** 西尾正富*

A New Calculation Method of Flowfield around Supersonic/Hypersonic Vehicles

Hiroaki NAKAMURA**, Keiji MANABE*, Shinji SEZAKI** and Masatomi NISHIO*

ABSTRACT

A calculation method of flowfield around supersonic/hypersonic vehicles based on the finite element method (FEM) has been presented. In this study, the pressure term of Navier-Stokes equations was included in the flux vector. By performing this scheme, the pressure term could be expressed as a non-differential form in the weighted residual equations. This idea made it possible to calculate compressible flowfields including a shock wave with dramatic less error and better stability with a very small artificial viscosity, compared to conventional FEM calculations. The correctness of the present method was confirmed by comparing shock shapes obtained by the Schlieren system and by comparing streamlines obtained by the electric discharge method. The comparisons were carried out by investigating the flowfield around a Mach 10 MESUR capsule.

キーワード：超音速流、極超音速流、再突入カプセル、有限要素法

Keywords: Supersonic Flow, Hypersonic Flow, Re-entry capsule, Finite Element Method

1. はじめに

近年、宇宙開発の分野において様々な研究が世界各地で行われている。中でも極超音速飛翔体周りの流れ場の解明は、飛翔体形状の設計や宇宙開発を進める上で非常に重要であり、極超音速域での空気力学的データを取得するために各種地上実験設備が開発され、極超音速気流に関する理論的・実験的研究が行われている。^{(1)~(7)}

特にCFD (Computational Fluid Dynamics) による計算機シミュレーションは、近年の計算機環境の発達を背景に今や不可欠な存在となっており、差分法⁽⁸⁾ や有限体積法⁽⁹⁾ による解析が主流となっている。これに対し、本研究で取り扱っているような有限要素法 (Finite

Element Method, 以下FEMと略記する。) による解析は、一般に固体の弾性変形や塑性変形などの変形解析の分野で取り扱われてきた例はあるが、⁽¹⁰⁾ 衝撃波を伴うような複雑な流れ場解析には不向きとされていた。その理由は、FEMでは連立方程式を解く作業があるため、差分法に比べて計算時間や記憶容量の点で不利となり、特に衝撃波を捕らえるような細かいメッシュが困難なためである。

しかしながらFEM計算においても、動的陽解法を用いれば、非常に多くの節点を必要とする問題の計算が可能となる。これは、質量マトリックスを対角化し、時間積分に陽解法を適用することによって、連立方程式を解

*工学部機械工学科

**工学部機械工学科 院生

く処理を不要とするためである。動的陽解法 FEM は、固体の塑性変形問題などへの適用が研究されており、例えば三次元旋削のような問題もシミュレーション可能であることが示された。(11)

以上のようなことから、本研究では FEM を用いて飛翔体周りの流れ場を従来の FEM による解析手法よりも小メモリーで高速に、かつ安定的に解析する手法を確立することを目的としている。

ここでは、動的陽解法 FEM を衝撃波を伴う圧縮性流体の解析に応用した。従来の圧縮性流体の FEM 定式化とは異なり、圧力を粘性応力とともに応力テンソルとして取り扱い、重み付き残差定式において非微分形式で表現した。そして、運動量の時間変化と節点内力の関係式 (Newton 第2法則) を導くことにより、動的陽解法の適用が可能となり、小メモリーで高速にシミュレーションを行うことが可能となった。このような圧力の取り扱い方を衝撃波を伴う流体力学の問題に適用させるのは、筆者らの知る限りでは初めてのことである。

なお、本計算手法の妥当性を確認するために計算例として、比較的衝撃波形状がよく知られている楔模型を用いて楔の先端から発生する衝撃波を計算し、シュリーレン法によって得られた可視化結果と比較を行った。また、本計算手法を他の形状に適用した場合の妥当性を確認するために、現在 NASA で計画されている火星から石などの標本を採取して地球にサンプルを持ち帰ってくる「サンプルリターンミッション」において使用される再突入カプセル (MESUR カプセル) を一例として取り上げ、シュリーレン法及び放電発光法によって得られた可視化結果と比較・検討した。

2. おもな記号

- U : 基本保存量ベクトル
- F_1, F_2, G_1, G_2 : 数値流束ベクトル
- ρ : 密度 kg/m^3
- u_i : 流速 m/s
- e : 単位質量当たりのエネルギー J/kg
- τ_{ij} : 粘性応力 (偏差応力) Pa
- p : 圧力 Pa
- q_i : 単位質量当たりの熱流束 J/kg
- γ : 比熱比
- μ : 粘性係数
- λ : 第二粘性係数
- T : 温度 K
- ε : 単位質量当たりの内部エネルギー J/kg
- R_e : レイノルズ数
- W : 重み関数

3. 動的陽解法 FEM の定式化

3.1 基礎方程式の FEM 定式化

圧縮性流体の支配方程式は、保存形式で表現すれば以下のように書き表すことができる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{F_2}{y} \right) - \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{G_2}{y} \right) = 0 \quad (1)$$

ここで、 U が未知数であり、この式的具体形は後述する。

(1) 式は 2 次元問題の定式であり、 x 軸を中心軸とした軸対称問題の場合は、アンダーラインを施した項を考慮する。

次に、 S_U, S_p 上で次の境界条件が与えられているものとする。

$$U = \bar{U}(\text{on } S_U), \quad G_1 n_x + G_2 n_y = \bar{P}(\text{on } S_p) \quad (2)$$

ここで、 \bar{U}, \bar{P} は既値量を示し、 S は境界上を表している。また、 n_x, n_y は、表面の外向き単位法線ベクトルの x, y 成分 (方向余弦) である。いま、 S_U 上で 0 となる重み関数 w を (1) 式に乗じて解析領域 A で積分し、Gauss の発散定理を用いて部分積分を行うと次のようになる。

$$\int_A w \frac{\partial U}{\partial t} dA - \int_A w \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA - \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} G_1 + \frac{\partial w}{\partial y} G_2 \right) dA + \int_{S_p} w \bar{P} dS - \int_A w \left(\frac{F_2}{y} - \frac{G_2 - G_2}{y} \right) dA \quad (3)$$

ここで、 $dA = dx dy$ であり、軸対称問題の場合はアンダーラインの項を考慮して、 $dA = 2\pi y dx dy$ とすればよい。この式からわかるように、 F_i は微分形、 G_i は非微分形である。このように部分積分により微分の階数を下げることで、本研究の特長である圧力 p を G_i に含め、マトリックスを対角化して陽解法を適用する時に、運動量保存則は直接、等価節点力と節点加速度の関係となる。すなわち、Newton の運動方程式そのものとして解析することが可能となり、これにより連立方程式を解く必要がなくなり、一般に差分法よりも劣るとされていた記憶容量及び計算速度を格段に改善することができる。

次に、離散化処理を行う。いま、要素内の変数 U, F_i, G_i を内挿関数 (形状関数) N を用い節点の値を縦に並べた列ベクトル $\{U\}, \{F_i\}, \{G_i\}$ によって次のように表す。

$$\begin{cases} U = \{N\}^T \{U\} \\ F_i = \{N\}^T \{F_i\} \\ G_i = \{N\}^T \{G_i\} \end{cases} \quad (4)$$

ここで、上添字 T は転置を表す。例えば、本計算で

用いた四角形要素の場合、1要素に4つの節点があるから、 $\{N\}$ 、 $\{U\}$ 、 $\{F\}$ 、 $\{G\}$ は次のようになる。

$$\begin{cases} \{N\}^T = \{N^{(1)} & N^{(2)} & \dots & N^{(4)}\} \\ \{U\}^T = \{U^{(1)} & U^{(2)} & \dots & U^{(4)}\} \\ \{F_i\}^T = \{F_i^{(1)} & F_i^{(2)} & \dots & F_i^{(4)}\} \\ \{G_i\}^T = \{G_i^{(1)} & G_i^{(2)} & \dots & G_i^{(4)}\} \end{cases} \quad (5)$$

ここで、括弧付き上添字の (i) は、1つの要素周りの節点の番号を表している。

また、重み関数 w も同様に内挿関数 ϕ を用いて節点の値で表すと次式のようにになる。

$$w = \{\phi\}^T \{w\} \quad (6)$$

これらを (3) 式に代入して整理すると、次のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} \int_A \{\phi\} \{N\}^T dA \frac{\partial U}{\partial \alpha} = & \\ - \left[\int_A \{\phi\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} dA \{F_1\} + \int_A \{\phi\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} dA \{F_2\} \right] & \\ - \left[\int_A \frac{\partial \{\phi\}}{\partial x} \{G_1\} dA + \int_A \frac{\partial \{\phi\}}{\partial y} \{G_2\} dA \right] + \int_{\Sigma_p} \{\phi\} p dS & \\ - \left[\int_A \{\phi\} \frac{\{N\}^T}{y} dA \{F_2\} - \int_A \{\phi\} \frac{\{N\}^T}{y} dA \{G_2\} - \{G_2\} \right] & \quad (7) \end{aligned}$$

本研究では動的陽解法を適用するために、(7) 式の左辺の係数を対角化した。すなわち、行列

$$\int_A \{\phi\} \{N\}^T dA$$

の各行を対角項に足し合わせて対角行列にした。これは、質量を節点に集中させる近似である。このように対角行列にすることにより、変数 U の時間積分に対して陽解法を適用することが可能となり、これにより連立方程式を解く必要がなくなり、小メモリーで高速にシミュレーションを行うことが可能となる。

ここで、各変数の具体形を示すと次のようになる。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = u_i \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_i \rho \\ u_i \rho u_x \\ u_i \rho u_y \\ u_i \rho e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ix} - p \delta_{ix} \\ \tau_{iy} - p \delta_{iy} \\ \sum u_m (\tau_{mi} - p \delta_{mi}) - q_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{F}'_2 = \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{G}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} - \tau_{\theta\theta} \\ u_x \tau_{xy} + u_y (\tau_{yy} - p) - q_y \end{bmatrix} \quad (9)$$

(8) 式において、 ρ は密度、 u_x 、 u_y はそれぞれ x 、 y

方向の速度、 e は単位質量当たりの全エネルギー、 τ_{ij} は粘性応力 (偏差応力)、 q_i は熱流速、 δ_{ij} はクロネッカーデルタであり、応力テンソル σ_{ij} と次のような関係がある。

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p \delta_{ij} \quad (10)$$

また、(9) 式は軸対称問題の場合に考慮しなければならない変数であり、 $\tau_{\theta\theta}$ は円周方向偏差応力である。未知数 U は保存則変数ベクトルであり、密度、運動量、エネルギーから成る縦ベクトルである。したがって、(1) 式の各成分すなわち第1行～第4行がそれぞれ質量、 x 方向運動量、 y 方向運動量、そしてエネルギーの保存式を表している。

一方、応力テンソル σ_{ij} は歪速度テンソルを θ_{ij} ($\theta_{ij} = 1/2(u_{ij} + u_{ji})$)、粘性係数を μ 、 λ と表すと次のような関係で与えられる。⁽¹²⁾

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu \theta_{ij} \quad (11)$$

また、粘性係数には μ 、 λ の他に流体の体積変化を妨げる方向に働く体積粘性係数 χ の3つの種類があり、これらの間には次のような関係がある。

$$\lambda = \chi - \frac{2}{3} \mu \quad (12)$$

体積粘性係数は音波の減衰の主な原因で、単原子分子の完全気体では $\chi = 0$ 、一般には $0 < \chi < \mu$ である。また、衝撃波の内部におけるように、単位時間当たりの体積変化割合、すなわち体積膨張速度の絶対値が大きくない限り、 χ を無視しても大きな誤差は生じない。したがって、Stokes の仮定により (12) 式

は $\lambda = -2\mu/3$ となり粘性応力の式を粘性係数の部分を μ のみでもって表現できる便利さがある。よって、ここではストークスの仮定により $\lambda = -2\mu/3$ とした。

また、 μ は層流粘性係数であり一定ではなく温度 T の関数となる。層流粘性係数と温度の関係式には無次元温度 T^* を使った Sutherland の公式がよく使われる。⁽¹³⁾

$$\frac{\mu}{\mu_{\infty}} = \frac{(T_{\infty} + C_1)}{(T_{\infty} T^* + C_1)} T^{*3/2} \quad (13)$$

ただし、 $T^* = T/T_{\infty}$ 、 $C_1 = 117$

また、(1)式だけでは、式が閉じないから解が求められない。残る関係式は圧力と他の状態量の関係を与える流体の状態方程式によって与えられる。最も基本的な状態方程式は完全ガスの仮定である。本研究では福山大学に設置している極超音速風洞を用いた実験と比較・検討しているので実験条件に合わせて比較的エンタルピーが低い場合に対して計算してきた。このようなことから、本研究では気体を完全ガスと仮定して計算を行った。完全ガスでは圧力は次の関係で表される。

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \quad (14)$$

ここで、 ε は単位質量あたりの内部エネルギーであり、 γ は比熱比である。(空気の場合 $\gamma = 1.4$)

ところで、一般的に圧縮性流体の解析では、圧力 p は流束ベクトル F_i に含めて解析が行われてきた。⁽¹⁴⁾すなわち、

$$F_i = \begin{bmatrix} u_i \rho \\ u_i \rho u_x + p \delta_{ix} \\ u_i \rho u_y + p \delta_{iy} \\ u_i (\rho\varepsilon + p) \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ix} \\ \tau_{iy} \\ \sum u_m \tau_{mi} - q_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

(15)式の形式で表現すると、ランキン・ユゴニオの式と同じ形になるから、この形式が用いられているものと考えられる。

しかしながら本研究では、(8)式に示したように、圧力 p を G_i に含ませ粘性応力とともに応力テンソルとして取り扱った。この理由については以下に示す通りである。いま、(7)式右辺第2項の項、つまり、

$$\left[\int_A \frac{\partial \{\phi\}}{\partial x} \{G_1\} dA + \int_A \frac{\partial \{\phi\}}{\partial y} \{G_2\} dA \right] \quad (16)$$

において、運動量保存則を取り扱う場合、この(16)式は仮想仕事の原理から内部応力に等価な節点力になる。これは、固体の変形解析の分野では以下のように表現される。

$$\{F\} = \int_A [B]^T \{\sigma\} dA \quad (17)$$

ここで、 $[B]$ は形状関数の微分からなるマトリックス、いわゆる B マトリックスであり、上添字 T はその転置、 $\{\sigma\}$ は応力、 $\{f\}$ は節点力からなるマトリックスである。したがって、左辺のマトリックスを対角化して陽解法を適用する時、(7)式の運動量保存則は直接、等価節点力と節点加速度の関係となる。すなわち、

$$\begin{aligned} & (\text{節点運動量の物質導関数}) = \\ & (\text{節点内力}) + (\text{節点外力}) \end{aligned} \quad (18)$$

というNewtonの運動方程式そのものとして解析できる。このことから連立方程式を解く必要がなくなり、一般に差分法よりも劣るとされていた記憶容量及び計算速度を格段に改善することができる。従来の手法の(15)式のように取り扱えば、等価節点力という意味がなくなる。さらに(8)式の F_i は U の物質導関数をEuler表示する時現れる移流項であり、 F_i が圧力を含むと加速度という意味もなさなくなる。このため、対角化を施したFEM定式に基づく陽解法には適さないと考えられる。

次にFEMの上流化の手法であるSUPG法を導入した。SUPG法は流速、圧力その他の未知変数に対して同次の補間関数を用いる場合に生じる不安定性を回避する方法であり、この方法を用いて局所的な流れの方向に数値的な安定性を確保するために必要な数値粘性を与えている。すなわち、重み関数に関する形状関数 $\{\phi\}$ として次式を用いた。

$$\{\phi\} = \{N\} + T \left(u_x \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right) \quad (19)$$

さらに、人工散逸項として、 ΔU を付加した。ここで、 Δ はラプラシアンであり、座標による2階微分であるが、部分積分によって1階微分とし、 G_i に含ませた。

3.2 計算手法の妥当性

本研究において、数値シミュレーションの妥当性を確かめるために、比較的衝撃波形状がよく知られている楔模型を使用して、楔に生じる衝撃波についてシュリーレン法によって得られた可視化結果と比較・検討を行った。以下に計算結果ならびにシュリーレン法との比較結果を示す。比較のために用いた楔模型は流れに対して 20° の傾きをもっている。この時使用した計算要素は4節点四角形アイソパラメトリック要素であり、水平方向に210個、垂直方向に90個に分割し、節点数19201、要素数18900で計算を行った。また、壁付近には境界層の発達を考慮して格子を細かく集中させた。図1に計算で使った計算格子の図を示す。計算条件としてはシュリーレン法による風洞実験から得られる可視化結果と比較・検討するために、マッハ10を想定し、一様流密度 $\rho = 4.5 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ 、静温度 $T = 54 \text{ K}$ 、一様流速度 $V = 1500 \text{ m/s}$ として、模型の前方から一様流を与えている。また、楔の壁面上には滑りなしの条件を与えている。Fig.2に数値計算ならびにシュリーレン法で得られた楔模型に生じる衝撃波形状に対する比較結果を示す。図2において、センターラインを境にして、上半分(領域A)がFEM

によって楔に生じる衝撃波を計算した結果であり、下半分(領域B)がシュリーレン法によって可視化した結果である。なお、FEMによって計算されている衝撃波は、衝撃波を通過する前の密度と衝撃波を通過した後の密度との比、すなわち $\rho = (\text{通過後の密度}) / (\text{通過前の密度})$ の値を等密度線で表したものである。この図から分かるように、本解析手法による計算結果の方は衝撃波角が $26.0^\circ \pm 0.3^\circ$ となり、一方シュリーレン法による可視化結果の方は衝撃波角が $26.2^\circ \pm 0.2^\circ$ と読み取ることができた。この結果、多少の誤差が認められるが、比較的良好に一致していることが分かる。

さらに、本計算手法を他の形状の流れ場解析に適用した場合の妥当性を確認するために、現在NASAで計画されている火星から石などの標本を採取して地球にサンプルを持ち帰ってくる「サンプルリターンミッション」において使用される再突入カプセル(MESURカプセル)を一例として取り上げ、以下に本計算手法による計算結果と従来の手法による計算結果との比較、さらには、シュリーレン法及び放電発光法から得られた可視化結果との比較結果について示す。

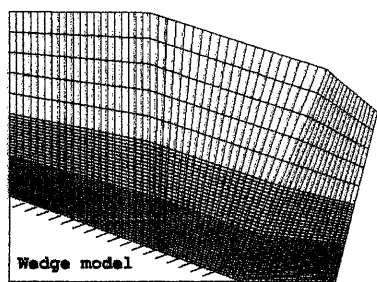


図1 計算格子図 (210×90)

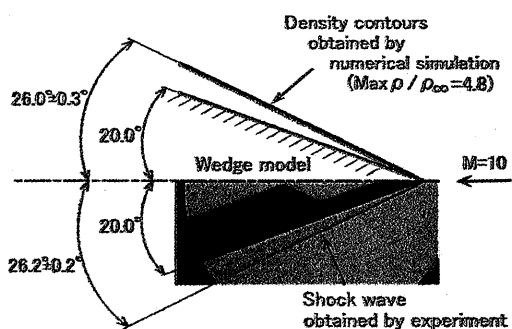


図2 楔に生じる衝撃波の計算結果と実験結果との比較

4. FEMによる数値計算

4.1 MESURモデルの流れ場解析における基礎方程式と計算手法

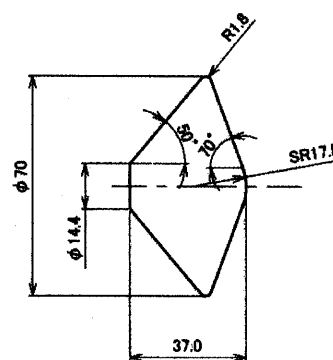


図3 計算及び実験で使った再突入カプセル形状

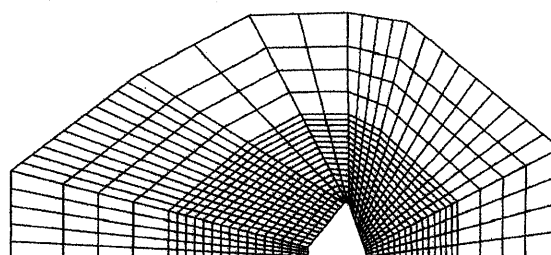


図4 計算格子図 (194×100)

ここでは、軸対称問題としてカプセル周りの流れ場を解析する。したがって、(1)式の圧縮性流体の支配方程式において、アンダーラインを施した項を考慮し、その他の手法は上述した方法を用いて計算を行っている。

4.2 計算条件

以上の計算手法を用い、再突入カプセル周りの流れ場の解析を行った。図3に数値解析及び実験で使ったモデルの形状を、また、図4に計算格子図を示す。本研究で使用した計算格子図は水平方向に194、垂直方向に100に分割し、節点数19695、要素数19400となっている。計算条件としては、福山大学に設置している極超音速風洞装置から得られる可視化結果と比較・検討するために、化学反応や実在気体効果は考慮せず、また、流れは層流と仮定し、一様流速 $V=1500\text{m/s}$ 、主流マッハ数 $M=10$ 、レイノルズ数 $R_e=1.95 \times 10^6$ (代表長さ1m)、一様流静圧 $P=70\text{Pa}$ 、静温度 $T=54\text{K}$ 、一様流密度 $\rho=4.5 \times 10^{-3}$ として、模型の右側から一様流を与えている。さらに、模型表面上は滑りなし、断熱壁としている。

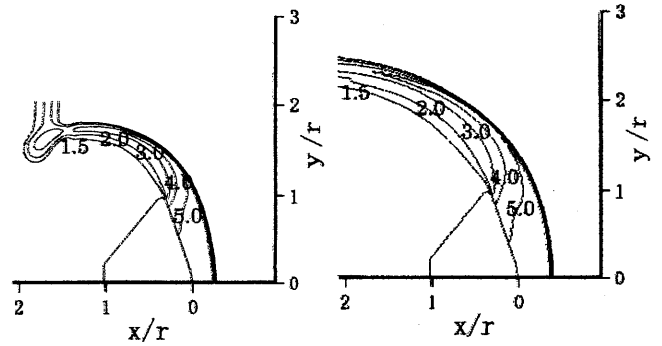
4.3 計算結果

以下に動的場解法FEMによって計算された $M=10$ の場合におけるカプセル周りの流れ場について、従来の手法、すなわち、(15)式で示されている形式を用

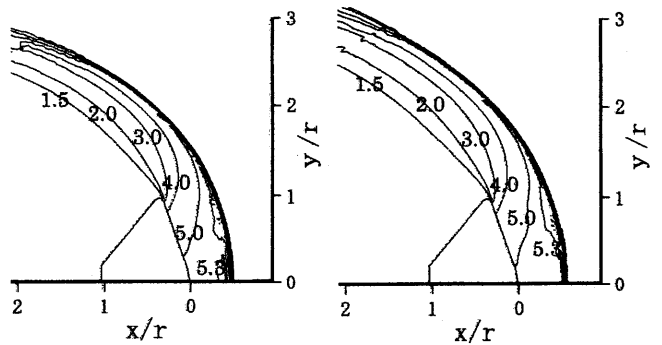
いて計算を行った場合 (case1) と、本計算手法の特長である圧力 p を G_i に含ませ粘性応力とともに応力テンソルとして取り扱った場合 (case2) との比較結果を示す。図5は case1 の場合における計算結果を、図6は case2 の場合における計算結果をそれぞれ等密度線で表現したものである。なお、計算条件の値としては、はじめ case1、case2 とともに同じ条件下で行なったが、case1 の方が計算が不安定になり発散するため時間増分の値を case2 の約 1/10 倍としてすなわち、case1 では $\Delta t = 0.2 \times 10^{-8}$ 、case2 では $\Delta t = 0.1 \times 10^{-7}$ として計算を行なっている。計算の定常状態への判定は衝撃波形状が繰り返し計算を行なっても変化しない、すなわち shock standoff distance (x/r) の値がある一定値になる時間のところで計算が定常状態になっていると判断した。なお、shock standoff distance (x/r) の値はカプセル半径 (r) を基準に無次元化してある。図5から分かるように、従来の手法、つまり圧力 P を G_i に含まないで動的陽解法を適用して計算を行った場合には、100,000 ステップ計算を行なっても、すなわち、一様流を与え始めてから 0.2ms 経過した状態においても、計算は定常状態になることはなく、反対にカプセル軸近傍付近の等密度線がなめらかではなくなっており計算が発散する傾向が現れてきている。また、shock standoff distance (x/r) の値も $x/r = 0.53$ となっており、図7に示されているようなシュリーレン法によって得られた可視化結果 ($x/r = 0.19$) と比較して約 2.8 倍の位置に衝撃波が発生していることになり、明らかに妥当性を欠いていることが分かる。このように、従来の手法に動的陽解法を適用した場合は正しい shock standoff distance (x/r) の値が得られないばかりか、計算も安定して行なうことができず、結果上述したように従来の手法を用いて計算を行なう時、対角化を施した FEM 定式に基づく陽解法には適さないということが分かる。

これに対し、本計算手法、つまり圧力 p を G_i に含めて粘性応力とともに応力テンソルとして取り扱った場合には、図5に見られたような計算が進むにつれカプセル軸近傍付近の等密度線が不安定になるという傾向もなく、10,000 ステップあたりから、すなわち一様流を与え始めてから 0.1ms 経過したあたりから計算が定常状態になる傾向が現れており、従来の手法を用いて計算を行なった場合よりも終始安定して計算が行なわれていることが分かる。さらに shock standoff distance (x/r) の値については、図7に示されているように実験結果では $x/r = 0.19$ 、計算結果では $x/r = 0.20$ となっており、よく一致していることが分かる。以上のことから、本計算手法を用いて解析する方が格段に安定的で、かつ実験結果に非常に近い流れ場現象を再現することができるということが分かる。

さらに、本計算手法の妥当性を確認するために、放電発光法によって得られたカプセル周りの流線の可視化結

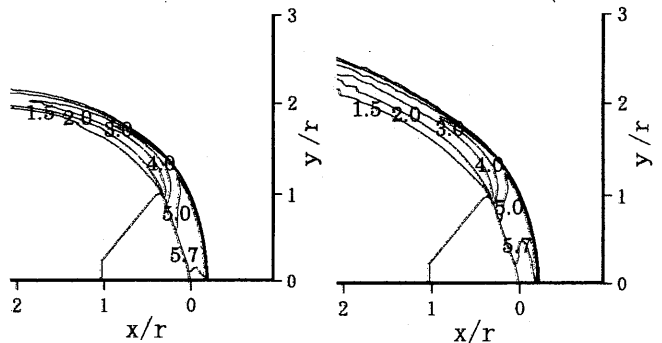


(a) 40000 steps, $x/r = 0.24$ (b) 60000 steps, $x/r = 0.37$

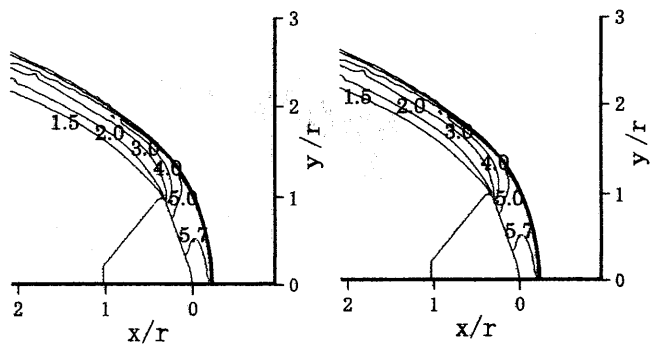


(c) 80000 steps, $x/r = 0.46$ (d) 100000 steps, $x/r = 0.53$

図5 従来の手法によって得られたカプセル周りの密度分布の計算結果



(a) 10000 steps, $x/r = 0.17$ (b) 20000 steps, $x/r = 0.20$



(c) 40000 steps, $x/r = 0.20$ (d) 60000 steps, $x/r = 0.20$

図6 本計算手法によって得られたカプセル周りの密度分布の計算結果

果と比較・検討を行った。図8は放電発光法によって得られた可視化結果であり、(a)はカプセル壁面から十分離れた場所での空間流線を、(b)は壁面近傍流線の可視化結果である。また、図9はカプセル周りの流れ場の計算結果であり、計算結果と実験結果とを比較したものが図10である。なお、破線で衝撃波及び流線を表現しているのがシュリーレン法及び放電発光法によって得られた可視化結果であり、実線で流線を表現しているのがFEMによる計算結果である。これらの比較結果から、空間流線及び壁面近傍流線共に実験結果と良く一致していることが分かる。なお、極超音速流における空間流線を図10のように比較して、計算手法及びその計算結果を確認するのは本論文が世界で初めてである。

以上の比較結果から本計算手法、すなわち圧力 p を粘性応力とともに応力テンソルとして取り扱い、 G_i に含ませ重み付き残差定式において非微分形として解析する手法は非常に有力な手法であるということが出来る。また、差分法に比べて計算時間や記憶容量の点で不利とされていた欠点を本計算手法によって格段に改善することができ、この結果、衝撃波を伴うような複雑な流れ場には不向きとされていたFEMを用いることが可能となった。

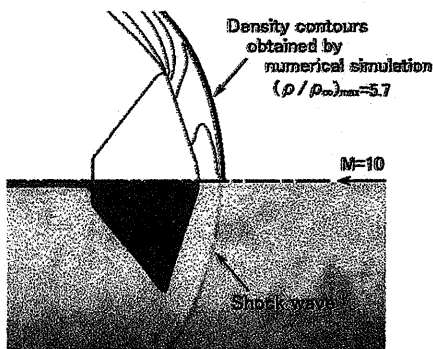
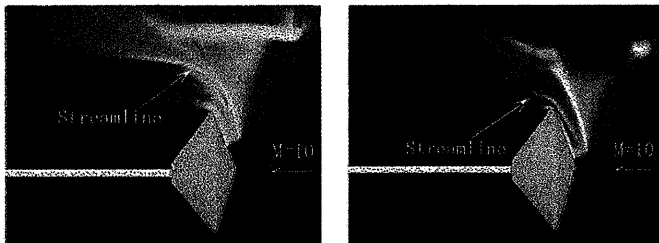
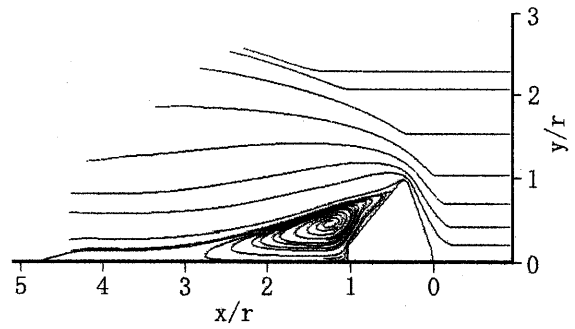


図7 本計算手法によって得られたカプセル周りの密度分布の計算結果とシュリーレン法によって得られた衝撃波との比較結果

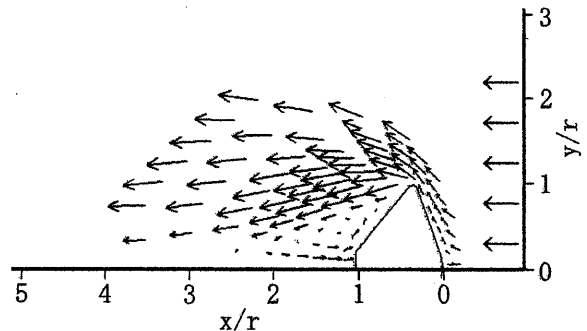


(a) 空間流線の可視化結果 (b) 壁面近傍流線の可視化結果

図8 放電発光法によって得られたカプセル周りの流線の可視化結果

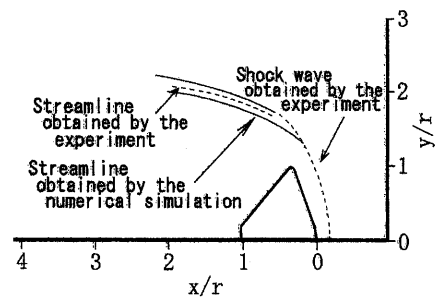


(a) カプセル周りの流線の計算結果

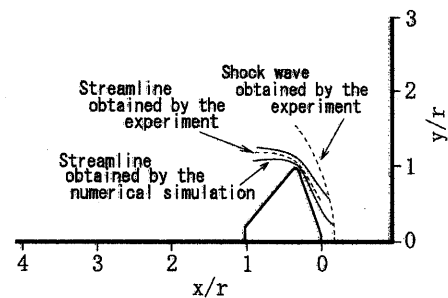


(b) カプセル周りの速度ベクトルの計算結果

図9 本計算手法によって得られたカプセル周りの流れ場の計算結果



(a) 空間流線



(b) 壁面近傍流線

図10 カプセル周りの流線の計算結果と実験結果との比較

5. おわりに

本研究では、圧縮性流体の解析プログラムを有限要素法 (FEM) を用いて作成した。変数の時間積分に対して陽解法を適用するため、従来の定式と異なり、圧力項を応力項から分離せずに定式化した。この場合、重み付き残差式の部分積分を行うことにより、応力の項が等価節点力という意味付けができ、陽解法を導入する際のマトリックス対角化が有効となる。

はじめに、比較的衝撃波形状がよく知られている楔を用いて楔の先端から発生する衝撃波を計算させ、シュリーレン法によって得られた可視化結果と比較を行い、本計算手法の妥当性を調べた。また、本計算手法を他の形状に適用した場合の妥当性を確認するために、再突入カプセル (MESUR カプセル) を一例として取り上げ、従来の手法を用いた場合の解析結果との比較、さらには、シュリーレン法及び放電発光法によって得られた可視化結果との比較・検討を行った。これらの結果から、本計算手法によるやり方の方が計算を高速に、かつ、安定的に行えるということが分かり、また、実験結果とも良い一致が認められた。以上のことから、本計算手法、すなわち圧力 p を粘性応力とともに応力テンソルとして取り扱い、 \mathbf{Q}_i に含ませ重み付き残差定式において非微分形とする処理は非常に有力であるということが分かり、また、差分法に比べて計算時間や記憶容量の点で不利とされていた欠点を本計算手法によって格段に改善することができ、この結果、衝撃波を伴うような複雑な流れ場には不向きとされていた FEM を用いることが可能となった。このようなことから、本計算手法は他のマッハ数の場合における流れ場に対しても適用可能であるということが出来る。なお、本研究では福山大学に設置している極超音速風洞を用いた実験と比較・検討しているので、実験条件に合わせて比較的エンタルピーが低い場合に対して計算を行っている。

参考文献

- (1)Virendra K.Dogra, James N.Moss and Joseph M.Price.:Near-Wake Structure for a Generic Configuration of Aeroassisted Space Transfer Vehicles, *J.Spacecraft Rockets.*, **31** (1994), pp.953-959.
- (2)M.S.Kim, J.M.Loellbach, and K.D.Lee.:Effects of Gas Models on Hypersonic Base Flow Calculations, *J.Spacecraft Rockets.*, **31** (1994), pp.223-230.
- (3)Virendra K.Dogra, Jeff C.Taylor and H.A.Hassan.:Effects of Chemistry on Blunt-Body Wake Structure, *AIAA J.*, **33** (1995), pp.463-469.
- (4)Moss, J.N., Mitcheltree, R.A., Dogra, V.K., and Wilmoth, R.G.:Hypersonic Blunt-Body Wake Computations Using DSMC and Navier-Stokes Solvers, *AIAA Paper 93-2807*, 1993.
- (5)Olynick, D.R., Taylor, J.C., and Hassan, H.A.:Comparisons Between DSMC and the Navier-Stokes Equations for Re-entry Flows, *AIAA Paper 93-2810*, 1993.
- (6)Nishio M.:Qualitative Model for Visualizing Shock Shapes, *AIAA J.*, **30** (1992), pp.2246-2248.
- (7)Nishio M.:Method for Visualizing Streamline Around Hypersonic Vehicles by Using Electric Discharge, *AIAA J.*, **30** (1992), pp.1662-1663.
- (8)外花延章, 山本悟:後流を考慮した大気圏再突入流れの数値解析, 日本航空宇宙学会北部支部 1998 年講演会および再使用ロケット/スペースプレーンシンポジウム講演論文集, pp.171-176.
- (9)岸田邦裕, 村上桂一, 藤原俊隆:ハイブリッド非構造格子を用いた大気圏再突入物体周りの解析平成 11 年度宇宙航行の力学シンポジウム (1999), pp.98-101.
- (10)真鍋圭司, 黄宗南, 上田完次:陰解法弾塑性有限要素法による切削機構の解析, *精密工学会誌*, **62** (1996), pp.1151-1155.
- (11)沖田淳也, 真鍋圭司, 上田完次:動的陽解法弾塑性 FEM による三次元切削過程のシミュレーション, *精密工学会誌*, **66** (2000), pp.429-433.
- (12)日本数値流体力学有限要素法研究委員会編:有限要素法による流れのシミュレーション, 2001, pp.281.
- (13)数値流体力学編集委員会編:圧縮性流体解析, 東京大学出版会, pp.10.
- (14)数値流体力学編集委員会編:圧縮性流体解析, 東京大学出版会, pp.117-143.