福山大学工学部紀要
第27巻 2003年12月

多項式の因数分解を利用した劣化画像の復元法

尾関 孝史* 渡邊 栄治† 石川 洋* 小林 富士男*

A Restoration Method of Degraded Images using Factorization of Polynomials

Takashi OZEKI*, Eiji WATANABE†, Hiroshi ISHIKAWA*, Fujio KOBAYASHI*

ABSTRACT

Usually, observed images are degraded and represented by the convolution of two signals. Here, one is an original image and the other is a point spread function (PSF) which causes degradation of original images. Blind deconvolution (BD) is the problem to estimate an original image and a PSF from only a degraded image. If we have no restriction condition to signals, we can not determine a pair of two signals. Because this problem sometimes has many solutions and , in the worst case, has infinite solutions. Nevertheless, almost everyone does not discuss this indeterminate property. In this paper, we show that BD has only finite solutions if an original image and a PSF are nonzero over a restricted domain , in other words, an observed image has finite support. Then we propose an algorithm to find all finite solutions under this boundary condition. The key of the proof is to use z transformation and factorization of polynomials. Moreover, we give a sufficient condition in which BD has only one solution. Finally we confirm that we can extract all sets of an original image and a PSF from a degraded image by using our algorithm in numerical examples.

キーワード: ブラインドデコンボルーション，画像復元，デジタル信号処理，z 変換，多項式の因数分解

Keywords: Blind Deconvolution, Image Restoration, Digital Signal Processing, Z Transformation, Factorization of Polynomials

1. まえがき

通常，観測画像は観測を通して劣化しており，2つの信号の畳み込みで表される．1つは原画像であり，もう一つは劣化の要因となった点広がり関数 (PSF) である．劣化画像の情報のみから原画像と PSF を推定しようとする問題はブラインドデコンボルーション (BD) と呼ばれている [1].

この問題を解く方法として，Ayers と Dainty が提案したフーリエ反復法 [2] がある．この反復法は，推定した解と真の解の誤差を計る評価関数ができるだけ小さくなるように，画像の制約条件とフーリエ変換を用いて近似解を更新していく方法である．反復法は，評価関数の設定が簡単なことや画像に対するさまざまな制約条件を導入し易いことから，その後の BD 問題を解くさまざまな方法に使用されている．これとは別に，Lane と Bates らが提案しているゼロシート法 [3] がある．この方法は，z 変換と因数分解を用いることによって，BD を解決しようとする方法である．

しかし，2つの信号に特別な制約条件を設けなければ，BD は必ずしも唯一の解を持つとは限らない．また，最悪の場合には BD は無限の解を持つこともある不定な問題である．にもか変わらず，BD の不定性を取り扱った論文はほとんど見当たらない．

そこで，本論文では，画像に境界条件を設けることにより，BD の解候補が有限個に絞られることを証明し，

* 福山大学工学部情報処理工学科　† 甲南大学理工学部情報システム工学科

その全ての候補を求めるアルゴリズムを提案する．また，BDが唯一つの解を持つための十分条件を示す．そして，計算機実験で提案したアルゴリズムを用いることで，劣化画像から全ての原画像とPSFの組を推定できることを確認する．なお，本論文で扱われる画像は全てディジタル画像である．

2. ブラインドデコンボルーション

劣化した観測画像を $g(x,y)$，原画像を $f(x,y)$, 劣化の要因となった点広がり関数を $h(x,y)$ とすると

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) \quad \cdots\cdots (1)$$

と表すことができる．ここで演算子 $*$ は畳み込みである．また，点広がり関数 $h(x,y)$ は

$$\sum h(x,y) = 1 \quad \cdots\cdots (2)$$

を満たしている．$g(x,y)$ が与えられたときに，式 (1), (2) を満たす $h(x,y)$ と $f(x,y)$ の組合せは一般には解空間をなし，無限個存在する．このため，ブラインドデコンボルーション問題を解くためには，原画像や点広がり関数に何らかの制約を付ける必要がある．

3. BDの可解性

そこで，多くの論文では，Bates ら [4] に見られるように，原画像および点広がり関数の大きさが有限 (即ち，劣化画像のサポートがコンパクト) であることを仮定している．即ち，原画像や点広がり関数が，ある有限領域の外では0の値を取るという境界条件を設けている．以下では常にこの条件が成立しているとする．

始めに，1次元信号の場合のBDを考える．

定理 3.1 有限の範囲でのみ正の値を取り，他では0を取る1次元信号 $g(x)$ が，

$$g(x) = h(x) * f(x) \quad \cdots\cdots (3)$$

のように，同様に有限長で正である2つの信号 $h(x), f(x)$ の畳み込みに分解できるとする．また，$h(x)$ は正の定数 p に対して

$$\sum h(x) = p \quad \cdots\cdots (4)$$

とする．すると，これらを満たす1次元信号 $f(x)$ と $h(x)$ の組は有限個である．

(証明) $g(x)$ の0でない区間の長さを M とし，$h(x)$ の0でない区間の長さを $K(K=1,2,\cdots,M)$ とする．すると，$f(x)$ の0でない長さの区間は $M-K+1$ となる．$g(x)$ をz変換し，

$$G(z) = \sum_{x=0}^{M-1} g(x) z^i \quad \cdots\cdots (5)$$

とおくと，$G(z)$ は z に関して，$M-1$ 次式である．そこで，$G(z)$ を因数分解すると，代数学の基本定理により，$M-1$ 個の複素数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{M-1}$ が存在して，

$$G(z) = g(M-1)\prod_{i=1}^{M-1}(z-\alpha_i) \quad \cdots\cdots (6)$$

を満たす．$G(z)$ の因数 $z-\alpha_i$ から，$K-1$ 個取り出した因数の積からなる多項式を $H(z)$，残りの因数の積からなる多項式を $F(z)$ とする．この取り出し方は ${}_{M-1}C_{K-1}$ ある．従って，2つの多項式を展開したときに，$H(z)$ と $F(z)$ の係数が全て0以上の実数となる因数の組合せの個数はそれ以下の個数となる．このような条件を満たす $H(z), F(z)$ の組合せを全て求める．そして，2つの多項式を逆z変換し，$\sum h(x) = p$ となるように $h(x)$ と $f(x)$ を定数倍すると全ての解候補 $h(x), f(x)$ が得られる．これらの総数は高々，$\sum_{K=1}^{M} {}_{M-1}C_{K-1} = 2^{M-1}$ 個である．■

[例 1]

$$g(x) = \begin{pmatrix} 15 & 68 & 100 & 48 \end{pmatrix}$$

で与えられるとき，$M=4$ で

$$\begin{aligned} G(z) &= 48z^3 + 100z^2 + 68z + 15 \\ &= 48\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z+\frac{5}{6}\right) \end{aligned}$$

と分解できる．ここで，$p=1$ とすると，

(1) $K=1$ の場合，$H(z)=1$ だから，

$$h(x) = (1), \quad f(x) = (15\ 68\ 100\ 48)$$

(2) $K=2$ の場合，
$H(z) = (z+\frac{1}{2})$ と取れば，

$$h(x) = \left(\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\right), \quad f(x) = (45\ 114\ 72)$$

$H(z) = (z+\frac{3}{4})$ と取れば，

$$h(x) = \left(\frac{4}{7}\ \frac{3}{7}\right), \quad f(x) = (35\ 112\ 84)$$

$H(z) = (z+\frac{5}{6})$ と取れば

$$h(x) = \left(\frac{6}{11}\ \frac{5}{11}\right), \quad f(x) = (33\ 110\ 88)$$

(3) $K=3$ の場合

$H(z)=(z+\frac{3}{4})(z+\frac{5}{6})$ と取れば，

$$h(x)=\left(\frac{24}{77}\ \frac{38}{77}\ \frac{15}{77}\right),\quad f(x)=(77\ 154)$$

$H(z)=(z+\frac{1}{2})(z+\frac{5}{6})$ と取れば，

$$h(x)=\left(\frac{12}{33}\ \frac{16}{33}\ \frac{5}{33}\right),\quad f(x)=(99\ 132)$$

$H(z)=(z+\frac{1}{2})(z+\frac{3}{4})$ と取れば，

$$h(x)=\left(\frac{8}{22}\ \frac{11}{22}\ \frac{3}{22}\right),\quad f(x)=(110\ 132)$$

(4) $K=4$ の場合 $H(z)=(z+\frac{1}{2})(z+\frac{3}{4})(z+\frac{5}{6})$ だから，

$$h(x)=(\frac{48}{231}\ \frac{100}{231}\ \frac{68}{231}\ \frac{15}{231}),\quad f(x)=(231)$$

以上、合計8通り (2^{4-1}) の解がある．

2次元画像の場合も定理3.1と同様な性質が成り立つ．

定理 3.2 劣化画像 $g(x,y)$ のサポートがコンパクトなら，式(1)，(2)を満たす $h(\boldsymbol{x})$ と $f(\boldsymbol{x})$ の組は有限個である．

（証明） 劣化画像 $g(x,y)$ のサポート部分の大きさを，$M\times N$ とし，この範囲の外では常に0の値とする．また，適当な座標変換を用いることにより，サポート部分が(1，1)から (M,N) に位置にあるとする．そして，$h(x,y)$ のサポート部分の大きさを $K\times L$ $(1\le K\le M, 1\le L\le N)$ とする．すると，$f(x,y)$ の0でない長さの区間は $(M-K+1)\times(N-L+1)$ となる．$g(x,y)$ をz変換し，

$$G(z,w)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}g(x,y)z^iw^j \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

とおく．すると，参考文献[5]の定理4．9から，多項式 $g(z,w)$ の既約因数に分解する仕方は定数因子を除けば一意であるから，その最高次数の係数が1であるいくつかの既約因数 $\varphi(z,y)$ を用いて，

$$G(z)=g(M-1,N-1)\prod\varphi_i(z,w)\ \cdots\cdots\cdots (8)$$

と表すことができる．その因数 $\varphi(z,w)$ から，z の次数が M，w の因数が N になるように取り出した因数の積からなる多項式を $H(z,w)$，残りの因数の積からなる多項式を $F(z,w)$ とする．この取り出し方は高々有限個である．更に画像に関する制約条件，すなわち，2つの多項式を展開したときに，$H(z,w)$ と $F(z,w)$ の係数が全て0以上の実数となる因数の組合せの個数はそれ以下の個数となる．そして，2つの多項式を逆z変換し，$\sum h(x,w)=p$ となるように $h(x,y)$ と $f(x,y)$ を定数倍すると全ての解候補 $h(x,y),f(x,y)$ が得られる． ■

[例2] 観測画像が

$$g(x,y)=\begin{pmatrix}6&10&4\\21&35&14\\9&15&6\end{pmatrix}$$

で与えられるとき，

$$\begin{aligned}G(z,w)&=6+10z+4z^2+21w+35zw+14z^2w\\&\quad+9w^2+15zw^2+6z^2w^2\\&=(z+1)(2z+3)(w+2)(3w+1)\end{aligned}$$

と分解できる．従って，推定する点広がり関数の大きさを 2×2 とすると，この場合4つの解候補を得ることができる．即ち，

(1) $H(z,w)=(z+1)(w+2)$ と取れば，

$$h(x,y)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix},\quad f(x,y)=6\begin{pmatrix}3&2\\9&6\end{pmatrix}$$

(2) $H(z,w)=(z+1)(3w+1)$ と取れば，

$$h(x,y)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix},\quad f(x,y)=9\begin{pmatrix}6&4\\3&2\end{pmatrix}$$

(3) $H(z,w)=(2z+3)(w+2)$ と取れば，

$$h(x,y)=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix},\quad f(x,y)=15\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$$

(4) $H(z,w)=(2z+3)(3w+1)$ と取れば，

$$h(x,y)=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}6&9\\2&3\end{pmatrix},\quad f(x,y)=21\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}$$

である．

しかし，定理3.2に従って，現実に劣化画像のブラインドデコンボルーションを行なうには2つの大きな問題がある．1つめの問題は2変数多項式 $g(z,w)$ を既約因数の積にどのようにして分解するのかという問題である．2つめの問題は，劣化画像が大きくなったとき，2変数多項式の因数分解は時間がかかることである．1変数の多項式のばあいは，Durand-Kerner-Aberth 法[6](以下，DKA法)を用いて実数係数のn次代数方程式の全ての根を求めることで，複素係数の範囲で，1次多項式の積に完全に因数分解可能である．そこで，以下のように1変数多項式の因数分解を利用して，2変数多項式の既約因数を求める．

2次元BDのアルゴリズム

劣化画像$g(x,y)$のサポート部分の大きさを，$M\times N$とし，この範囲の外では常に0の値とする．また，適当な座標変換を用いることにより，サポート部分が$(1,1)$から(M,N)に位置にあるとする．

1. 今，$x=1,2,\cdots,N$に対して

$$g(y)=\sum_{x=1}^{M}g(x,y)$$

と定めると，$y=1,2,\cdots,N$に対して，$g(y)\neq 0$が成り立つ．

2. $g(y)$をz変換したものを，$G(z)$とする．この1変数多項式G(z)にDKA法を用いて，1次式の積に因数分解する．

3. 推定するPSFの大きさを，$K\times L$としたとき，$H(z)$として，$G(z)$の因数からL個の因数の積を取りだす．ただし，$G(z)$を展開したとき，その係数が0以上の実数となる組合せを取り出す．このとき，$H(z)$の係数から，$h(x,y)$のL個の各行$(i=1,2,\cdots,L)$の和の値$p_i=\sum_{x=1}^{K}h(x,i)$が得られる．

4. $p=p_1$として，$h(x,1)$と$f(x,N)$の畳み込みによる1次元BD問題を定理3.1を用いて解く．

5. $k=2,3,\cdots,N-1$で，
連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^{K}h(i,k)=p_k$$

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{L}h(i,j)f(i+l-K,N-L+1-k+j)$$
$$=g(l,N+1-k)$$
$$(ただし,1\leq l\leq M)$$

を順次解いて，$h(x,y),f(x,y)$の残りのすべての値を求める．

6. 得られた$h(x,y),f(x,y)$の畳み込みを行ない，$g(x,y)$が得られるか検証する．得られなければ，3. で別の組合せを考える．

[例3] 観測画像が

$$g(x,y)=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 & 6 \\ 13 & 25 & 31 & 12 \\ 25 & 43 & 49 & 18 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるとき，

$$g(0)=3+8+13+6=30$$
$$g(1)=13+25+31+12=81$$
$$g(2)=25+43+49+18=135$$
$$g(3)=7+8+9+0=24$$

から，$G(z)$の係数が0以上の実数となる分解は

$$G(z)=30+81z+135z^2+24z^3$$
$$=3(5+z)(2+5z+8z^2)$$

のみである．ここで，原画像の大きさを3×3とすると，推定する点広がり関数の大きさを2×2となるから，$H(z)=5+z$となり，その係数から

$$p_1=\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$$
$$p_2=\frac{5}{1+5}=\frac{5}{6}$$

を得る．次に，$h(x,1)*f(x,3)=g(x,4)$を解く．$G(z,3)$の係数が0以上の実数となる分解は

$$G(z,1)=7+8z+9z^2+0z^3$$
$$=(1+0z)(7+8z+9z^2)$$

のみである．そして，$p_1=\frac{1}{6}$だから，

$$h(x,1)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},\quad f(x,3)=6\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

を得る．次に，5元連立1次方程式

$$h(1,2)+h(2,2)=p_2$$
$$\sum_{i=2}^{2}\sum_{j=1}^{2}h(i,j)f(i-1,j+1)=g(1,3)$$
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}h(i,j)f(i,j+1)=g(2,3)$$
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}h(i,j)f(i+1,j+1)=g(3,3)$$
$$\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{2}h(i,j)f(i+2,j+1)=g(4,3)$$

を解いて，

$$h(x,2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad f(x,2)=6\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

を得る．最後に，畳み込み

$$h(x,2)*f(x,1)=g(x,1)$$

の3元連立1次方程式を解いて，

$$f(x,1)=6\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

を得る．まとめて，

$$h(x,y)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\quad f(x,y)=6\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

となる．

4. 計算機実験

図1は大きさが5×5の白画素(255)からなる正方形の周囲に黒画素(0)を1画素付け加えたテスト画像である．このテスト画像をぼけフィルタ

$$h(x,y)=\begin{pmatrix}0.002285 & 0.043234 & 0.002285\\ 0.043234 & 0.817918 & 0.043234\\ 0.002285 & 0.043234 & 0.002285\end{pmatrix}$$

でぼかした画像が図2である．

図1 テスト画像
Fig1. Test Image.

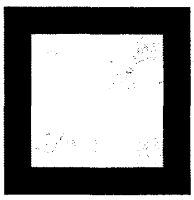

図2 ぼけ画像
Fig2. Blurred Image.

以下では，2次元BDのアルゴリズムに従って，図2から図1の復元を行なう．劣化画像から

$$g(1)=60.951871$$
$$g(2)=1214.046664$$
$$g(3)=1274.998535$$
$$g(4)=1274.998535$$
$$g(5)=1274.998535$$
$$g(6)=1214.046664$$
$$g(7)=60.951871$$

が得られ，これらを係数とする6次多項式

$$G(z)=\sum_{i=0}^{6}g(i+1)z^i=0$$

を解いて，6個の解

$$\left.\begin{aligned}z_1&=-18.865112+0.000000i\\ z_2&=-0.809017-0.587785i\\ z_3&=0.309017-0.951057i\\ z_4&=-0.809017+0.587785i\\ z_5&=0.309017+0.951057i\\ z_6&=-0.053008+0.000000i\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

を得る．$h(x,y)$の大きさを3×3とすると，これらから，係数が全て0以上の実数となるのは以下の2通りである．

(1) $H(z)=z^2-(z_1+z_6)z+z_1z_6$ の場合，

$$p_1=0.047805$$
$$p_2=0.904389$$
$$p_3=0.047805$$

が得られる．

(2) $H(z)=z^2-(z_2+z_4)z+z_2z_4$ の場合，

$$q_1=0.276393$$
$$q_2=0.447214$$
$$q_3=0.276393$$

次に，$h(x,1)*f(x,5)=g(x,7)$ を解く．

$$g(1,7)=0.582766$$
$$g(2,7)=11.607608$$
$$g(3,7)=12.190374$$
$$g(4,7)=12.190374$$
$$g(5,7)=12.190374$$
$$g(6,7)=11.607608$$
$$g(7,7)=0.582766$$

が得られ，これらを係数とする6次多項式

$$G(z,7)=\sum_{i=0}^{6}g(i+1,7)z^i=0$$

を解くと，式(9)と同じ6個の解が得られる．従って，$h(x,1)$は次の4個になる．

(1) $H(z)=H(z,1)=(z-z_1)(z-z_6)$ の場合

$$\begin{aligned}h(x,1)&=(p_1^2\quad p_1p_2\quad p_1p_3)\\ &=(0.002285\quad 0.043234\quad 0.002285)\end{aligned}$$

この場合，

$$f(x,5)=255\,(1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1)$$

となる．以下，畳み込みからなる連立１次方程式を順次解くと，

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} 0.002285 & 0.043234 & 0.002285 \\ 0.043234 & 0.817918 & 0.043234 \\ 0.002285 & 0.043234 & 0.002285 \end{pmatrix}$$

と

$$h(x,y) = 255 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の解を得る．

(2) $H(z) = (z - z_1)(z - z_6)$, $H(z,1) = (z - z_2)(z - z_4)$ の場合

$$\begin{aligned} h(x,1) &= (p_1q_1 \quad p_1q_2 \quad p_1q_3) \\ &= (0.013213 \quad 0.021379 \quad 0.013213) \end{aligned}$$

この場合，

$$\begin{aligned} &f(x,5) \\ &= \frac{p_1}{q_1} \cdot 255\,(1 \quad 18.300 \quad -9.692 \quad 18.300 \quad 1) \\ &= 44.105\,(1 \quad 18.300 \quad -9.692 \quad 18.300 \quad 1) \end{aligned}$$

となる．この場合，負の数があるので解として不適である．

(3) $H(z) = (z - z_2)(z - z_4)$, $H(z,1) = (z - z_1)(z - z_6)$ の場合

$$\begin{aligned} h(x,1) &= (q_1p_1 \quad q_1p_2 \quad q_1p_3) \\ &= (0.013213 \quad 0.249967 \quad 0.013213) \end{aligned}$$

この場合，

$$\begin{aligned} f(x,5) &= \frac{p_1}{q_1} \cdot 255\,(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \\ &= 44.105\,(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \end{aligned}$$

となる．以下，畳み込みからなる連立１次方程式を順次解くと，

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} 0.013213 & 0.249967 & 0.013213 \\ 0.021379 & 0.404455 & 0.021379 \\ 0.013213 & 0.249967 & 0.013213 \end{pmatrix}$$

と

$$f(x,4) = 807.130\,(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

$$f(x,3) = -427.470\,(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

となる．この場合，負の数があるので解として不適である．

(4) $H(z) = (z - z_2)(z - z_4)$, $H(z,1) = (z - z_2)(z - z_4)$ の場合

$$\begin{aligned} h(x,1) &= (q_1q_1 \quad q_1q_2 \quad q_1q_3) \\ &= (0.076393 \quad 0.123607 \quad 0.076393) \end{aligned}$$

この場合，

$$\begin{aligned} &f(x,5) \\ &= \frac{p_1^2}{q_1^2} \cdot 255\,(1 \quad 18.300 \quad -9.692 \quad 18.300 \quad 1) \\ &= 7.629\,(1 \quad 18.300 \quad -9.692 \quad 18.300 \quad 1) \end{aligned}$$

となる．この場合も，負の数があるので解として不適である．

5. むすび

点広がり関数及び原画像が有界であるという境界条件を与えることで，２次元ブラインドデコンボルーション問題の解候補が有限個になることを証明した．また，その全ての解候補を求めるアルゴリズムを提案した．本論文で提案したアルゴリズムは，２次元問題を１次元問題に帰着しているため，画像が大きい場合にも有効に使用できる．また，簡単なテスト画像に対して，数値実験を行ない，点広がり関数と原画像の両方とも復元できることを確認した．

参考文献

[1] T. G. Stockham, T. M. Cannon and R. B. Ingebresten, "Blind deconvolution through digital signal processing", Proc. IEEE, Vol. 63, No. 4, pp. 678–692, 1975.

[2] G. R. Ayers and J. C. Dainty, "Iterative blind deconvolution method and its applications", Opt. Lett., Vol. 13, No. 7, pp. 547–549, 1988.

[3] R. G. Lane and R. H. T. Bates, "Automatic multidimensional deconvolution", J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 4, No. 1, pp. 180–188, 1987.

[4] 南 茂夫監修 河田 聡編著，科学計測のためのデータ処理入門，CQ 出版社，pp. 108–119，2002.

[5] 高木 貞治著，代数学講義，共立出版，pp. 40–137，1965.

[6] 山本 哲朗著，数値解析入門，サイエンス社，pp. 14–16，1976.