

相似変換のためのパラメータの近似値の自動計算法

服部 進* 関 章良* 西川 正直**

Automatic Estimation of Approximations of the Parameters for Similarity Transformation

Susumu Hattori, Akiyoshi Seki, Masanao Nishikawa

ABSTRACT

In close range photogrammetry for precise 3D industrial measurement, the point coordinates in any model space are often required to be transformed to an specific object space. The transformation is executed by the least squares method, when more than three control points. Since the equation is nonlinear the approximations of parameters have to be evaluated at the start of calculation. This paper reviews the methods ever found to automatically estimate approximations of the parameters for similarity or orthogonal transformation and discusses their most suitable applications according to the situations of measurement.

Keywords: 相似変換、直交変換、工業計測、画像処理、特異値分解、四元数、
Similarity Transformation, Orthogonal Transformation, Industrial Measurement,
Image Processing, Singular Value Decomposition, Quaternion

1. はじめに

CCDカメラを使った精密工業計測、ロボットビジョンなどでは、モデル空間を対象空間に相似変換ないし直行変換する作業が頻繁に必要である。対象空間、モデル空間に3点以上の3次元座標が分かっている点(基準点)が与えられるとき、変換のパラメータは最小二乗法で求めることになるが、モデル空間と対象空間の座標系の方向、スケールが極端に異なるときには、パラメータの近似値を推定しなければ最小二乗法は収束しない。この論文は閉じた形の相似変換、ないし直行変換の方法を整理し、パラメータの近似値を自動で推定する方法を示す。閉じた形の直行変換は、すでにShut が詳しく議論しているが、彼の目的は空中三角測量であったので、工業計測のためには必ずしも十分でない。ここでは、かれの論

文を整理し、かつ不足する部分を補充することで、実用上必要な、相似変換、直交変換の理論をまとめた。

相似変換は $X = s R x + b$ で表現できる。ここに X : 対象空間点座標ベクトル、 s : スケール、 R : 直行行列、 x : モデル空間点座標ベクトル、 b : 平行移動ベクトルである。また直交変換は相似変換のとき、とくにスケールが $s=1$ で与えられている場合をいう。これはモデル空間にスケールの基準尺がおかれているときに当てはまる。

対象空間に3次元基準点がある場合、スケール s 、平行移動の項は、両空間の座標系の原点を重心に移動し、各点と重心との距離を比較することで求められる。ただしこの時の s は近似値であるので、直交行列の3このパラメータの近似値をもとめた後、再度

の厳密調整が必要になる。

モデル空間にスケールのみが置いてある計測では、(スケール $s=1$ の直交変換になり)、調整計算はフリーネットワークで行わねばならない。このときには対象物の3次元形状のみが問題であるので、座標系を対象空間に再度変換する必要はあまりないが、たとえば設計値と比較するため、別の座標系に変換するときがある。このとき直交行列 R を以下に述べるようにSVDを使って求めれば誤差論的に問題がなく、繰り返し計算はいらない。

平面基準点と高さの基準点が別れている場合には、アフィン変換で求めた係数行列を最もこれに近い直交行列に変換する。平面基準点のみが与えられているときも考えられるが、実用上めったにおきないので、この論文では省略する。

さらに撮影に関して、外部標定要素の情報がないならば、モデル空間で画像を2枚ずつ閉じた形で相互標定して、さらにそれらを自動で接続していかねばならない。このときには回転軸周りのEuler角を用いねばならない(服部 1995)。しかし撮影が制御できる場合では、固定軸周りのEuler角をとるのが便利である。これは方位角(azimuth)、鉛直角(elevation)、ローリング(rolling)であるが、方位角というのは、工業計測では奇妙な用語であるので、ここでは水平書く角と同意の意味で用いていることに注意する。

2. 直行列の表現

まず回転を表わすための直行列の表現法をまとめておく。写真測量では常識的にEuler角を使っているが、ほかにもいろいろな表わしかたがあり、場合によっては他の方法を使う方が便利である。主に次が用いられるが、すべて同値である。

(1) 3軸の周りに順番に回転させる方法—回転軸周りの ω 、 ϕ 、 κ (いわゆるEuler角)、水平角、鉛直角、ローリング(theodoliteでの角度表現と同じ)

(2) ある回転軸周りに1回だけ回転させる方法—交代行列で直行列を表わす方法、Rodrigues表現ないしRodrigues行列、quaternion表現

2.1. Euler角

X軸周りに、原点に向かって反時計周りの回転を ω 、Y、Z軸周りの同様の回転を ϕ 、 κ としたときの回転行列はそれぞれ、

$$R_{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}, R_{\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix},$$

$$R_{\kappa} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

である。まずモデル座標系のZ軸の周りに κ だけ回転し、回転した座標系のY軸の周りに ϕ だけ回転する。さらに回転した座標系のZ軸周りに ω だけ回転したところ対象空間座標系になったとする。この合成回転行列はもちろん $R=R_{\omega} R_{\phi} R_{\kappa}$ であり、次の式で表わされる。

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\kappa & & & & & \\ \sin\omega\sin\phi\cos\kappa + \cos\omega\sin\kappa & & & & & \\ -\cos\omega\sin\phi\cos\kappa + \sin\omega\sin\kappa & & & & & \\ -\cos\phi\sin\kappa & & \sin\phi & & & \\ -\sin\omega\sin\phi\sin\kappa + \cos\omega\cos\kappa & & -\sin\omega\cos\phi & & & \\ \cos\omega\sin\phi\sin\kappa + \sin\omega\cos\kappa & & \cos\omega\cos\phi & & & \end{bmatrix} \quad (2)$$

この表現は一般的で簡潔であるが、工業計測のように四方八方から対象を撮影する場合は、撮影の方向と回転角の関係が直感的に捕まえにくい。そのため目測で回転の初期値を与えようとする、かなり経験を積みねばならない。

2.2. 方位角(azimuth)、鉛直角(elevation)、ローリング(rolling)

固定軸周りに回転角を取る方法であって、セオドライトの座標系と同じである。このときのモデル座標系と、対象空間座標系の関係は次のようである。図1のように向かって右方向にX軸、高さ方向にY軸、手前にZ軸を取る。回転前にはモデル座標系と対象空間座標系は一致しているとする。まず対象空間のZ軸からX軸に向かって水平角 θ だけまわす。つぎにXZ平面からY軸へ向かって鉛直角 ϕ だけまわす。最後に回転してできた新しいZ軸(これをモデル座標系のz軸とする)の周りに回転角 κ だけ原点に向かって反時計周りにまわす。こうしてできた座標系をモデル座標系

とする。それぞれの対象空間座標系からモデル座標系に向かう回転行列は

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

である。合成した回転行列は

$$R = R_\kappa^T R_\phi^T R_\theta^T = \begin{bmatrix} \cos\kappa\cos\theta + \sin\kappa\sin\phi\sin\theta & & & \\ -\sin\kappa\cos\theta - \cos\kappa\sin\phi\sin\theta & & & \\ & -\cos\phi\sin\theta & & \\ -\sin\kappa\cos\phi & \cos\kappa\sin\theta - \sin\kappa\sin\phi\cos\theta & & \\ \cos\kappa\cos\phi & \sin\kappa\sin\theta + \cos\kappa\sin\phi\cos\theta & & \\ -\sin\phi & & \cos\phi\cos\theta & \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

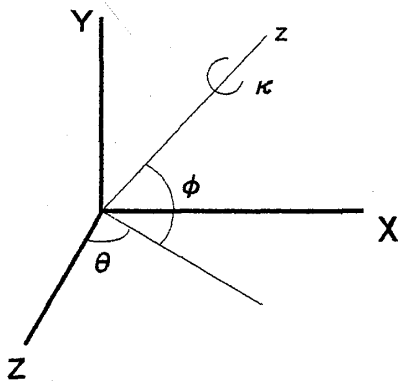


図1 方位角、鉛直角、ローリング

になる。この回転順序は変えられないことに注意する。この回転角の定義では、モデル座標系と対象空間座標系が与えられたとき、回転角を容易に推定できる。われわれは実用的な工業計測にこれを用いている。

2.3. 交代行列、ロドリゲス行列、quaternionの表現

直行列を式5のように、3このパラメータを持った交代行列 S であらわす。

$$R = (dI - S)^{-1}(dI + S) \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

直交行列 R を a, b, c, d を使って直接に表わすと、次のようになる。

$$R = \begin{bmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - 2cd & 2ac + 2bd & 2bc - 2ad \\ 2ab + 2cd & d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2ac + 2bd & 2bc - 2ad \\ 2ac - 2bd & 2bc + 2ad & d^2 - a^2 - b^2 + c^2 & 2ab - 2cd \\ 2ac + 2bd & 2bc - 2ad & 2ab - 2cd & d^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{d^2 + a^2 + b^2 + c^2} \quad (6)$$

回転行列のパラメータは3こであるので a, b, c, d には拘束が1つ必要である。典型的には d=1、または a²+b²+c²+d²=1 を用いる。

Rodrigues 表現はある回転の軸まわりに1回回転させる表現である。回転の軸方向の単位ベクトルを p=(p₁, p₂, p₃)^T (p₁²+p₂²+p₃²=1) とすると、モデル座標ベクトル x と対象空間座標ベクトル X の関係はつぎのような Rodrigues 表現で与えられる。

$$X = x \cos\Omega + p \times x \sin\Omega + (p \cdot x)p (1 - \cos\Omega) \quad (7)$$

この Rodrigues 表現から回転行列 R を計算すると式8になる。

$$R = \begin{bmatrix} \cos\Omega + p_1^2(1 - \cos\Omega) & p_1 p_2(1 - \cos\Omega) + p_3 \sin\Omega & p_2 p_3(1 - \cos\Omega) - p_1 \sin\Omega & \\ p_2 p_1(1 - \cos\Omega) - p_3 \sin\Omega & \cos\Omega + p_2^2(1 - \cos\Omega) & p_1 p_3(1 - \cos\Omega) - p_2 \sin\Omega & \\ p_3 p_1(1 - \cos\Omega) + p_2 \sin\Omega & p_3 p_2(1 - \cos\Omega) - p_1 \sin\Omega & \cos\Omega + p_3^2(1 - \cos\Omega) & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (8)$$

quaternion は複素数を拡張したもので、q =

$d+ai+bj+ck$ と表現する。i, j, kはX, Y, Z軸の単位ベクトルである。d は回転角、a, b, cは回転軸 pに相当する。モデル空間点x、対象空間点Xの間の回転関係 $X=Rx$ は $X= qxq^{-1}$ と書ける。Rをa, b, c, dで表わすと $d^2+a^2+b^2+c^2= 1$ の制約をつけたときの式6に等しい。また式6と式8からd, a, b, c, とp, Ω の間には次の簡単な関係がある。

$$d=\pm\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right), \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \pm\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

3. 閉じた直交変換

対象空間に3点以上の3次元基準点があるときの閉じた直交変換の方法を示す。相似変換が必要なときにも、原点とスケールを調節して、 $X= Rx$ の形の問題を扱う。

3. 1 特異値分解を使う方法

n点に対して式の変換誤差を $v_i=X_i-Rx_i$ ($i=1, n$) の形に書いて、その2乗和

$$\begin{aligned} \Sigma v_i^2 &= \Sigma(X_i-Rx_i)^T(X_i-Rx_i) \\ &= \Sigma(X_i^T X_i) - 2\text{trace}(\Sigma(X_i^T R x_i)) + \Sigma(x_i^T R^T R x_i) \end{aligned} \quad (10)$$

は式10の右辺第2項が最小になるようにRを決めればよい。 $C=\Sigma x_i X_i^T$ を相関行列と呼び、Cを直交行列U, Vを使って特異値分解して、

$$C=U\Lambda V^T \quad (11)$$

を得る。ただし、 Λ は非負の特異値をならべた行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

である。このとき

$$\begin{aligned} \text{trace}(\Sigma(X_i^T R x_i)) &= \text{trace}(\Sigma(x_i X_i^T R)) = \text{trace}(CR) \\ &= \text{trace}(U\Lambda V^T R) = \text{trace}(V^T R U\Lambda) \leq \text{trace}(\Lambda) \end{aligned}$$

は $V^T R U = I$ のとき最大で、求める直行列は次式になる。

$$R=VU^T \quad (13)$$

3. 2. quaternion を使う方法

モデル座標、基準点座標の誤差を無視して、次のようにa, b, c, dに関する連立方程式を得る。

$$(dI-S)X_i=(dI+S)x_i$$

or

$$\begin{bmatrix} 0 & -(Z_i+z_i) & Y_i+y_i & X_i-x_i \\ Z_i+z_i & 0 & -(X_i+x_i) & Y_i-y_i \\ Y_i+y_i & X_i+x_i & 0 & Z_i-z_i \\ X_i-x_i & Y_i-y_i & Z_i-z_i & 0 \end{bmatrix} u=0 \quad (14)$$

uは未知パラメータベクトル $u=(a \ b \ c \ d)^T$ である。式14をn($n>3$) 点について立て、 $u^T u=1$ の条件をつけて解く。観測式のデザイン行列をA($4n \times 4$) とすると、最小化する汎関数は

$$\Phi = \frac{1}{2} u^T A^T A u - \lambda (u^T u - 1) \quad (15)$$

になり、通常の固有値問題になる。注意すべきことは、この解は特異値分解を使った解とことなり、誤差論的には正しくないことである。

4. 回転行列のEuler角への分解

対象空間に3次元基準点があるときには、相似変換の調整計算を厳密に行うため、平行移動要素とスケールの近似値に加えて、対象空間座標系に対するモデル座標系の回転パラメータの近似値を求めなければならない。すなわち上記の方法で求めた回転行列を回転パラメータに分解する作業が必要になる。分解の容易さからはquaternionを使うのが便利であるが、あとの調整計算の便宜からはEuler角が便利である。しかしEuler角への分解はスマートな方法は見

は見付かっておらず、手続きのな方法によらねばならない。

quaternionの要素 a, b, c, d は式5を逆にといて次の交代行列から求める。

$$S=d(R-I)(R+I)^{-1} \quad (16)$$

azimuth θ , elevation ϕ , rolling κ への分解は次のようである。 ϕ は $\pi/2$ に近づくと分解の精度が悪くなる。また調整計算の精度も落ちる。今は $|\phi| \leq \pi/4$ としておく。行列要素は $R=(R_{ij})$ で表わす。

(1) $\sin\phi = -R_{22}$ より、 ϕ を求める。(2) $\sin\theta = -R_{31}/\cos\phi$, $\cos\theta = R_{33}/\cos\phi$ より、 θ を求める。(3) $\sin\kappa = -R_{12}/\cos\phi$, $\cos\kappa = R_{22}/\cos\phi$ より κ を求める。

回転軸周りのEuler角をとっている場合、 ϕ に制限が付けられないので、式2の角 ω , ϕ , κ に分解する方法はやや面倒である。モデル座標系が、対象空間座標系の周りに 90° 回転すると回転順序によっては特異点が現れる。その時には回転の順序を変えなければならない (hattori 1995)。

5. アフィン係数から回転行列を求め る方法

これまで、対象空間にまったく基準点がないか、3次元基準点がある場合を仮定していた。しかし対象空間に平面基準点しかないような場合(これはめったにない)、あるいは平面基準点と高さの基準点が別れている場合(一般の空中写真測量)には、上記の閉じた相似変換の方法は使えない。平面基準点4点以上、高さ基準点1点以上があるなら、最小二乗法で通常のアフィン変換式

$$X=Ax+b \quad (17)$$

の12個の係数を求めることができる。以後両座標系のスケールと平行移動は補正しておくものとして、行列 A を直交行列で近似する。 A から最も近い直交行列を復元する方法がいくつか見つかっている。SVDを使う方法、quaternionを使う方法、perturbationで R の近似値を求める方法などである。ここでは最初の2つを紹介する。

5.1 SVDを使う方法

行列 A を $A=U\Lambda V^T$ とSVDで分解すると、 A と行列ノルムの意味でもっとも近い直交行列 R は

$$\begin{aligned} \text{trace}((R-A)^T(R-A)) &= \text{trace}(R^T R - 2A^T R + A^T A) \\ &= 3 - 2\text{trace}(A^T R) + \text{trace}(A^T A) \quad (18) \end{aligned}$$

を最小にする。この R は

$$\text{trace}(A^T R) = \text{trace}(\Lambda U^T R) = \text{trace}(\Lambda U^T R V) \quad (19)$$

より、 $R=UV^T$ で与えられる。

5.2 quaternionを使う方法

行列 A から交代行列 S を次の式で定義し、さらに S から直交行列 R_A を定義する。

$$\left. \begin{aligned} S &= ((I+A)^{-1})^T - (I+A)^{-1} = \\ &= ((I+A)^{-T}(I+A) - I)(I+A)^{-1} \\ R_A &= (I-S)^{-1}(I+S) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式16と比較すると、 $A=R$ のときは $R = (I+A)^{-T}(I+A)$ であるので、厳密に $R_A=R$ である。しかしそうでないときの行列 A と R の間の距離(近似精度)がよく分からないのが問題である。

参考文献

- Hattori, S. and Y. Myint: Automatic Estimation of Initial Approximations of Parameters for Bundle Adjustment, PE&RS, Vol. 61, No. 7, 1995, pp. 909-915
- Kanatani, K.: Geometric Computation for Machine Vision, Oxford Engineering Science Series 37, Oxford Science Publications, 1993
- Oswal, H. J.: An Exact Solution of Absolute Orientation, Photogrammetric Engineering, pp. 1079-1083
- Schut, G. H.: Construction of Orthogonal Matrices and Their Application in Analytical Photogrammetry, Photogrammetria, XV, Nr. 4, pp. 1958/1959, pp. 149-162
- Schut, G. H.: On Exact Linear Equations for the Computation of the Rotational Elements of Absolute Orientation, Photogrammetria, XVII, No. 1, pp. 34-37, 1961
- Schut, G. H.: Similarity Transformation and Least Squares, Photogrammetric Engineering, pp. 620-628, 1973