

Ho-Kalman アルゴリズムを用いた 実数有限オートマトンの最小実現

渡辺 浩司* 猪飼 武夫† 福永 邦雄†

Minimal Realization for Real Finite Automata using Ho-Kalman's Algorithm

Koji WATANABE* Takeo IKAI† Kunio FUKUNAGA†

ABSTRACT

Regarding finite automata (FAs) as discrete time dynamical systems, they can be represented as state space models over $B (= \{0, 1\})$ similar to the representation method of linear systems over the real numbers (R) in the field of dynamical systems and controls. Based on this representation, we first propose a minimal realization method for deterministic FAs using Ho-Kalman's algorithm which is well-known method in the field of dynamical systems and controls. Since state space models of FAs are bilinear over B , and Ho-Kalman's algorithm is, on the other hand, one for linear system over R , we add some extensions to their algorithm. We next extend state space models of FAs to those over R , and call them real finite automata. We then apply Ho-Kalman's algorithm to them.

キーワード: 実数有限オートマトン, 状態空間モデル, 最小実現, Ho-Kalman アルゴリズム

Keywords: real finite automata, state space model, minimal realization, Ho-Kalman's algorithm

1. まえがき

有限オートマトン (FA) は記号入力により内部状態を変える離散時間動的システムである。このような動的システムに対して、動的システム論 (現代制御理論) の分野では実数 R 上のシステムに対しての状態空間モデルによる表現と解析が確立している。

これに対しオートマトン理論では、FA は状態推移を定義する表、図、および関数等による取り扱いが行なわれているのみであり、動的システムとしての状態空間モデル表現やアプローチは存在していない。

しかし、状態と記号を $B (= \{0, 1\})$ 上でベクトル化し、状態推移関数、受理および初期状態をシステム行列 $(\{A_k\}, c, x_0)$ でパラメータ化することにより、FA は布尔半環 $B (= (B, +, \cdot))$ 上の双線形離散時間動的システムとして定式化でき、状態空間モデルが得られる [1]。そ

の結果、 R 上の線形システムと同様に、FA の状態空間モデル表現に対し、可到達性、可観測性、正準分解といった諸概念が定義でき、 B 上の状態空間モデルにおいても実現理論が展開できることが示されている [2-4]。

動的システムの入出力データから状態空間モデルのシステムパラメータを求める実現理論は Kalman [5] によって始められ、 R 上の線形システムにおける可到達性、可観測性と最小次元のシステムを求める最小実現との関係が明らかにされた。現在、最小実現を行なう種々のアルゴリズムが存在するが、それらは R 上のモデルに対する理論であるため B 上のモデルである FA に用いる場合には何らかの拡張を行なう必要がある。すでに実現理論の一つである Attasi [6] のアルゴリズムを拡張した FA の最小実現のアルゴリズム [2] が示されているが、このアルゴリズムでは実現される決定性 FA (DFA) のシステムパラメータを解として直接得ることができない。

* 情報処理工学科

† 大阪府立大学大学院

本研究ではまず、最小次元のシステムのシステムパラメータが直接に解として得られる Ho-Kalman の実現理論 [5, 7] による決定性 FA (DFA) の最小実現のアルゴリズムを導出する。しかし与えられる FA の入出力データから構成されるハンケル行列の中には導出するアルゴリズムを直接利用することができないものが存在する。これは FA が B 上のモデルであることに起因するが、こういったハンケル行列が与えられたときには Ho-Kalman のアルゴリズムを部分的に利用することにより実現を行なう。

次に FA の状態空間モデルを R 上に拡張し、拡張したモデルに対して Ho-Kalman 法を適用する。その結果実現される FA は最小 DFA より少ない状態数の、 R 上のシステムパラメータを持つ FA となる。

2. 有限オートマトンの状態空間モデル

2.1 状態空間モデル

まず始めに、有限オートマトン (FA) の状態空間モデルを導くためにブール半環 $B = (B, +, \cdot)$ (ここで $B = \{0, 1\}$) と呼ばれる代数系を導入する。 B 上の演算 (加法, 乗法) は $1+1=1$ を除いて整数上の演算と同じである。

FA は形式的に次の 5 項組で表現される。

$$M = (Q, \Sigma, \delta, p_0, F) \dots\dots\dots (1)$$

ここで Q は状態集合, Σ は入力記号集合, δ は状態推移関数, $p_0 (\in Q)$ は初期状態, $F (\subseteq Q)$ は受理状態の集合である。状態数を $|Q| = n$, 記号数を $|\Sigma| = m$ とする。

FA の B 上でのパラメータ表現は次のようにして行う。

1. Q の状態 q_i ($i = 1, \dots, n$) を n 次の i -単位ベクトル e_i (第 i 成分のみ 1 の列ベクトル) で表現し、初期状態 p_0 をベクトル化したものを x_0 とする。
2. 記号 $a_k (\in \Sigma)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) に関する $\delta(\cdot, a_k)$ を n 次正方行列 A_{a_k} (以下 A_k と略す) でパラメータ表現する。 $\delta(q_j, a_k) = Q_j^{(k)} (\subseteq Q)$ に対して A_k の各成分 $a_{ij}^{(k)}$ を次のように定める。ここで、 $i, j = 1, 2, \dots, n$ である。

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & (q_i \in Q_j^{(k)}) \\ 0 & (q_i \notin Q_j^{(k)}) \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

この A_k を状態推移行列と呼ぶ。

3. F を n 次列ベクトル $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ により表現する。

$$c_i = \begin{cases} 1 & (q_i \in F) \\ 0 & (q_i \notin F) \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

4. 入力記号 $a_k (\in \Sigma)$ を次のように符号化する。

$$u_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{時刻 } t \text{ に } a_k \text{ が入力} \\ & \text{されたとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

上に述べたことから、FA は B 上の双線形離散時間動的システムとして次のように表わされる。

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{k=1}^m u_k(t) A_k x(t) \\ y(t) = c^T x(t) \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

ただし $x(0) = x_0$ であり、モデル (5) において B 上ベクトル $x(t)$ が受理状態であるか否かにより、出力 $y(t) = 1/0$ となり、受理/非受理を表す。ただし、 c^T は c の転置ベクトルを表す。

双線形システムとしての FA は記号表現 (1) に対応してパラメータ表現 ($\{A_1, A_2, \dots, A_m\}, c, x_0$) (これ以降 ($\{A_k\}, c, x_0$) と略す) で表わす。 A_k, c , および x_0 をシステム行列あるいはシステムパラメータと呼ぶ。

2.2 可到達性および可観測性

入力記号列 $w = a_{k_{t-1}} a_{k_{t-2}} \dots a_{k_1} a_{k_0} (\in \Sigma^*)$ を FA に入力するとき、右の文字から入力されるものとし、これに対応するように w に対する状態推移行列 $A(w)$ を次のように定義する。

$$A(w) = A_{k_{t-1}} A_{k_{t-2}} \dots A_{k_1} A_{k_0} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $a_{k_t} (\in \Sigma)$ は時刻 t における入力記号, $A_{k_t} (\in \{A_1, A_2, \dots, A_m\})$ は a_{k_t} に対応する時刻 t における状態推移行列である。

次の行列 $R_{n, \infty}$ を可到達行列という。

$$R_{n, \infty} = [x_0, A_1 x_0, \dots, A_m x_0, A_1 A_1 x_0, \dots, A_m A_1 x_0, \dots, A(w) x_0, \dots] (w \in \Sigma^*) \dots (7)$$

$R_{n, \infty}$ の列ベクトル $A(w) x_0$ のラベル (列ラベル) を w とする。この可到達行列の i 行目は状態 q_i に対応し、 i 行目が零行ベクトルの時、 q_i は不可到達であるといい、初期状態からその状態へ推移する入力記号列は存在しない。また $R_{n, \infty}$ に零行ベクトルが存在しないとき ($\{A_k\}, x_0$) は完全可到達であるという。

次の行列

$$O_{\infty, n} = \begin{pmatrix} c^T \\ \vdots \\ c^T A(w) \\ \vdots \end{pmatrix} (w \in \Sigma^*) \dots\dots\dots (8)$$

を可観測行列という。 $O_{\infty, n}$ の行ベクトル $c^T A(w)$ のラベル (行ラベル) を w とする。この可観測行列の i 列目は状態 q_i に対応し i 列目が零列ベクトルである時、 q_i は

不可観測であるといい、その状態から受理状態へ推移する入力記号列は存在しない。また同じ列が存在する時、それらに対応する状態は出力側から見て等価な状態であり、識別不可能と呼ぶ。また $O_{\infty, n}$ に零列ベクトルが存在しないとき $(\{A_k\}, c)$ は完全可観測であるという。

2.3 特性応答とハンケル行列

初期状態が x_0 で入力記号列が w のとき、状態空間モデル (5) の一般解は次のように書ける。

$$x(t) = A(w)x_0, \quad y(t) = c^T A(w)x_0 \dots\dots\dots (9)$$

ただし $t \geq 1$ とし、 $y(0) = c^T x_0$ とする。

次に状態空間モデル (5) の入出力関係を表す特性応答を次のように定義する。

$$\{h(\varepsilon), h(a_1), \dots, h(a_m), \dots, h(w), \dots\} \quad (\forall w \in \Sigma^*) \dots (10)$$

ここで ε は空記号列とし、 $A(\varepsilon)$ は n 次単位行列とする。 $h(w)$ は入力記号列が w のときの FA の出力 (応答) であり、次式のように書ける。

$$h(w) = c^T A(w)x_0 \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) の特性応答を用いて、ハンケル行列と呼ばれる半無限行列 $\mathcal{H}_{\infty, \infty}$ を次のように構成する。

$$\mathcal{H}_{\infty, \infty} = \begin{matrix} & \varepsilon & \dots & v & \dots \\ \varepsilon & \begin{pmatrix} h(\varepsilon) & \dots & h(v) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ r & \begin{pmatrix} h(r) & \dots & h(rv) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{matrix} \dots\dots\dots (12)$$

任意の記号列 $w = rv$ に対して、 $h(w) = h(rv) (\in B)$ である。 $r (\in \Sigma^*)$ は行ラベル、 $v (\in \Sigma^*)$ は列ラベルであり、いずれも長さの短いものから辞書順に並べられる。

ハンケル行列 $\mathcal{H}_{\infty, \infty}$ は可観測行列 $O_{\infty, n}$ と可到達行列 $R_{n, \infty}$ の積に分解される。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\infty, \infty} &= \begin{matrix} & \varepsilon & \dots & v & \dots \\ \varepsilon & \begin{pmatrix} c^T x_0 & \dots & c^T A(v)x_0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ r & \begin{pmatrix} c^T A(r)x_0 & \dots & c^T A(r)A(v)x_0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} \varepsilon & \begin{pmatrix} c^T \\ \vdots \\ r & \begin{pmatrix} c^T A(r) \\ \vdots \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \varepsilon & \dots & v & \dots \\ (x_0 & \dots & A(v)x_0 & \dots) \end{matrix} \\ &= O_{\infty, n} R_{n, \infty} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで、完全可到達かつ完全可観測で全状態が識別可能 (完全可識別) であるとき、すなわち、可到達行列 $R_{n, \infty}$ に n 個の単位ベクトルがすべて存在し、可観測行列 $O_{\infty, n}$ の n 本の列ベクトルが全て非零で互いに異なるとき、DFA の状態空間モデル $(\{A_k\}, c, x_0)$ は、最小状態となっている。このとき、

$$\mathcal{H}_{\infty, \infty} = O_{\infty, n} R_{n, \infty} \dots\dots\dots (14)$$

であるから、ハンケル行列はその列ベクトルが可観測行列 $O_{\infty, n}$ の n 個の異なる非零列ベクトルと零ベクトルだけからなっている。よって、あるハンケル行列が得られたとき、その列ベクトルのうち異なる非零列ベクトルの数 \bar{n} が最小状態数を表していることが分かる。

2.4 双対オートマトン

ある FA M に対し、その逆語を受理する FA を M の双対 FA と呼び、 M_{dual} と書く。 M が DFA の場合でも一般に M_{dual} は非決定性 FA (NFA) となる。 M_{dual} のシステムパラメータは $M = (\{A_k\}, c, x_0)$ に対し、 $M_{dual} = (\{A_k^T\}, x_0, c)$ となり、 M_{dual} のハンケル行列は、 M のハンケル行列を転置したものになる。また、完全可到達な DFA の双対 FA を部分集合構成法 [8] で DFA に変換したものは最小 DFA となる。

3. 決定性有限オートマトンの最小実現

システム制御理論においては、線形システムの入出力関係が与えられたとき、それを用いてシステムパラメータを求めることを実現と呼び、特に、最小次元のシステムパラメータを求めることを最小実現と呼ぶ。最小実現を行なうアルゴリズムは種々存在するが、そのうち、Attasi による可換ハンケル行列 (行と列のラベルが可換な記号列で表されるハンケル行列) からの最小実現アルゴリズム [6] を非可換ハンケル行列 [9] に拡張することにより DFA の最小実現を行なうアルゴリズムがすでに示されている [2]。しかしこのアルゴリズムは実現される最小 DFA のシステムパラメータを直接解として得ることができない。そこで本章では最小次元のシステムのシステムパラメータが直接解として得られる Ho-Kalman の最小実現アルゴリズムを DFA に適用する。

3.1 DFA の最小実現

Ho-Kalman のアルゴリズムでは与えられたハンケル行列のランクを求めることが必要である。しかし FA のハンケル行列は減算の定義されていない半環 B 上の行列であり実数 R 上のランクの定義を用いることができない。そこでハンケル行列の異なる非零列ベクトルの数が最小実現される DFA の状態数であるということから、異なる非零列ベクトルの数をハンケル行列のランクとし

rank_D で表す. さらにハンケル行列の異なる非零行ベクトルの数を行ランクと呼び, rank_{row} で表す. R 上の行列ではこの行ランクはランクと一致するが B 上の行列のランクを上のように定義した場合は両者は一致しないことがあり, そのため Ho-Kalman のアルゴリズムを直接適用できないハンケル行列が存在する. この場合は Ho-Kalman のアルゴリズムを部分的に利用し, 実現を行なう. なお, 以下のアルゴリズムの正当性の証明は紙面の都合により省略する.

最小実現アルゴリズム 1

1. ハンケル行列のランクを rank_DH_{1,1}, rank_DH_{2,2}, ... と順に求め,

$$\text{rank}_D \mathcal{H}_{c,c} = \text{rank}_D \mathcal{H}_{c+1,c+1} = \dots = \bar{n} \quad (15)$$

となる最小の c を求める. \bar{n} は最小実現される DFA の状態数となる. 次に

$$\text{rank}_{row} \mathcal{H}_{r,c} = \text{rank}_{row} \mathcal{H}_{r+1,c} = \dots = \bar{n} \quad (16)$$

を満たす最小の r を求める. ただし, 行ランクがランクに満たない場合は r が求められない. このときは後述のアルゴリズム 2 を用いる.

2. 部分ハンケル行列 $\mathcal{H}_{r,c}$ を構成する.
3. $\mathcal{H}_{r,c}$ から異なる非零列ベクトルを左から順に抜き出し $P_{r,\bar{n}}$ を構成する. この $P_{r,\bar{n}}$ を用いて $\mathcal{H}_{r,c}$ を $\mathcal{H}_{r,c} = P_{r,\bar{n}} Q_{\bar{n},c}$ と分解する.
4. 次式を満たす行列 $S_{r,r}, T_{c,c}$ を求める.

$$S_{r,r} P_{r,\bar{n}} = \begin{pmatrix} I_{\bar{n}} \\ \alpha \end{pmatrix} \dots \dots \dots (17)$$

$$Q_{\bar{n},c} T_{c,c} = \begin{pmatrix} I_{\bar{n}} & \beta \end{pmatrix} \dots \dots \dots (18)$$

ただし $I_{\bar{n}}$ は \bar{n} 次単位行列, α は $(r - \bar{n}) \times \bar{n}$, β は $\bar{n} \times (c - \bar{n})$ の任意の行列とする.

5. 次式より最小 DFA のシステムパラメータ ($\{\bar{A}_k\}, \bar{c}, \bar{x}_0$) が得られる.

$$\bar{A}_k = E_r^T \cdot S_{r,r} \cdot \mathcal{H}_{r,c}^{(k)} \cdot T_{c,c} \cdot E_c \dots \dots \dots (19)$$

$$\bar{c}^T = (1 | 0_{1,r-1}) \cdot \mathcal{H}_{r,c} \cdot T_{c,c} \cdot E_c \dots \dots \dots (20)$$

$$\bar{x}_0 = E_r^T \cdot S_{r,r} \cdot \mathcal{H}_{r,c} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{c-1,1} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (21)$$

ただし

$$E_x = \begin{pmatrix} I_{\bar{n}} \\ 0_{x-\bar{n},\bar{n}} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (22)$$

とし, $0_{x,y}$ は $x \times y$ の零行列, $\mathcal{H}_{r,c}^{(k)}$ は $\mathcal{H}_{r,c}$ の r_i 行 c_j 列の値を入力記号列 $r_i a_k c_j$ に対する出力とした行列とする.

$\bar{n} \times \bar{n}$ 行列 A_k を与えられたハンケル行列に対する最小 DFA の状態推移行列とすると $\mathcal{H}_{r,c}^{(k)} = P_{r,\bar{n}} A_k Q_{\bar{n},c}$ が成り立つ. また, 式 (20), (21) より \bar{c}^T は $P_{r,\bar{n}}$ の第 1 行目, \bar{x}_0 は $Q_{\bar{n},c}$ の第 1 列目であることがわかる.

Ho-Kalman のアルゴリズムでは

$$S_{r,r} \mathcal{H}_{r,c} T_{c,c} = \begin{pmatrix} I_{\bar{n}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (23)$$

を満たす $S_{r,r}, T_{c,c}$ を求めるが, ここでは可到達行列, 可観測行列に対応するように $\mathcal{H}_{r,c} = P_{r,\bar{n}} Q_{\bar{n},c}$ という分解を行なうため式 (17), (18) の方法を用いる. しかしこの変更は Ho-Kalman のアルゴリズムには何ら影響を与えない. また $S_{r,r}$ は B 上ではなく R 上の行列とし, $S_{r,r}$ を求めるときは $P_{r,\bar{n}}$ も R 上の行列とみなして計算を行なう.

example

図 1 の DFA M_1 の入出力データ (特性応答) が与えられたとする. なお, M_1 は最小 DFA である.

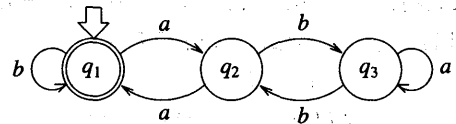


図 1 : 3 状態 DFA M_1
Fig.1 : 3 state DFA M_1

1. ハンケル行列は次のようになる.

$$\mathcal{H}_{\infty,\infty} = \begin{matrix} & \varepsilon & a & b & aa & ba & ab & bb & \dots \\ \varepsilon & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} \\ a & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix} \\ b & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} \\ aa & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} \\ ba & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix} \\ ab & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \\ bb & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} \\ \vdots & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (24)$$

2. 式 (15), (16) より $\bar{n} = 3, r = 6, c = 5$ になる.

3. 部分ハンケル行列 $\mathcal{H}_{6,5}$ は次のようになる.

$$\mathcal{H}_{6,5} = \begin{matrix} & \varepsilon & a & b & aa & ba \\ \varepsilon & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ a & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ b & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ aa & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ ba & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ ab & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (25)$$

4. $\mathcal{H}_{6,5} = P_{6,3}Q_{3,5}$ の分解を行なう.

$$P_{6,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

$$Q_{3,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

5. 式 (17), (18) を満たす $S_{6,6}, T_{5,5}$ を求める.

$$S_{6,6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

$$T_{5,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

6. $\mathcal{H}_{6,5}^{(a)}, \mathcal{H}_{6,5}^{(b)}$ は次のようになる.

$$\mathcal{H}_{6,5}^{(a)} = \begin{matrix} & a & aa & ab & aaa & aba \\ \varepsilon & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a & \\ b & \\ aa & \\ ba & \\ ab & \end{matrix} \dots (30)$$

$$\mathcal{H}_{6,5}^{(b)} = \begin{matrix} & b & ba & bb & baa & bba \\ \varepsilon & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ a & \\ b & \\ aa & \\ ba & \\ ab & \end{matrix} \dots (31)$$

7. 式 (19) ~ (21) より最小 DFA $\overline{M}_1 = (\{\overline{A}_k\}, \overline{c}, \overline{x}_0)$ のシステムパラメータが次のように求まる.

$$\overline{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \overline{A}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (32)$$

$$\overline{c}^T = (1 \ 0 \ 0), \overline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

得られたシステムパラメータは M_1 のシステムパラメータと一致する.

さて, ハンケル行列の中には行ランクがランクよりも小さい場合が存在する. そのようなハンケル行列が与えられたときは式 (16) を満たす r を求めることができない. このときは双対 DFA を用いた, 次のアルゴリズム 2 により最小実現を行う.

最小実現アルゴリズム 2

- 与えられたハンケル行列を転置する.
- 転置されたハンケル行列を用いてアルゴリズム 1 により DFA \overline{M} を実現する.
- 実現された DFA \overline{M} の双対 FA \overline{M}_{dual} を構成する.
- \overline{M}_{dual} を部分集合構成法により DFA に変換する. 変換された DFA \overline{M}' が最小実現された DFA である.

4. 実数有限オートマトンの最小実現

4.1 FA の状態空間モデルの実数上への拡張

FA のシステム行列 $(\{A_k\}, c, x_0)$ を R 上の行列とするモデルを実数有限オートマトン (RFA) と呼ぶ. RFA の状態空間モデルでは B 上の値をとる出力変数 $y(t)$ に関する方程式にしきい値関数 $g(\cdot)$

$$g(\alpha) = \begin{cases} 1 & (\alpha \geq \theta) \\ 0 & (\alpha < \theta) \end{cases} \quad (\theta \text{ はしきい値}) \dots\dots (34)$$

を導入し, $y(t) = g(c^T x(t))$ とする.

4.2 RFA の最小実現

FA の状態空間モデルを R 上に拡張することで, Ho-Kalman 法を B 上への拡張なしに FA に適用できる.

以下に RFA の最小実現アルゴリズムを簡単に示す. なお, 証明は省略する.

- $\text{rank } \mathcal{H}_{c,c} = \text{rank } \mathcal{H}_{c+1,c+1} = \dots = \tilde{n}$ となる最小の c を求める. なお, rank は R 上のランクである.
- 次式を満たす c 次正則行列 P, Q を求める.

$$P\mathcal{H}_{c,c}Q = \left[\begin{array}{c|c} I_{\tilde{n}} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \dots\dots\dots (35)$$

以下, $J = P\mathcal{H}_{c,c}Q$ とする.

- 最小 RFA $\tilde{M} = (\{\tilde{A}_k\}, \tilde{c}, \tilde{x}_0)$ は次式より求められる.

$$\tilde{A}_k = E_{\tilde{n},c}^T (J P \mathcal{H}_{c,c}^{(k)} Q J) E_{\tilde{n},c}^T \dots\dots\dots (36)$$

$$\tilde{c} = E_{1,c} (\mathcal{H}_{c,c} Q J) E_{\tilde{n},c}^T \dots\dots\dots (37)$$

$$\tilde{x}_0 = E_{\tilde{n},c}^T (P \mathcal{H}_{c,c}) E_{1,c}^T \dots\dots\dots (38)$$

さて, 最小 DFA \overline{M} の状態数 \bar{n} と, 最小 RFA \tilde{M} の状態数 \tilde{n} には次の関係が存在する.

$$\bar{n} \geq \tilde{n} \dots\dots\dots (39)$$

これは \bar{n} がハンケル行列の非零の互いに異なる列数、 \bar{n} がハンケル行列の R 上のランクであることから明らかである。つまり、RFAを導入することによって、より少ない次数でのFAの構成が可能となる。

また、FAのハンケル行列は B 上の行列であることから、式(35)の P, Q は有理数上の行列となる。よって実現されるFA \tilde{M} は実際には有理数上のシステムパラメータを持つFA(QFA)となる。

5. むすび

本報告で導入した実数有限オートマトン(RFA)は、近年盛んに研究が行われているアナログ計算機械の一種である[10, 11]。[11]ではチューリング機械(TM)の状態空間モデルを計算可能実数上に拡張し、その計算能力がTMを越えることを示している。これと同様に、RFAの言語受理能力もFAを越えると考えられるが、その解明には至っていない。さらに、QFAとRFAの能力の差、他のアナログ計算機械との比較等、今後の検討課題は多い。

参考文献

- [1] 猪飼, 越智, 小迫, “2次神経回路網による線形空間および有限オートマトンの実現と学習”, 信学技報, NC92-71(1992-11).
- [2] 猪飼, 益本, 福永, “有限オートマトンの可到達性、可観測性および最小実現”, 信学技報, COMP95-62(1995-11).
- [3] 猪飼, 古澤, 福永, “状態空間モデルによる決定性有限オートマトンの正準分解と最小実現”, 信学技報, CST96-31(1997-01).
- [4] 渡辺, 猪飼, 福永, “マトロイド理論に基づく有限オートマトンの非決定性最小化”, 信学技報, CST96-32(1997-01).
- [5] R. E. Kalman, P. L. Falb and M. A. Arbib, “Topics in Mathematical System Theory”, McGraw-Hill(1969).
- [6] S. Attasi, “Modelling and Recursive Estimation for Double Indexed Sequences”, in R. K. Mehra and D. G. Lainiotis ed. “System Identification Advances and Case Studies”, pp.289-348 (1976).
- [7] 相良, 秋月, 中津, 片山, “システム同定”, 計測自動制御学会(1981).
- [8] 富田, 横森, “オートマトン・言語理論”, 森北出版(1992).
- [9] A. Salomaa and M. Soittola, “Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series”, Springer-Verlag(1978).
- [10] C. Moore, “Dynamical recognizers: real-time language recognition by analog computers”, Theoretical Computer Science, vol.201, pp.99-136(1998).
- [11] 猪飼, 南雲, 福永, “チューリング機械のアナログ動的モデル”, 信学技報, COMP98-68(1998).