

補強円孔を有する正方形板の弾塑性せん断座屈に対する孔縁の補強効果

上野谷 実*・中村 雅樹*

Effect of Reinforcement for Elasto-plastic Shear Buckling of Square Plates with Reinforced Circular Holes

Minoru UENOYA and Masaki NAKAMURA

ABSTRACT

Elasto-plastic shear buckling of square plates containing reinforced circular holes is investigated analytically. The perforated plates are subjected to uniform shear stress or uniform shear deformation, and are simply supported, clamped or mixed supported on all four edges. Ratios of the hole diameter to the plate width, d/ℓ ; are 0.15, 0.3, 0.5, 0.7 and 0.85. The influence of area and shape of reinforcement around the circular hole and loading condition on buckling strength is considered. Relationships are presented between the buckling strength of plates, the size of the hole, width and depth of the reinforcing ring.

For the elastic buckling, increasing the depth is much more effective than the width. The reinforcement is slightly effective in uniform shear stress compared to the uniform shear deformation at the simply supported plates and it is reverse in the clamped plates. In order to increase the elasto-plastic buckling strength of the perforated plates more than the unperforated plates, it is the most effective that the width and the depth of reinforcement are three and four times of the plate thickness respectively.

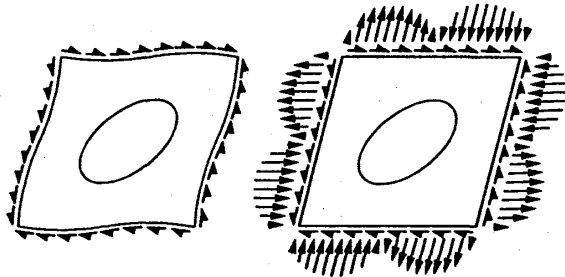
Key Words : elasto-plastic buckling, shear load, perforated plates, reinforced circular holes

1. まえがき

土木、建築、船舶、航空機などの分野において、板は構造物を構成する部材として重要である。この構造部材の板に配管、配線、維持管理用マンホール、重量軽減などの目的で孔を設ける場合がある。このような孔を有する板要素を有孔板という。土木構造物ではプレートガーダーのウェブや箱桁のダイヤフラムなどに有孔板が用いられている。

有孔板は孔によって断面積が減少するため座屈強度や終局強度が低下する。有孔板の設計には応力集中、座屈

強度、終局強度などの力学的特性を正確に把握する必要がある。孔による強度の低下を抑えるために孔のまわりを補強することがある。補強方法としてはカラーリング、ダブルリング、スチフナーによる補強が考えられる。有孔板の円孔縁における補強リングの効果について、1976年にGrosskruth¹⁾は正方形板の辺長 ℓ に対する円孔の直径 d の比 $d/\ell = 0.4$ の円孔板が一樣せん断変形載荷を受けるときの弾性座屈強度に及ぼす補強方法の効果について実験的研究を行なった。その結果カラーリング補強が最も補強効率がよいことを明らかにした。1979年にRockey²⁾



(a) Uniform shear stress (b) Uniform shear deformation

Fig.1 Perforated plate subjected to shear

は $d/l = 0.25, 0.333, 0.5$ について理論および実験的研究を、同年に日本造船学会船体構造委員会、横強度小委員会WG (ワーキング・グループ) ³⁾ は $d/l = 0.1, 0.3, 0.5$ について理論的研究を行なった。両者とも Fig.1 に示すようにせん断荷重を受ける有孔板が周辺で面内変位拘束の自由な場合、すなわち、Fig.1(a) に示すような一様線断応力荷重 (uniform shear stress) の解析を行なっている。ところが両者の解析結果には円孔板の弾性座屈強度の補強効果の定量的評価にかなり差異がある。

著者は Fig.1 に示すような補強円孔を有する正方形板がせん断を受ける場合、孔縁補強を補強幅および補強厚方向に変化させた場合の応力荷重 (uniform shear stress) と変形荷重 (uniform shear deformation) について弾性座屈解析を Rayleigh-Ritz 法で行なった⁴⁾。その結果、有孔板の座屈強度を無孔板の弾性座屈強度以上にする最も効果的な補強方法は Fig. 2 に示すように補強幅 b /

$t=1$ 、補強厚 $h/t=4$ の場合であることが明らかになった。

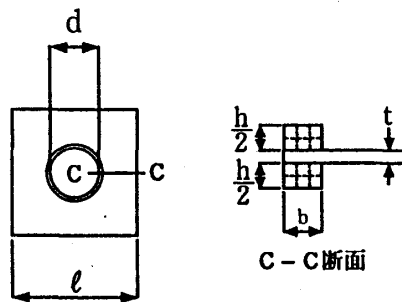
本報告では補強円孔を有する正方形板が応力荷重と変形荷重を受ける場合の弾塑性座屈解析を Rayleigh-Ritz 法で行ない、孔縁の補強を補強幅 b 方向および補強厚 h 方向に変化させて、補強方法の違いが弾塑性座屈強度、塑性域の進展や塑性崩壊強度に与える影響を $d/l = 0.15 \sim 0.85$ の広い範囲で明らかにする。

2. エネルギー法による板の座屈解析

解析法はすでに円孔を有する正方形板の弾塑性せん断座屈解析で示した座屈解析法⁵⁾を孔縁補強を有する正方形板の弾塑性せん断座屈解析に適用する。本解析は次の条件で行う。

- (1) 荷重条件は一様せん断応力荷重および一様せん断変形荷重である。
- (2) 板の形状は正方形板で、周辺の面外支持条件は4辺単純支持、4辺固定および相対する2辺単純支持他辺固定の混合支持である。
- (3) 円孔は板の中央に位置し、大きさは板の辺長 l に対する孔径 d の比が $d/l = 0.15, 0.3, 0.5, 0.7, 0.85$ である。
- (4) 孔縁補強は Fig.2 に示すように板の辺長 l 、円孔の直径 d 、板厚 t に対し補強幅 b は板厚 t の1から3倍とし、補強厚 h は板厚の t の2および4倍とする。
- (5) 残留応力や初期たわみなどの初期不整は考慮しない。

円孔を有する正方形板の平面応力解析は有限要素法で



補強厚比 $\beta = h / t$	補強幅比 $\alpha = b / t$		
	1	2	3
2			
4			

Fig.2 Coordinate of perforated plate

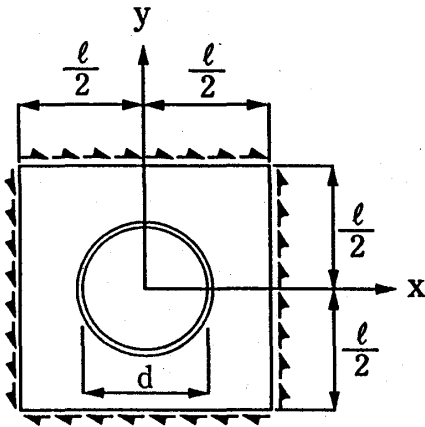


Fig.3 Variation of reinforcement

行なった。用いた要素は要素内応力一定の三角形要素である。一様せん断変形は境界辺の長さが一定のまま直線を保ちながら回転するような変位を節点に与えた。応力計算は要素分割で対称性を利用して正方形板の1/4について行なった。

Rayleigh-Ritz法による座屈解析で用いる正方形板の対角線に対して対称座屈するたわみ関数はFig.3に示す座屈系において既報告⁵⁾と同じ8項のフーリエ級数を適用した。周辺において単純支持の場合

$$\begin{aligned}
 w(x,y) = & A_1 \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l} \\
 & + A_3 \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + A_4 \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \\
 & + A_5 \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + A_6 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{4\pi y}{l} \\
 & + A_7 \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l} + A_8 \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{4\pi y}{l} \\
 & \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

周辺において固定の場合

$$\begin{aligned}
 w(x,y) = & (\cos \frac{\pi x}{l})^2 (\cos \frac{\pi y}{l})^2 [A_1 + A_2 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} \\
 & + A_3 \cos \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi y}{l} + A_4 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l} \\
 & + A_5 \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{3\pi y}{l} + A_6 \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \\
 & + A_7 \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + A_8 \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{4\pi y}{l}] \\
 & \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

周辺において混合支持の場合

$$\begin{aligned}
 w(x,y) = & (\cos \frac{\pi x}{l})^2 [A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l} + A_2 \cos \frac{\pi x}{l} \\
 & + A_3 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l} + A_4 \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \\
 & + A_5 \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + A_6 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{4\pi y}{l} \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

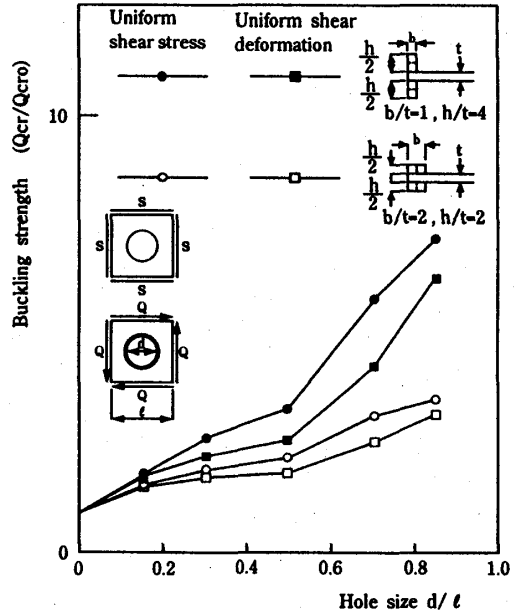


Fig.4 Comparison of buckling strength and reinforcement of same cross area

$$\begin{aligned}
 & + A_7 \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + A_8 \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} \\
 & \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

3. 弾性座屈強度

Fig.4に周辺が単純支持の場合の応力荷重および変形荷重を受ける補強円孔板に対して補強形状の違いが弾性座屈強度に及ぼす影響を示す。補強形状は補強幅**b/t**=1、補強厚**h/t**=4と補強幅**b/t**=2、補強厚**h/t**=2について比較する。補強断面積はそれぞれ同じである。縦軸に無補強有孔板に対する補強有孔板の弾性座屈強度 Q_{cr}/Q_{cro} を示し、横軸は孔の大きさである。この図より補強形状に関わらず孔が大きくなるほど補強効果は大きく、弾性座屈強度を増加するための補強形状は補強幅**b**を広げるより補強厚**h**を厚くする方法が**d/l**=0.15, 0.30, 0.50, 0.70および0.85でそれぞれ1.17, 1.39, 1.53, 1.84および2.02倍と効果的である。また、他の支持条件および荷重方法においてもこの傾向はほぼ同様になる。

5. 座屈モード

Fig.5に応力荷重を受ける円孔板の塑性崩壊時の座屈モードを**d/l**=0.15, 0.30, 0.50, 0.70, 0.85について示す。図中においてそれぞれの孔径の上段に無補強を示し、下段に補強幅比**b/t**=3、補強厚比**h/t**=4の補強円孔板を示す。また、左から順に単純支持、固定および混合支持の支持条件の違いを表す。

支持条件別にそれぞれの座屈モードを比較すると板周辺を単純支持された場合はたわみの変化量が板周辺で大きいが、板周辺を固定された場合は板の左上と右下にわ

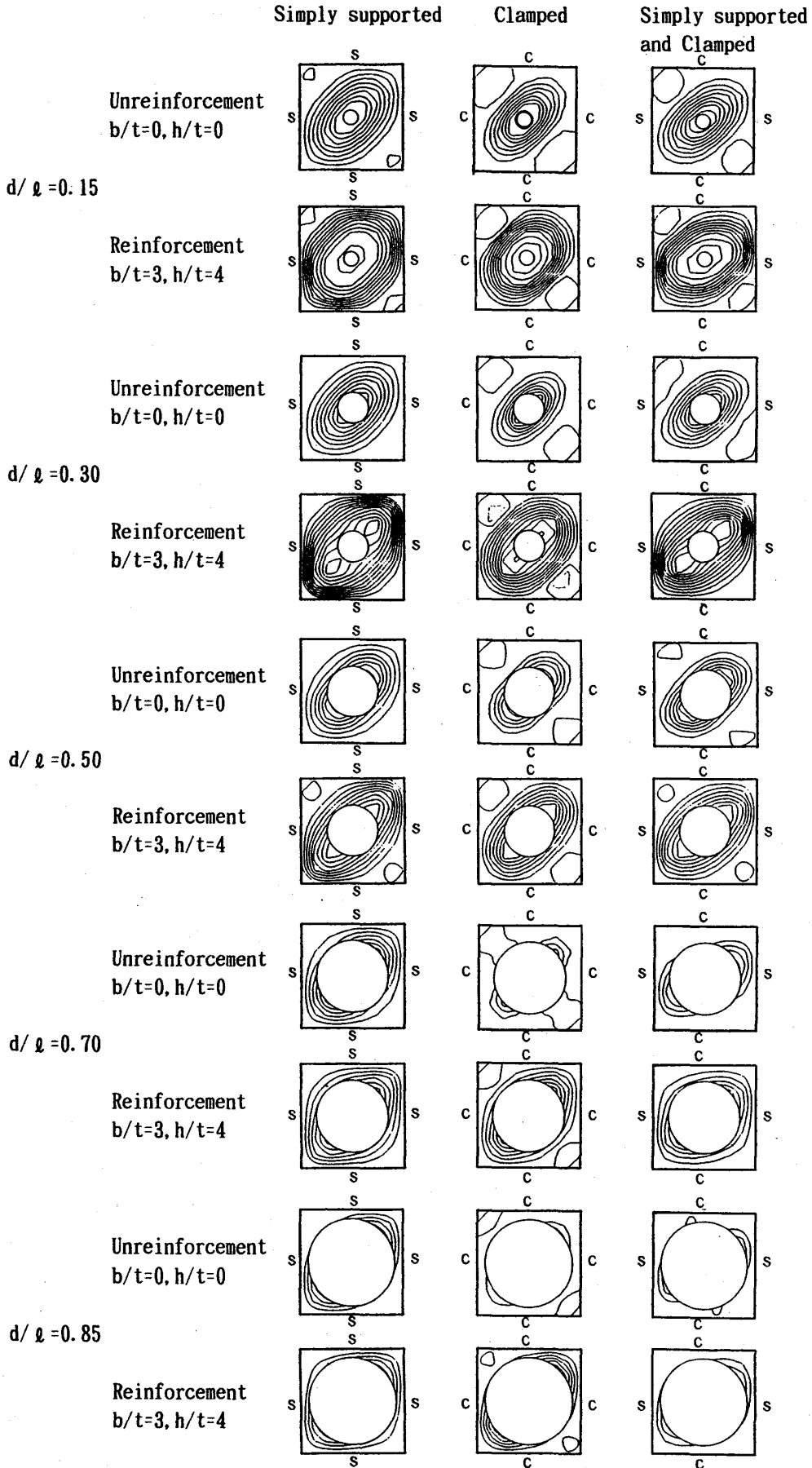
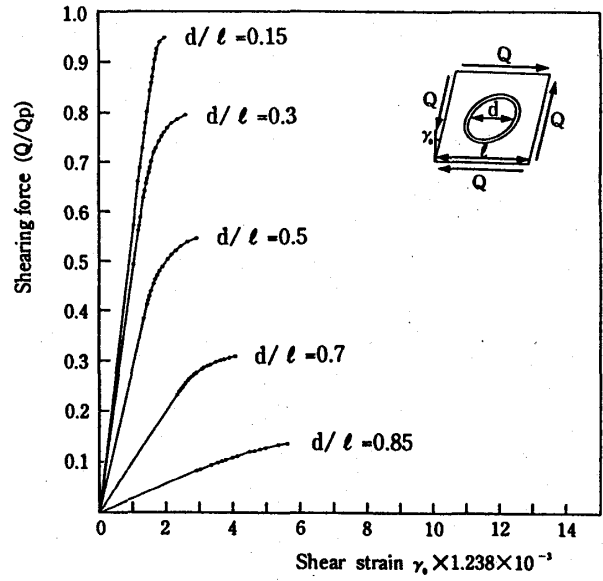
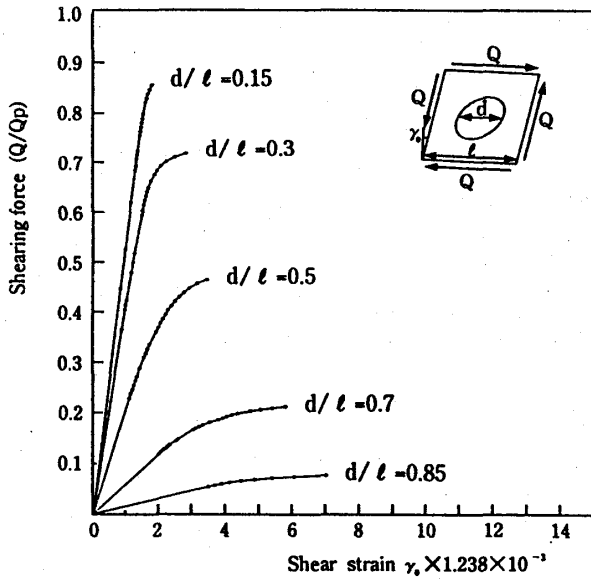
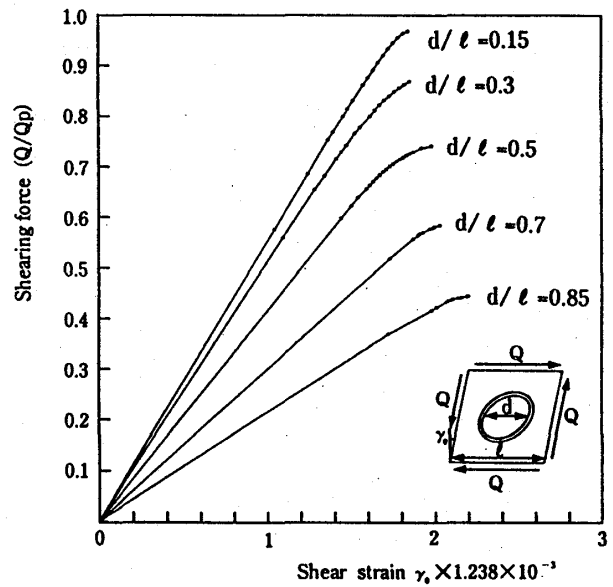
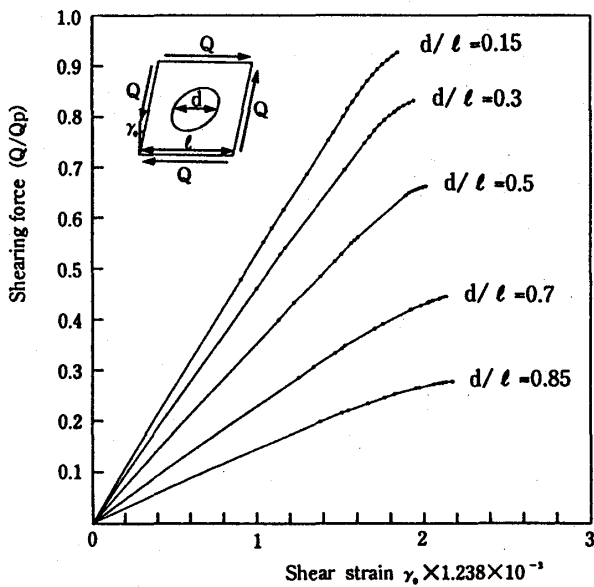


Fig.5 Buckling mode (Uniform shear stress)

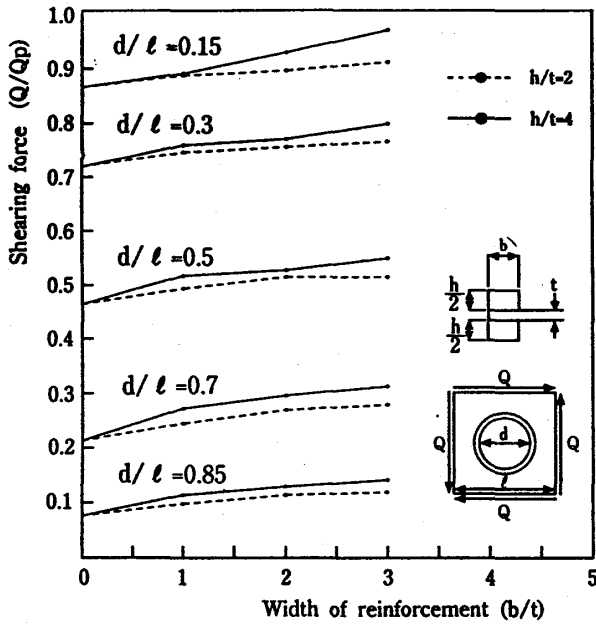


(a) Uniform shear stress

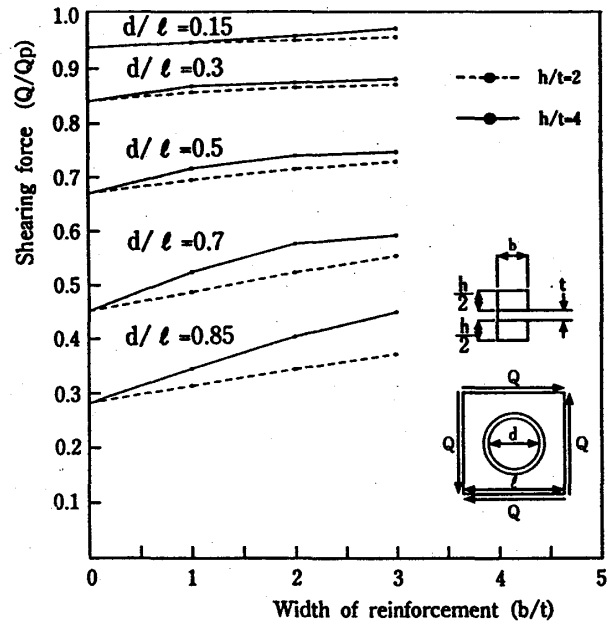


(b) Uniform shear deformation

Fig.6 Load vs average shear strain



(a) Uniform shear stress



(b) Uniform sheara deformation

Fig.7 Effect of reinforcement

ずかにマイナスのたわみが生じ、たわみの変化は板中央で大きい。板周辺を混合支持された場合はたわみの対象軸が板中心に対して単純支持側に多少回転するため対角線と同一にならず、固定と単純支持を掛け合わせた複雑な座屈モードとなる。

円孔板の座屈モードを補強の有無で比較すると支持条件に関係なく無補強の場合は孔縁の付近でたわみの変化が大きいことに対して補強を有する場合は小さい。孔縁の付近でたわみの変化が小さくなることは補強円孔板の孔縁における曲げ剛性が補強により大きくなるため座屈強度が大きくなったと思われる。また補強を有する $d/l = 0.15, 0.30, 0.50$ の円孔板は支持条件に関係なく板の左上と右下にわずかにマイナス側にたわみが生じる。

6. 塑性崩壊強度

Fig.6に応力載荷および変形載荷を受ける無補強および補強円孔板 $d/l = 0.15, 0.30, 0.50, 0.70, 0.85$ の弾塑性応力解析における荷重とせん断変形の関係を示す。縦軸は次式で定義する塑性せん断力 Q_p で除した無次元せん断力 Q/Q_p である。

$$Q_p = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} t l \dots\dots\dots(4)$$

横軸のせん断ひずみは、応力載荷の場合、周辺境界が直線でないので図中に示すように境界辺の両端を結んだ直線が載荷前の境界辺となす角度を平均せん断ひずみ γ とする。この図において曲線の傾きは有孔板の面内剛性を

表わすことになる。無補強および補強円孔板において円孔が大きくなると、載荷条件の違いによる差異が顕著となり、変形載荷は応力載荷より強度が著しく大きいことがわかる。すなわち変形載荷は面内剛性および塑性崩壊荷重がそれぞれ応力載荷より大きい。塑性崩壊強度は、円孔の大きい場合、変形載荷が応力載荷の2~3倍になる。また、塑性崩壊時の平均せん断ひずみ γ は孔が大きくなると応力載荷が著しく大きい。応力載荷を受ける場合は補強することによって平均せん断ひずみ γ が小さくなるが、変形載荷をうける場合はあまり変わらない。

Fig.7に応力載荷および変形載荷を受ける補強円孔板の補強形状による補強効果をせん断力 Q/Q_p と補強幅について示す。これらの図から補強効果は孔が大きくなるほど著しく、応力載荷より変形載荷の方が著しい。また、補強厚を厚くする方が補強効果が著しい。

4. 降伏域の拡がり

Fig.8およびFig.9にそれぞれ応力載荷および変形載荷を受ける $d/l = 0.3, 0.5, 0.70$ の無補強および補強円孔板の塑性域の拡がりを示す。図は板の対称性を利用して円孔板の1/4について示している。塗りつぶされている要素の色の濃さは要素が降伏した荷重段階を示し、つまり塑性域は色が濃い要素から薄い要素の順に拡がる。なお塗りつぶされていない要素は板の塑性崩壊時においても降伏しなかった要素である。Fig.8の応力載荷を受ける場合、無補強円孔板は孔が大きい $d/l = 0.70$ を除いて塑性域が対角線断面の上の孔縁から始まり最小断面を貫通し崩壊

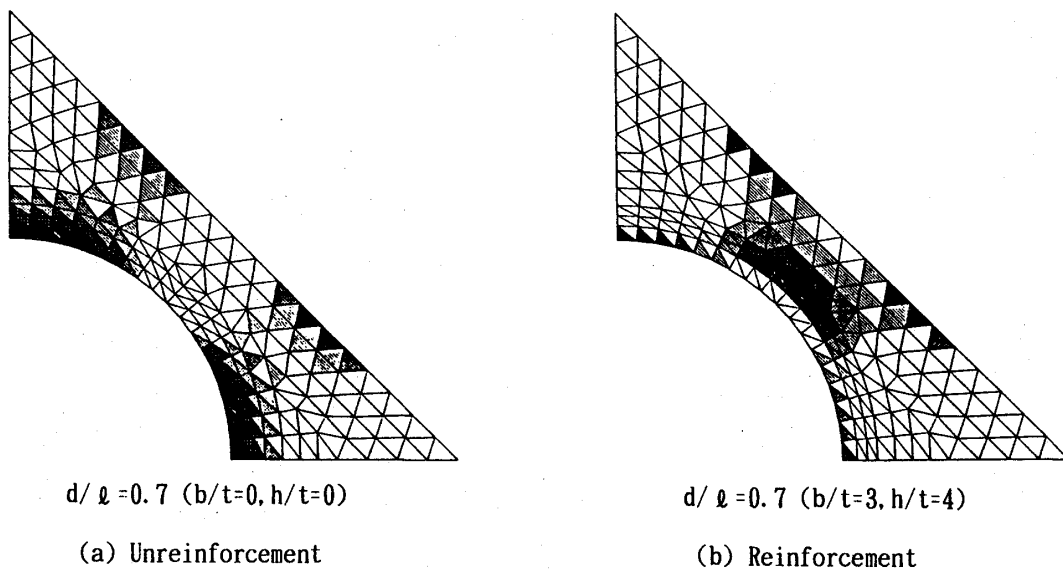
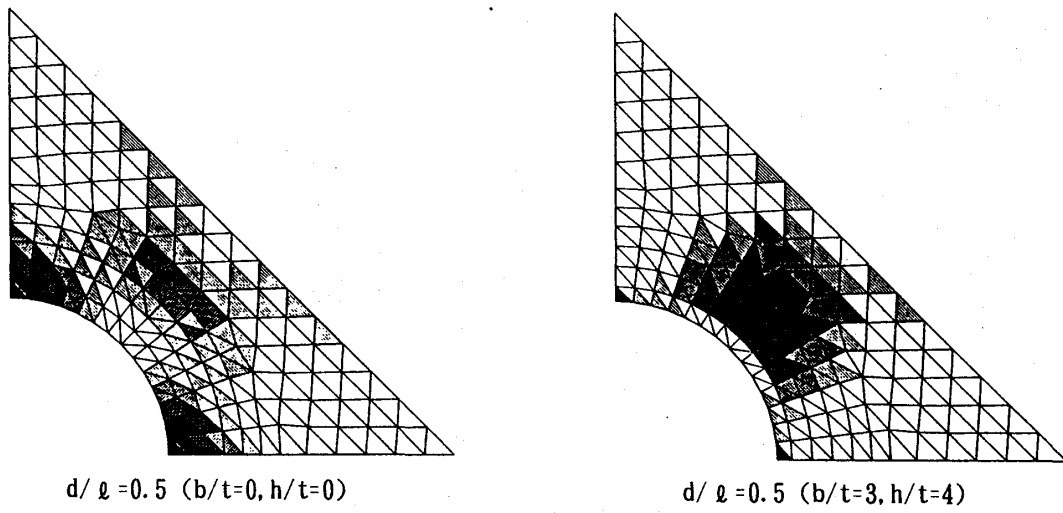
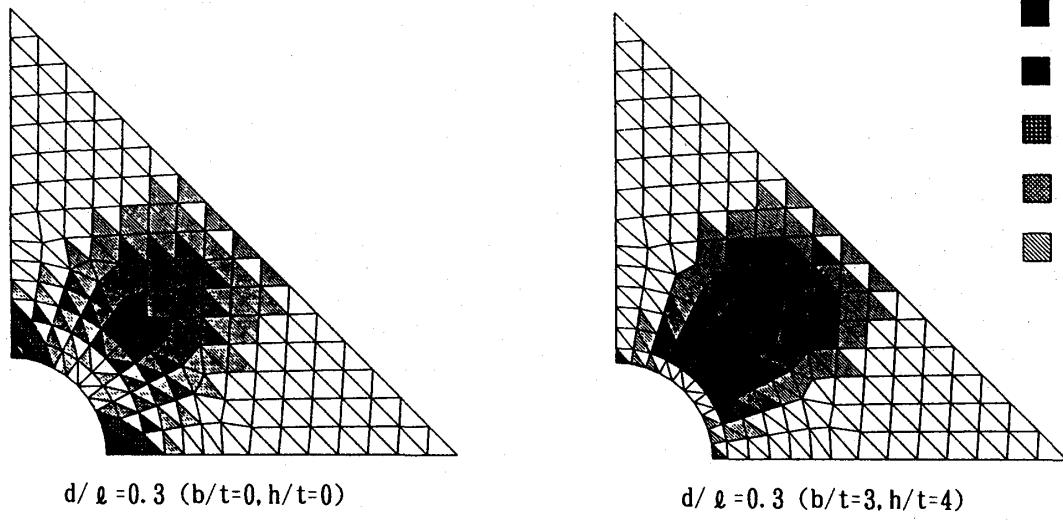


Fig.8 Spread of Plasticity (Uniform shear stress)

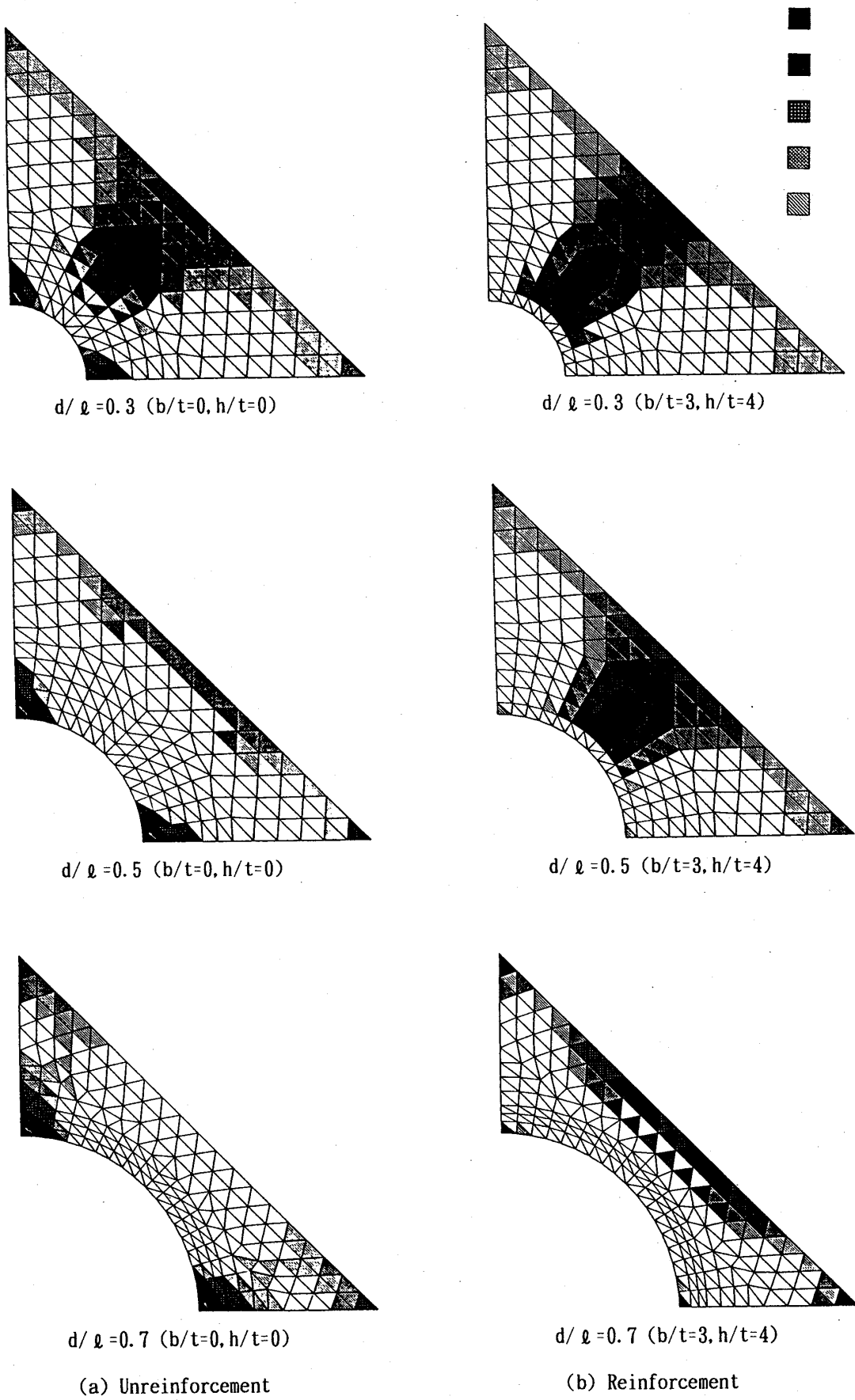


Fig.9 Spread of Plasticity (Uniform shear deformation)

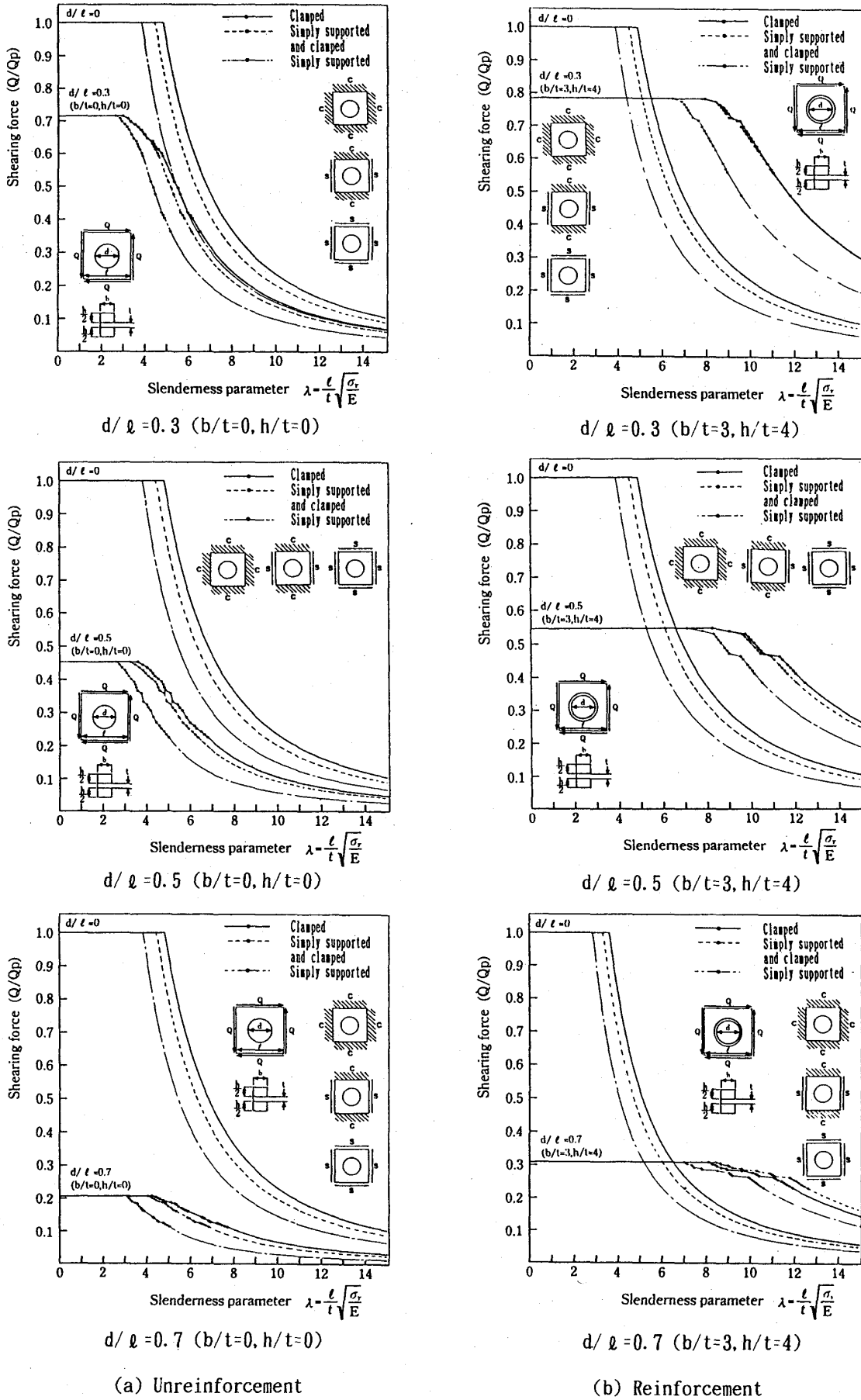


Fig.10 Elasto-plastic buckling for various edge condition (Uniform shear stress)

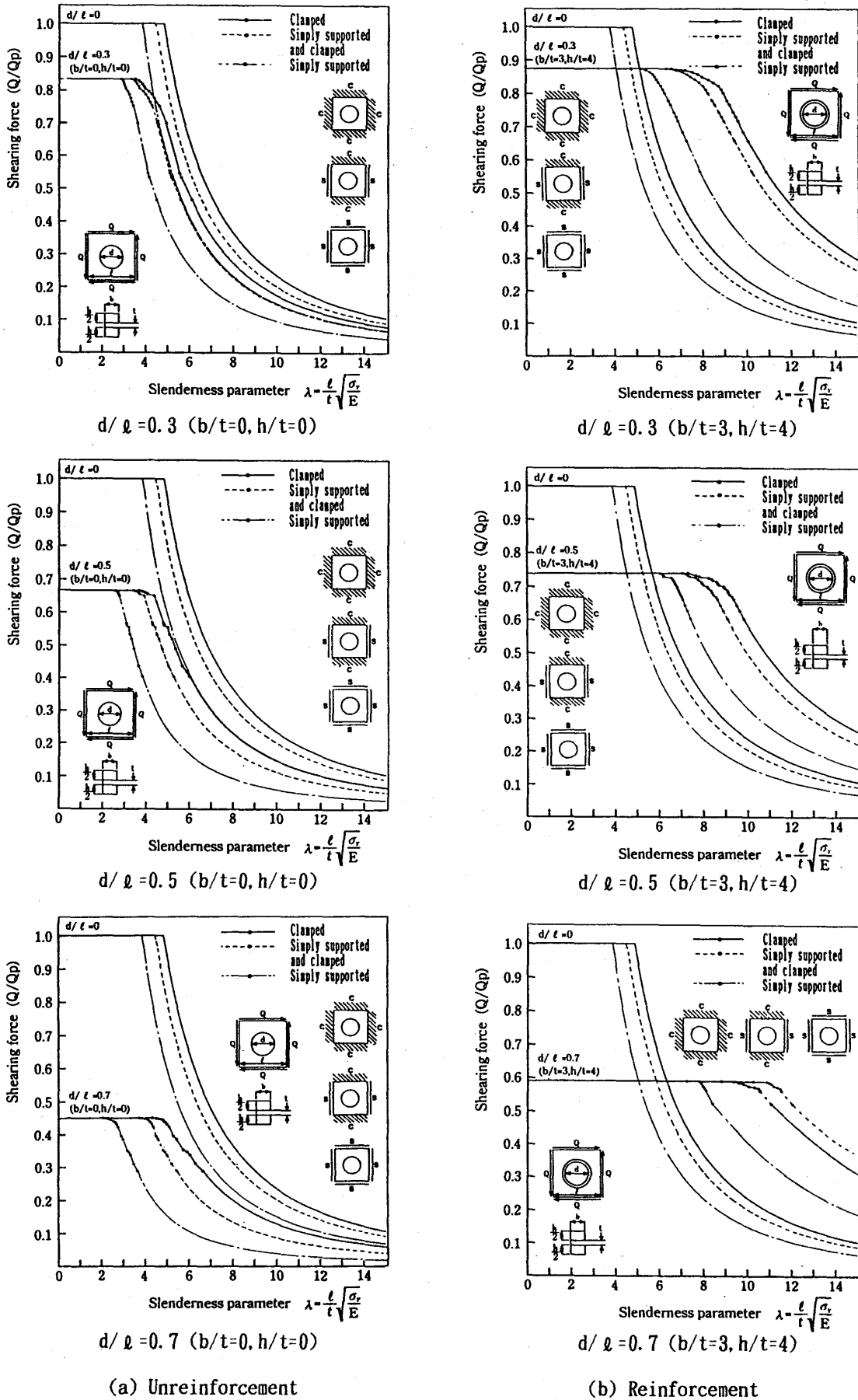


Fig.11 Elasto-plastic buckling for various edge condition (Uniform shear deformation)

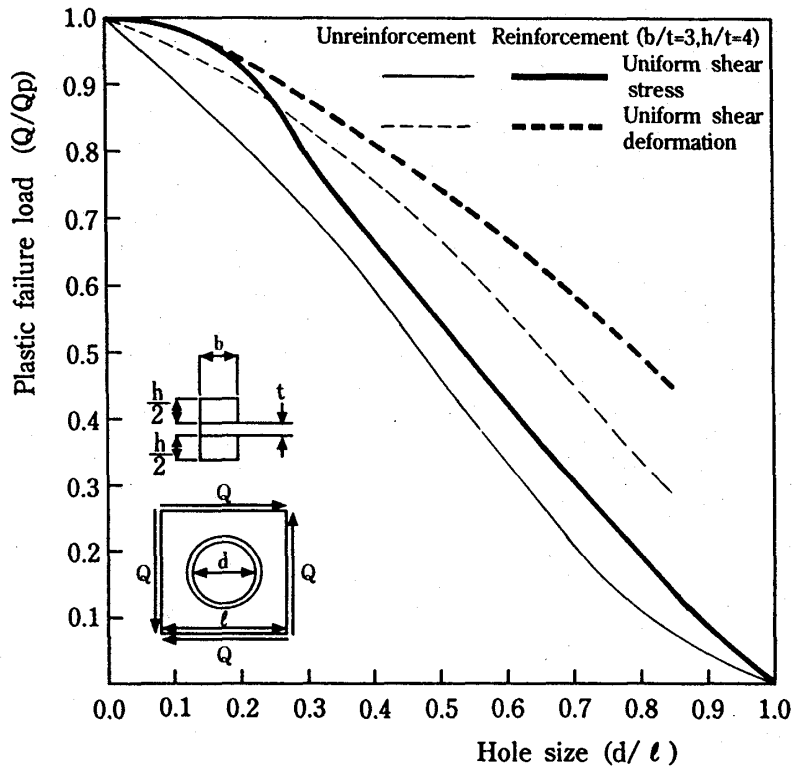


Fig.12 Comparison of ultimate strength and hole size

する。補強円孔板では補強により孔縁の降伏が遅れるため孔の大きさに関わらず塑性域が最小断面上の孔縁周辺から始まり最小断面を貫通し崩壊する。Fig.9の変形荷重を受ける場合、無補強円孔板は塑性域が対角線断面上の孔縁から始まり孔が小さい $d/l = 0.30$ および 0.50 では板周辺を貫通し、孔が大きい $d/l = 0.70$ では対角線断面を貫通し崩壊する。補強円孔板では孔が小さい $d/l = 0.30$ および 0.50 の場合補強によって孔縁の降伏が遅れるため塑性域が最小断面上の孔縁補強周辺から始まり、孔が大きい $d/l = 0.70$ 場合では応力集中が大きいため対角線断面上の孔縁から始まる。その後その拡がりも孔が大きい $d/l = 0.70$ 場合を除き最小断面に沿って拡がり、孔の大きさに関わらず板周辺を貫通して崩壊する。これらより無補強板を補強することにより塑性域開始位置が対角線断面上の孔縁から最小断面上の孔縁補強周辺に変化することが分かる。

7. 弾塑性座屈強度

Fig.10およびFig.11にそれぞれ応力荷重および変形荷重を受ける $d/l = 0.3, 0.5, 0.70$ 補強円孔板の弾塑性座屈強度曲線を示す。縦軸は無次元せん断力 Q/Q_p を示し、横軸は次式で定義する幅厚比パラメータ λ である。

$$\lambda = \frac{l}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \dots\dots\dots(5)$$

図中において実線、破線および一点鎖線はそれぞれ固定、混合支持および単純支持による支持条件の違いを表している。図中の黒点は弾塑性応力解析の荷重段階を示す。この荷重段階において最初の黒点は塑性域開始荷重を示し、曲線の最上位の点が塑性崩壊強度に相当する。したがって最初の黒点に示す塑性域開始荷重から塑性崩壊荷重に達するまでが弾塑性領域であり、この領域において塑性域が進展する。これらの図において板の崩壊形式は横軸の幅厚比パラメータ λ より三つに分類できる。最初の黒点で示す点の幅厚比より大きい幅厚比の板は板に全く塑性域が存在しない状態で弾性座屈を起こし、幅厚比が少し小さくなって最初の黒点から曲線の最上点までの幅厚比の板では塑性域が板の所々に存在する状態で座屈する弾塑性座屈を起こす。さらに幅厚比が小さくなって曲線の最上点の幅厚比より小さい幅厚比の板では座屈は起こらず塑性崩壊する。Fig.10およびFig.11の全ての曲線において弾塑性座屈強度は孔縁に補強を施すことによってそれぞれ無孔板より高くなっている。また、無補強の場合において弾性座屈を起こす幅厚比の領域が補強の場合では塑性崩壊の幅厚比の領域になっている。つまり補強円孔板は無補強に比べて座屈強度は高くなるが大きい幅厚比でも塑性崩壊しやすくなる。Fig.10およびFig.11の $d/l = 0.70$ に対してそれぞれの支持条件で座屈強度を比較すると、無補強の座屈強度は支持条件において固定、混合支持および単純支持の順で高いが、補強幅比 $b/t=3$ 、

補強厚比 $h/t=4$ の補強円孔板の座屈強度は補強効果によりそれぞれの支持条件において混合支持、固定および単純支持の順でそれぞれ無孔板より高くなった。無補強では固定および単純支持の中間的な強度であった混合支持が $d/\ell=0.70$ に限り補強幅比 $b/t=3$ で補強厚比 $h/t=4$ のとき固定より高くなっている。また、Fig.10の応力载荷を受ける場合とFig.11の変形载荷を受ける場合の弾塑性座屈強度曲線を比較すると周辺が直線を保ったまま変形する変形载荷の弾塑性座屈強度が大きい。

Fig.12に応力载荷および変形载荷を受ける円孔板の孔縁を補強した場合の塑性崩壊強度に対する補強効果を示す。縦軸は無次元せん断力 Q/Q_0 を示し、横軸は孔の大きさ d/ℓ である。これより無補強および補強円孔板の場合の塑性崩壊強度は応力载荷より変形载荷を受ける場合が大きい。また、補強幅 $b/t=3$ 、補強厚 $h/t=4$ の場合、塑性崩壊強度は無補強より大きくなり、孔が大きくなるほど著しい。

8. まとめ

中央に補強した円孔を有する正方形板がせん断を受けるときの面内応力解析を有限要素法で、また弾塑性座屈解析をRayleigh-Ritz法を用いて行った。解析の载荷条件は一樣せん断応力载荷と一樣せん断変形载荷で、補強量は補強幅を板厚で除した値の $b/t=1, 2, 3$ もしくは補強厚を板厚で除した値の $h/t=2, 4$ で行った。孔縁の補強効果が弾塑性座屈強度及び終局強度に与える影響を検討した結果、次のことが明らかになった。

- (1) 弾性座屈強度に対して補強効果は孔が大きくなるほど著しく大きい。
- (2) 弾性座屈強度に対する補強効果において補強形状は補強幅 b を広げるより補強厚 h を厚くする方法が効果的である。
- (3) 弾塑性座屈強度に対して補強効果は孔が大きくなるほど著しく、応力载荷より変形载荷の方が著しい。
- (4) 降伏域の拡がりにおいて応力载荷の場合、無補強において孔が大きいと対角断面の孔縁から生じる降伏域は中間断面を貫通して塑性崩壊する。補強すると降伏域がすべて最小断面を貫通して塑性崩壊する。
- (5) 降伏域の拡がりにおいて変形载荷の場合、無補強において孔が小さいと塑性域が周辺断面を貫通し、孔が大きくなると対角断面を貫通して塑性崩壊する。補強すると塑性域がすべて周辺断面を貫通して塑性崩壊する。
- (6) 弾塑性座屈強度に対して補強した $d/\ell=0.70$ の座屈強度は支持条件において混合支持が固定より大

きい。

- (7) 塑性崩壊強度に対する補強効果は孔が大きくなるほど著しく大きい。
- (8) 弾塑性座屈強度を無孔板より強くするためには補強幅 $b/t=3$ 、補強厚 $h/t=4$ にすればよい。ただし、今回の補強範囲では塑性崩壊強度は無孔板の強度まで上げることはできない。

参考文献

- 1) Grosskurth, Jr, J.F., White, R.N. and Gallagher, R.H.: Shear buckling of square perforated plates, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 102, No.EM6, pp. 1025-1040, Dec., 1976.
- 2) Rockey, K.C.: The buckling and post-buckling behaviour of shear panels which have a central circular cutout, International Conference on Thin-Walled Structures, Institution of Structural Engineers, University of Strathclyde, pp. 658-672, 1979.
- 3) 日本造船学会船体構造委員会：開孔板の座屈と補強効果について、日本造船学会誌、No. 605, pp. 550-560. 1979.
- 4) 上野谷 実、中村雅樹：補強円孔を有する正方形板の弾性せん断座屈に対する孔縁の補強効果、福山大学工学部紀要、Vol. 14, pp. 25-32, Mar. 1992.
- 5) 上野谷 実、大村 裕：一樣せん断変形を受ける円孔を有する正方形板の弾塑性座屈強度、土木学会論文集、第386号/I-8、1987.