

パソコン用バンドル調整プログラムの開発

服部 進*・関 章良*・岡本 厚**

Development of a Personal-Computer-Oriented Bundle Adjustment Program

Susumu Hattori, Akiyoshi Seki, and Atsushi Okamoto

ABSTRACT

A computer program for the bundle adjustment for close-range triangulation is developed. The program is made up so small in size enough to be run on a 16 bit personal computer with the minimum memory size of 640 KB. This paper discusses the mathematical basis and the constitution of the program. The process of derivation of a normal equation and its solution are fully expressed. The normal equation is solved by the well-known Cholesky's method. But the imaging configuration for close range photogrammetry is not well standardized unlike aerial photogrammetry in which vertical camera axis setting and exposure at a constant height are always common. Therefore the band matrix technique for saving a memory can not be used. Instead the program is designed to store off-diagonal sub-matrices of normal equations temporarily in a hard disc or a RAM disc memory. The inverse of the coefficient matrix of normal equations is efficiently calculated by sweeping out the LU-decomposed coefficient matrix obtained by the Cholesky's method.

1. はじめに

図化機が小型化してパソコンの制御で動かすものが多くなった。またデジタル画像を使って図化するデジタルプロッタが実用のもになりつつある。これらもまたパソコンか小さなワークステーションの制御で動く。そのためパソコン程度の能力で実行できる写真測量の調整計算プログラムが必要になったので、われわれは主として近接写真測量に向いているバンドル調整プログラムを開発した。性能は従来のバンドル調整プログラム^{1),2)}と変わらないと思われるが、16ビット計算機の標準メモリサイズである640KBで十分実行できる構造になっている。この論文はプログラムの構造と計算の手続きを示すものである。

2. バンドル調整法の手続き

2. 1 撮影の仮定

撮影の前提として次のことを仮定している。

- 1) 主として近接写真を対象にしたので、撮影形態は平行または収束型とする。写真枚数は30枚以内、対象空間点は100点以内とする(変更可能)。
- 2) カメラキャリブレーションは終了しているとする。未知パラメータは撮影点の位置と撮影方向(外部標定要素)、および対象空間点の3次元座標である。
- 3) 未知パラメータの近似値は得られている。

2. 2 バンドル調整式の誘導

2. 2. 1 使用する記号

図1を参照して使用する記号を以下のように定める。

* 福山大学工学部情報処理工学科

** 京都大学工学部交通土木工学科

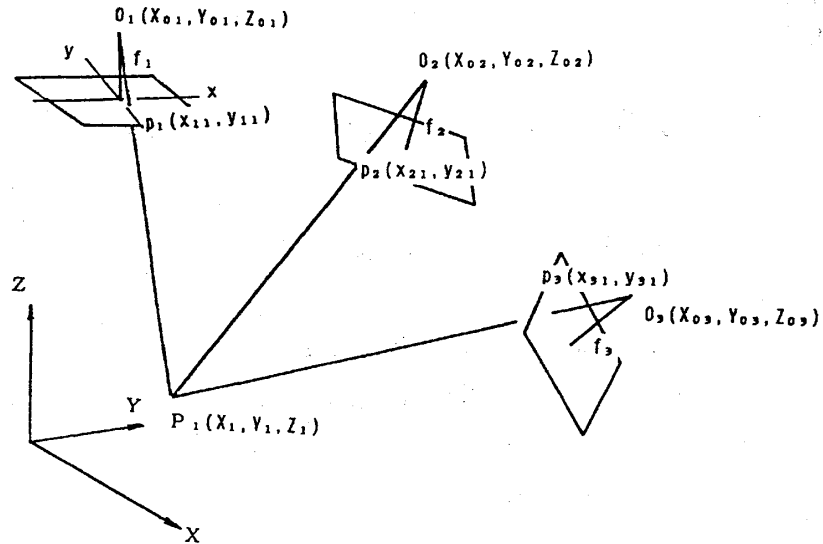


図-1 記号の定義

写真は p 枚, 対象空間点は n 点ある。写真と対象空間点に関する諸量はそれぞれ添え字 i, j で表す。回転行列の成分を $M = (m_{kl})$ ($k=1, 2, 3, l=1, 2, 3$), 回転角度を K, Φ, Ω , 撮影点座標を X_0, Y_0, Z_0 , 写真点を x, y , カメラの画面距離を f とする。回転行列は次式で定義する。

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & -\sin \Omega \\ 0 & \sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Phi & 0 & \cos \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos K & -\sin K & 0 \\ \sin K & \cos K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これを簡単に

$$M = [\Omega] [\Phi] [K]$$

で表す。もしカメラ軸が Z 軸に直行している場合はこの定義では回転角度が不定になる。そのときは回転順序を変えて

$$M = [K] [\Phi] [\Omega]$$

または

$$M = [K] [\Omega] [\Phi]$$

を用いる。回転角の初期値を与える際には回転行列の積の順序も同時に与え、上の3式の内どの式を使ったかを

示すことにする。

2. 2. 2 共線条件から得られる観測式
観測方程式の基本は次の共線条件式である。

$$\left. \begin{aligned} F_x = x_0 + \frac{m_{11}(X_j - X_{0i}) + m_{21}(Y_j - Y_{0i}) + m_{31}(Z_j - Z_{0i})}{m_{31}(X_j - X_{0i}) + m_{21}(Y_j - Y_{0i}) + m_{11}(Z_j - Z_{0i})} (-f_i) &= 0 \\ F_y = y_0 + \frac{m_{21}(X_j - X_{0i}) + m_{22}(Y_j - Y_{0i}) + m_{23}(Z_j - Z_{0i})}{m_{31}(X_j - X_{0i}) + m_{21}(Y_j - Y_{0i}) + m_{11}(Z_j - Z_{0i})} (-f_i) &= 0 \end{aligned} \right\} (2-1)$$

ここで $i=1, 2, \dots, p, j=1, 2, \dots, n, x_{ij}, y_{ij}$ は写真 i に写った点 j の座標を表す。

写真座標の真値, 観測値, 誤差をそれぞれ $x_{ij}, x_{ij}^0, v_{xij}$ および $y_{ij}, y_{ij}^0, v_{yij}$ としてその関係を次式で定義する。

$$x_{ij} = x_{ij}^0 + v_{xij}, \quad y_{ij} = y_{ij}^0 + v_{yij} \quad (2-2)$$

外部標定要素 (真値 $X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}, \Omega_i, \Phi_i, K_i$) の近似値, 補正量をそれぞれ ($X_0^a, Y_0^a, Z_0^a, \Omega^a, \Phi^a, K^a$) ($\Delta X_{0i}, \Delta Y_{0i}, \Delta Z_{0i}, \Delta \Omega_i, \Delta \Phi_i, \Delta K_i$) で表わすと、真値との関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} X_{0i} &= X_0^a + \Delta X_{0i} \\ Y_{0i} &= Y_0^a + \Delta Y_{0i} \\ Z_{0i} &= Z_0^a + \Delta Z_{0i} \\ \Omega_i &= \Omega^a + \Delta \Omega_i \\ \Phi_i &= \Phi^a + \Delta \Phi_i \\ K_i &= K^a + \Delta K_i \end{aligned} \right\} (2-3)$$

写真*i*に関する外部標定要素をベクトル表示して U_{1i} で表すと、式(2-3)は

$$U_{1i}(6*1) = U_{1i}^a + \Delta_{1i} \quad (2-3')$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} U_{1i} &= (X_{0i} Y_{0i} Z_{0i} \Omega_i \Phi_i K_i)^T \\ U_{1i}^a &= (X_{0i}^a Y_{0i}^a Z_{0i}^a \Omega_i^a \Phi_i^a K_i^a)^T \\ \Delta_{1i} &= (\Delta X_{0i} \Delta Y_{0i} \Delta Z_{0i} \Delta \Omega_i \Delta \Phi_i \Delta K_i)^T \end{aligned}$$

対称空間点の座標（代表的に X_j について示す）の真値、観測値、誤差をそれぞれ X_j, X_j^o, V_{Xj} 、近似値、補正量をそれぞれ $X_j^a, \Delta X_j$ とすると、それらの関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} X_j &= X_j^o + V_{Xj} = X_j^a + \Delta X_j \\ Y_j &= Y_j^o + V_{Yj} = Y_j^a + \Delta Y_j \\ Z_j &= Z_j^o + V_{Zj} = Z_j^a + \Delta Z_j \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

ベクトル表示すると

$$U_{2j}(3*1) = U_{2j}^o + V_{2j} = U_{2j}^a + \Delta_{2j} \quad (2-4')$$

を得る。ただし

$$\begin{aligned} U_{2j} &= (X_j Y_j Z_j)^T \\ U_{2j}^o &= (X_j^o Y_j^o Z_j^o)^T \\ V_{2j} &= (V_{Xj} V_{Yj} V_{Zj})^T \\ U_{2j}^a &= (X_j^a Y_j^a Z_j^a)^T \\ \Delta_{2j} &= (\Delta X_j \Delta Y_j \Delta Z_j)^T \end{aligned}$$

条件式(2-1)を未知パラメータに関して線形展開して次式を得る。

$$v_{ij} + B_{1ij} \Delta_{1i} + B_{2ij} \Delta_{2j} = e_{ij} \quad (2-5)$$

ここで

$$v_{ij}(2*1) = (v_{xij} \ v_{yij})^T \quad (i=1,2,\dots,p; j=1,2,\dots,n)$$

は写真点座標の誤差ベクトル、 Δ_{1i} は外部標定要素の補正量ベクトル、 Δ_{2j} は対象空間座標の補正量ベクトル、 B_{1ij}, B_{2ij} は共線条件式(2-1)を未知パラメータで微分したときの係数行列である。すなわち

$$B_{1ij}(2*6) = \begin{bmatrix} \partial x_{ij} / \partial U_{1i} \\ \partial y_{ij} / \partial U_{1i} \end{bmatrix}$$

$$B_{2ij}(2*3) = \begin{bmatrix} \partial x_{ij} / \partial U_{2j} \\ \partial y_{ij} / \partial U_{2j} \end{bmatrix}$$

e_{ij} は残存量 (discrepancy) ベクトルで

$$e_{ij}(2*1) = g_{ij} - (x_{ij}^o \ y_{ij}^o)^T$$

ただし

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{m_{11i}(X_j - X_{0i}) + m_{12i}(Y_j - Y_{0i}) + m_{13i}(Z_j - Z_{0i})}{m_{31i}(X_j - X_{0i}) + m_{32i}(Y_j - Y_{0i}) + m_{33i}(Z_j - Z_{0i})} (-f_i) \\ \frac{m_{21i}(X_j - X_{0i}) + m_{22i}(Y_j - Y_{0i}) + m_{23i}(Z_j - Z_{0i})}{m_{31i}(X_j - X_{0i}) + m_{32i}(Y_j - Y_{0i}) + m_{33i}(Z_j - Z_{0i})} (-f_i) \end{bmatrix}$$

各写真点の座標の観測の重み行列を

$$w_{ij} = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}$$

とする。フィルム上の点をコンパレータで観測する場合 w は通常 $1/(3\mu m)^2$ 程度である。全写真の全点について観測式をつくると次のようになる。添え字を簡単にするため全対象点 (n 点) が全写真 (p 枚) に写っているとす。

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{p1} \\ v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{p2} \\ \vdots \\ v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{pn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{111} & & 0 \\ & B_{121} & \\ & & 0 \\ & & & B_{1p1} \\ B_{112} & & & \\ B_{122} & & & 0 \\ & & & \\ & & & & B_{1pn} \\ & & & & & B_{12n} & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & B_{1pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \\ \vdots \\ \Delta_{1p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{211} 0 & 0 \\ B_{221} 0 & 0 \\ \vdots \\ B_{2p1} 0 & 0 \\ 0 B_{212} & 0 \\ 0 B_{222} & 0 \\ \vdots \\ 0 B_{2p2} & 0 \\ \vdots \\ & B_{21n} \\ & B_{22n} \\ \vdots \\ & 0 \\ & B_{2pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{22} \\ \vdots \\ \Delta_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{p1} \\ e_{12} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{p2} \\ \vdots \\ e_{1n} \\ e_{2n} \\ \vdots \\ e_{pn} \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{点 1} \\ \text{点 2} \\ \vdots \\ \text{点 } n \end{array} \right\} \quad (2-6)$$

式(2-6)を行列表示して次式を得る。

$$V + B_1 \Delta_1 + B_2 \Delta_2 = e \quad (2-6')$$

$V(2np*1)$ は写真座標の観測誤差ベクトル、 B_1, B_2 は係数行列、 Δ_1, Δ_2 はそれぞれ外部標定要素、対象空間点座標の補正量をならべたベクトルで

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{111} & & & & & \\ & B_{121} & & & & 0 \\ & & 0 & & & \\ & & & & B_{1p1} & \\ & B_{112} & & & & \\ & & B_{122} & & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & & & & & B_{1p2} \\ & B_{11n} & & & & \\ & & B_{12n} & & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & & & & & B_{1pn} \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_{211}0 & & 0 & & & \\ & B_{221}0 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & B_{2p1}0 & 0 \\ 0 & B_{212} & 0 & 0 & & \\ 0 & & B_{222} & 0 & 0 & \\ & & & & & \\ 0 & & & B_{2p2} & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & & & B_{21n} & \\ 0 & 0 & & & & B_{22n} \\ & & & & & \\ 0 & 0 & & & & B_{2pn} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 (6p \times 1) = (\Delta_{11} \Delta_{12} \dots \Delta_{1p})^T$$

$$\Delta_2 (3n \times 1) = (\Delta_{21} \Delta_{22} \Delta_{23} \dots \Delta_{2n})^T$$

である。また式(2-6)の重み行列を次式で定義する。

$$w(2pn \times 2pn) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} w_{11} & 0 & 0 \\ 0 & w_{21} & 0 \\ 0 & 0 & w_{p1} \end{matrix} & & & 0 \\ & & \begin{matrix} w_{12} \\ w_{22} \\ w_{p2} \end{matrix} & & \\ & & & & \begin{matrix} w_{1n} \\ w_{2n} \\ w_{pn} \end{matrix} \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

2. 2. 3 外部標定要素と対象空間点座標の直接観測から得られる観測方程式

次に写真iの外部標定要素と対象空間点jの座標を直接または仮想的に観察したと考え、観測方程式をたてると次のようになる。

$$V_{1i} - \Delta_{1i} (6 \times 1) = e_{1i} = U_{1i}^a - U_{1i}^o$$

ただし

$$U_{1i}^a = (X_0^a \ Y_0^a \ Z_0^a \ \Omega_1^a \ \Phi_1^a \ K_1^a)^T$$

$$U_{1i}^o = (x_0^o \ y_0^o \ z_0^o \ \Omega_1^o \ \Phi_1^o \ K_1^o)^T$$

$$V_{2j} - \Delta_{2j} (3 \times 1) = e_{2j} = U_{2j}^a - U_{2j}^o$$

ただし

$$U_{2j}^a = (X_0^a \ Y_0^a \ Z_0^a)^T$$

$$U_{2j}^o = (X_0^o \ Y_0^o \ Z_0^o)^T$$

この観測方程式の重み行列をそれぞれ次のように置く。

$$W_{1i} (6 \times 6) = 0 \quad (\text{ゼロ行列})$$

すなわち外部標定要素を実際に観測することはない。

$$W_{2j} (3 \times 3) = \begin{bmatrix} w_{xj} & 0 & 0 \\ 0 & w_{yj} & 0 \\ 0 & 0 & w_{zj} \end{bmatrix}$$

w_{xj}, w_{yj}, w_{zj} は対象空間点の観測値の重みであって、基準点であればその重みが入り、そうでなければ0が入る。式(2-7)をベクトル形式でまとめて次式を得る。

$$V_1 - \Delta_1 = e_1 (6p \times 1), \quad V_2 - \Delta_2 = e_2 (3n \times 1) \quad (2-7')$$

ただし、 V_1 は外部標定要素の(仮定の)観測誤差ベクトル、 V_2 は対象空間点座標の観測誤差ベクトルであり、 e_1, e_2 はそれぞれの残存量ベクトルである。その成分は次式のようにになる。

$$V_1 = (V_{11} \ V_{12} \dots \ V_{1p})^T, \quad e_1 = (e_{11} \ e_{12} \dots \ e_{1p})^T$$

$$V_2 = (V_{21} \ V_{22} \dots \ V_{2n})^T, \quad e_2 = (e_{21} \ e_{22} \dots \ e_{2n})^T$$

また式(2-7')に対する重み行列は次の様になる。

$$W_1 (6p \times 6p) = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{12} & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & W_{1n} \end{bmatrix}$$

$$= 0 \quad (\text{ゼロ行列})$$

$$W_2 (3n \times 3n) = \begin{bmatrix} W_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{22} & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & W_{2n} \end{bmatrix}$$

2. 2. 4 正規方程式の導出

式(2-6'), (2-7')をまとめて次のよく知られたバンドル調整の観測方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} V \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

最小2乗法に従って、式(2-8)を解くと次式を得る。

$$\begin{pmatrix} B_1^T w B_1 + W_1 & B_1^T w B_2 \\ B_2^T w B_1 & B_2^T w B_2 + W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^T w e - W_1 e_1 \\ B_2^T w e - W_2 e_2 \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

あるいはまとめて次式で表す。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (2-9')$$

各々の小行列の構造は次のようである。

$$A_{11} (6p \times 6p) = B_1^T w B_1$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_j B_{11j}^T w_{1j} B_{11j} & & \\ & \sum_j B_{12j}^T w_{2j} B_{12j} & 0 \\ 0 & & \sum_j B_{1pj}^T w_{pj} B_{1pj} \end{bmatrix}$$

A_{11} のそれぞれの小行列の次元は

$$\sum_j B_{1ij}^T w_{ij} B_{1ij} = (6 \times 2)(2 \times 2)(2 \times 6) = (6 \times 6)$$

であり、それぞれの写真ごとに写っている点についての和を取る。

$$A_{22} = B_2^T w B_2 + W_2$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_i B_{2i1}^T w_{i1} B_{2i1} + W_{21} & & \\ & \sum_i B_{2i2}^T w_{i2} B_{2i2} + W_{22} & \\ 0 & & \sum_i B_{2in}^T w_{in} B_{2in} + W_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\sum_i B_{2ij}^T w_{ij} B_{2ij} = (3 \times 2)(2 \times 2)(2 \times 3) = (3 \times 3)$$

はそれぞれの点が写っている写真についての和を取る。

$$A_{12} = B_1^T w B_2$$

$$= \begin{bmatrix} B_{111}^T w_{11} B_{211} & B_{112}^T w_{12} B_{212} & B_{11n}^T w_{1n} B_{21n} \\ B_{121}^T w_{21} B_{221} & & \\ B_{1p1}^T w_{p1} B_{2p1} & & B_{1pn}^T w_{pn} B_{2pn} \end{bmatrix}$$

$$B_{1ij}^T w_{ij} B_{2ij} = (6 \times 2)(2 \times 2)(2 \times 3) = (6 \times 3)$$

$$E_1 = B_1^T w e \quad E_2 = B_2^T w e - W_2 e_2$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_j B_{11j}^T w_{1j} e_{1j} \\ j \\ \sum_j B_{12j}^T w_{2j} e_{2j} \\ j \\ \sum_j B_{1pj}^T w_{pj} e_{pj} \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i B_{2i1}^T w_{i1} e_{i1} - W_{21} e_{21} \\ i \\ \sum_i B_{2i2}^T w_{i2} e_{i2} - W_{22} e_{22} \\ i \\ \sum_i B_{2in}^T w_{in} e_{in} - W_{2n} e_{2n} \\ i \end{bmatrix}$$

各項の次元は次のようになる。

$$\sum_j B_{1ij}^T w_{ij} e_{ij} = (6 \times 2)(2 \times 2)(2 \times 1) = (6 \times 1)$$

$$\sum_i B_{2ij}^T w_{ij} e_{ij} - W_{2j} e_{2j} = (3 \times 2)(2 \times 2)(2 \times 1) - (3 \times 3)(3 \times 1) = (3 \times 1)$$

2. 3 正規方程式の解法

正規方程式

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (2-9')$$

の係数行列は正値対称であるから連立方程式の解法と係数行列の逆行列の計算はCholesky法を使うのがもっとも効率がよい^{3),4)}。ただし空中写真測量と異なり近接写真測量では収束撮影が多くなるので係数行列は帯行列にならない。そのため帯行列用のCholesky法³⁾は使えない。空中三角測量では写真枚数200枚、地上点数5-600点も珍しくないで、係数行列の次数が大きくなる。このため正規方程式を解くのに一旦外部標定要素のみを変数とする縮約式を解き、ついで対象空間点の座標を計算するのが普通である。この論文でもその方法をとった。

けれども通常近接写真測量では点数も写真枚数も極端に大きくなるので、正規方程式を Gauss-Seidel^(2),5)法で一度に解くのが最も能率的であり、メモリも小さくてすむ。しかし著者の経験によれば実際には次の難点があった。

1) Gauss-Seidel 法では、大ざっぱに言って解が収束するためには対角項が非対角項より大きくなければならない。しかし長さや角度の単位のとおり方で非対角要素が大きくなり解が収束しないことがあった。

2) 未知数の標準偏差を求めようとする、後述する縮約した係数行列 (A_{11} と同じサイズ) の逆行列が必要になり、Gauss-Seidel 法を使っても結局係数行列分のメモリが必要になり、メモリの節約にならない (ただし、標準偏差の計算は正規方程式を解いた後に行えるので別のプログラム単位にして扱えば問題はない)。

正規方程式(2-9')を解くのにまず第2式より、

$$\Delta_2 = A_{22}^{-1}(E_2 - A_{21}\Delta_1) \quad (2-10)$$

これを第1式に代入して Δ_2 を消去すると次の縮約式を得る。

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\Delta_1 = E_1 - A_{12}A_{22}^{-1}E_2 \quad (2-11)$$

あるいはベクトル形式でまとめて

$$R\Delta_1 = b \quad (2-11')$$

を得る。ここで

$$R = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

$$b = E_1 - A_{12}A_{22}^{-1}E_2$$

まず式(2-11)から Δ_1 を解く。連立方程式の解法については3節を参照のこと。続いて式(2-10)から Δ_2 を得る。得られた解 Δ_1 、 Δ_2 は近似値に対する補正量であり、式(2-3)、式(2-4)によって新しい近似値に更新する。収束の判定は次のように定める。

$$\epsilon = V^T w V + V_2^T W_2 V_2 \doteq e^T w e + e_2^T W_2 e_2 \quad (2-12)$$

の値が $|\epsilon(n) - \epsilon(n-1)| / \epsilon(n) < 0.01$

のとき (ここで n は第 n 回の繰り返しで得られた値を意味する)、あるいは各補正量が

$$|\Delta X_{0i}| < 1\text{mm} \quad |\Delta X_j| < 1\text{mm}$$

$$\begin{aligned} |\Delta Y_{0i}| &< 1\text{mm} & |\Delta Y_j| &< 1\text{mm} \\ |\Delta Z_{0i}| &< 1\text{mm} & |\Delta Z_j| &< 1\text{mm} \\ |\Delta \Omega_i| &< 1\text{sec} & & \\ |\Delta \Phi_i| &< 1\text{sec} & (j=1,2,\dots,n) & \\ |\Delta K_i| &< 1\text{sec} & & \\ & & (i=1,2,\dots,p) & \end{aligned}$$

のとき収束したとした。

2. 4 統計量の計算

観測精度の推定値である重み1の残差分散は次式で定義される。

$$\sigma_0^2 = (V^T w V + V_2^T W_2 V_2) / (2n + \text{rank}(W_2)) \quad (2-13)$$

- 未知パラメータ数

W_2 のランクは基準点座標の観測数に等しい (高さのみの基準点の観測数は1、3次元座標の基準点であれば3、と数えその和になる)。また未知パラメータの数は $6p + 3n$ (外部標定要素の総数と対象空間点の座標の総数) である。

外部標定要素の最確値の分散共分散行列は次式で与えられる。

$$\Sigma = \sigma_0 R^{-1} \quad (2-14)$$

行列 R は、連立方程式(2-11)を Cholesky 法で解くときに特殊な形に分解してあり (LU 分解)、 R の逆行列を求めるのにこれを利用して効率的に計算することができる。

3. Choleskyの方法による連立方程式と逆行列の解法

3. 1 行列の分割による係数計算

この節では、正規方程式(2-11')の解、および、その係数行列の逆行列 R^{-1} の計算を Cholesky 法で求める手続きを示す。

式(2-9')の行列 A_{11}, A_{12}, A_{22} およびベクトル E_1, E_2 の構造はたとえば $p=2, m=3$ のとき次のようになる。

$$A_{11} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1112} \\ A_{1121} & A_{1122} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} A_{1211} & A_{1212} & A_{1213} \\ A_{1221} & A_{1222} & A_{1223} \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} A_{2211} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & A_{2233} \end{bmatrix} \quad E_1 = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} E_{21} \\ E_{22} \\ E_{23} \end{bmatrix}$$

$A11_{ij}, A12_{ij}, A22_{ij}$ はそれぞれ $(6*6), (6*3), (3*3)$ の小行列, また $E1_i, E2_j$ は $(6*1), (3*1)$ のベクトルである。

縮約式(2-11')の行列 R, b を同様に分割して、

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

(R_{ij} は $(6*6)$ 行列, b_i は $(6*1)$ ベクトル)

と表せば R_{ij}, b_i は

$$R_{ij} = A11_{ij} - \sum_{k=1}^n A12_{ik} A22^{-1}_{kk} A12^T_{kj} \quad (3-1)$$

$$b_i = E1_i - \sum_{k=1}^n A12_{ik} A22^{-1}_{kk} E2_k \quad (3-2)$$

で計算できる。

式(2-11)を解いて Δ_1 を得た後、式(2-10)より Δ_2 は次のように求められる。 Δ_1, Δ_2 を分割して

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \Delta 1_1 \\ \Delta 1_2 \end{bmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} \Delta 2_1 \\ \Delta 2_2 \\ \Delta 2_3 \end{bmatrix}$$

と表せば ($\Delta 1_i$ は $(6*1)$ ベクトル, $\Delta 2_j$ は $(3*1)$ ベクトル)、

$$\Delta 2_j = A22^{-1}_{jj} (E2_j - \sum_{k=1}^p A12^T_{jk} \Delta 1_k) \quad (3-3)$$

で計算する。

3. 2 Cholesky法による連立方程式の解法 あらためて(2-11')の縮約式を

$$R x = b$$

と書く。この節では、式(2-11')の記号を変えて $x = \Delta_1$ と表した。この式をCholesky法では次のように解く。まず R (次元は $(m*m)$ 、 $(m = 6p)$) を

$$R = LDL^T \quad (3-4)$$

に分解する。 L は下三角行列、 D は対角行列である。行列 R, L, D を

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & * \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ & a_{m1} & a_{m2} & a_{mm} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & 0 \\ & l_{m1} & l_{m2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & 0 \\ & & & \\ & & & d_{mm} \end{bmatrix}$$

と書くと l_{ij}, d_{ii} は 次の式(3-6)以下の関係から順番に求めることができる。なお式中の w_{ij} は

$$w_{ij} = l_{ij} d_{jj} \quad (3-5)$$

で定義し、計算の便宜のためのバッファである(観測の重みではない)。

$$\left. \begin{array}{l} i \\ \sum_{j=1}^i l_{kj} d_{jj} l_{ij} = a_{ki} \quad (k < j) \\ k-1 \\ \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} d_{jj} l_{kj} + d_{kk} = a_{kk} \end{array} \right\} \quad (3-6)$$

式(3-6)の内容を具体的に示すと次のようになる。

$$a_{11} = d_{11} \quad \rightarrow \quad d_{11} = a_{11}$$

$$a_{21} = \sum_{j=1}^1 l_{2j} d_{jj} l_{1j} = l_{21} d_{11} = w_{21} \quad \rightarrow \quad l_{21} = w_{21}/d_{11}$$

$$a_{22} = \sum_{j=1}^1 l_{2j} d_{jj} l_{2j} + d_{22} \quad \rightarrow \quad d_{22} = a_{22} - w_{21} l_{21}$$

$$a_{31} = \sum_{j=1}^1 l_{3j} d_{jj} l_{1j} = l_{31} d_{11} = w_{31} \quad \rightarrow \quad l_{31} = w_{31}/d_{11}$$

$$a_{32} = \sum_{j=1}^2 l_{3j} d_{jj} l_{2j} = l_{31} d_{11} l_{21} + l_{32} d_{22} = w_{31} l_{21} + w_{32}$$

$$w_{32} = a_{32} - w_{31} l_{21} \quad \rightarrow \quad l_{32} = w_{32}/d_{22}$$

$$a_{33} = \sum_{j=1}^2 l_{3j} d_{jj} l_{3j} + d_{33} \quad \rightarrow \quad d_{33} = a_{33} - w_{31} l_{31} - w_{32} l_{32}$$

実際には行列 R を

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & * \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/d_{11} & & & \\ l_{21} & 1/d_{22} & & * \\ l_{31} & l_{32} & 1/d_{33} & \\ & & & \\ l_{m1} & l_{m2} & & 1/d_{mm} \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

の形に変換し、Rのメモリをそのまま使ってL, Dを記憶するので他にワーク領域を使う必要はない。Dの逆行列を記憶するのは対角要素は以降の処理に必ず1/d_{jj}の形で現れるからである。

式(3-4)の形にRを分解できれば方程式

$$LDL^T x = b \quad (3-8)$$

を解くには、つぎの連続する2つの方程式を解けば良い。

$$Ly = b, \quad DL^T x = y \quad (3-9)$$

これは次のような前進代入と後退代入によって簡単に解ける。ただしベクトルx, yの成分を

$$y = (y_i), \quad x = (x_i) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

としておく。

$$y_1 = b_1 \\ l_{21}y_1 + y_2 = b_2 \quad \rightarrow y_2 = b_2 - l_{21}y_1$$

$$\sum_{j=1}^k l_{kj}y_j = b_k \quad \rightarrow y_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}y_j \quad (k=3, 4, \dots, m)$$

$$d_{mm}x_m = y_m \quad \rightarrow x_m = y_m/d_{mm} \quad (k=m) \\ d_{m-1, m-1}(x_{m-1} + l_{m, m-1}x_m) = y_{m-1} \\ \rightarrow x_{m-1} = y_{m-1}/d_{m-1, m-1} - l_{m, m-1}x_m$$

$$d_{k, k}(x_k + \sum_{i=k+1}^m l_{ik}x_i) = y_k \quad (k=m-1, m-2, \dots, 1)$$

$$\rightarrow x_k = y_k/d_{k, k} - \sum_{i=k+1}^m l_{ik}x_i$$

3. 3 Cholesky法による逆行列の解法

行列Rが式(3-4)の形に分解されていればその逆行列は次のようになる。

$$R^{-1} = (L^{-1})^T D^{-1} L^{-1} \quad (3-10)$$

Lの逆行列を掃き出し法で求める。Lと同じサイズの単位行列をIとすると、適当な行変換を続けて

$$(LI) \rightarrow (IL^{-1})$$

にすれば良い^{4), 5)}。(4*4)行列で最初のステップを示せば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & m_{21}(1) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 & m_{31}(1) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{42} & l_{43} & 1 & m_{41}(1) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & m_{21}(1) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & m_{31}(2) & m_{32}(2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 & m_{41}(2) & m_{42}(2) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一般には

$$m_{ij}(k) = -m_{i-1, j}(k-1)l_{ik} + m_{ij}(k-1) \quad (3-11)$$

ここでm_{ij}(k)はkステップで現れる最初Iだった行列のij要素である。Lの対応要素は0に変換されてしまうから、処理は行列Lのみのメモリがあれば十分であって、同じ要素の上に書き込んで行けば良い。従ってその部分のプログラムは次のようである。ただしLの要素、Dの要素とも式(3-7)のようにRのメモリに書かれていることに注意する。

Rの要素は A(i, j), Rの次元は(n*n)とする。

```

do 10 i=2, n
10 A(i, 1) = -A(i, 1)
c
do 20 k=3, n
do 50 i=k, n
do 50 j=1, k-2

50 A(i, j) = -A(k-1, j)*A(i, k-1) + A(i, j)
c
do 60 i= k, n
60 A(i, k-1) = -A(i, k-1)
20 continue
    
```


行列 L を求めたあと、式(3-10)から R の逆行列を計算する。計算は次のように行えばワーク領域を使うことなく実行できる。行列部分を次の 4 つに分け各行を左から右に計算する。

- 1) I=1, J=1
- 2) $2 \leq I \leq n-1, 1 \leq J \leq I-1$
- 3) $2 \leq I \leq n-1, J=I$
- 4) $I=n, 1 \leq J \leq n-1$

```

C  I=1, J=1
    t= A(1,1)
    do 40 k=2,n
40  t= t+A(k,1)*A(k,k)*A(k,1)
    A(1,1)=t

```

```

C
C  2<=I<=n-1, 1<=J<=I-1
    do 10 i=2,n-1
    do 20 j=1,i-1
    t= A(i,i)*A(i,j)
    do 30 k= i+1,n
30  t= t+ A(k,i)*A(k,k)*A(k,j)
20  continue

```

```

C
C  2<=I<=n-1, J=I
    t= A(i,i)
    do 50 k= i+1,n
50  t= t+ A(k,i)*A(k,k)*A(k,j)

```

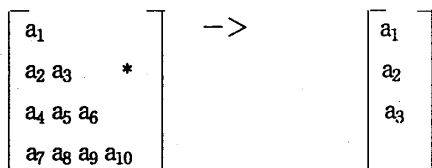
```

C
10  continue
C  I= n
    do 20 j=1,n-1
20  A(n,j) = A(n,n)*A(n,j)

```

3. 4 行列の 1 次元化

式(2-11')の行列 R, 式(2-10)などの行列 A₂₂ は対称行列であるが、上記のプログラムでは下三角行列しか使っていない。実際のプログラムでは行列を次のように 1 次元ベクトルで表してメモリを節約する。



通常の 2 次元配列 $R = (a_{ij})$ との要素の対応は次式で表される。

$$a_{ij} \longleftrightarrow a_k \quad k = i(i-1)/2 + j \quad (3-13)$$

4. プログラムの構造

4. 1 全体の流れ

計算の流れは図 2 のようになっている。最初対象空間点の座標を読み込み、ついで内部外部の標定要素の規定値および近似値を読み込む。調整計算を開始すると、写真番号を第 1 引き数にして各写真ごとに全対象点をスキャンする。対象点に対応する写真点座標を見だし、各写真点ごとに観測方程式の係数を計算する。係数の計算が終わると残差分散を計算し、パラメータの近似値が収束しているかを調べる（最初は当然していない）。収束していなければ正規方程式を作り、それを解き、近似値を更新する。収束していれば外部標定要素の最確値の標準偏差を計算し、最確値の値とともに出力する。さらに対象点の最確値と残差を出力する。

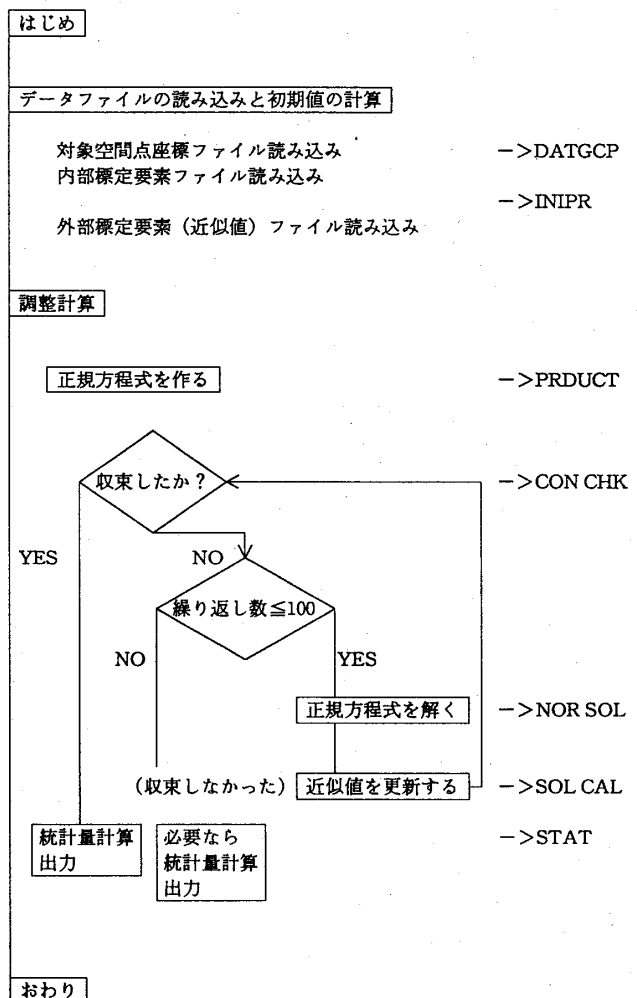


図-2 処理の流れ

4. 2 各サブルーチンの内容

SUBROUTINE DATGCP——対象点座標 XYZ を読み込む。各座標の値とその重みが標準偏差の値でファイル FOBJ に入っている。ただし基準点でない点の座標の重みは 0 とする。

SUBROUTINE INIPRM——このサブルーチンでは以下の作業を行う。

(1) いくつかの常数の定義

(2) 写真座標をファイル FPHE から読み込む。さらに観測条件式を作らない写真点や対象点をチェックする。次の条件の対象空間点、写真点はチェックして警告する。

- 1) 1 枚の写真中に 2 点以上同一 (対象) 点の座標が与えられている写真点。
- 2) 各対象点に対し 1 点以下の写真点しかないもの (すなわちただか 1 枚の写真にしか写っていない)。
- 3) 各写真点に対し対応する対象点がないもの。

(3) 写真座標の観測精度 (標準偏差)、内部標定要素の規定値をファイル FINT から読み込む。内部標定要素としては画面距離、指標座標、主点位置、レンズ歪の中心点座標が入っているが、これらの値は内部標定の段階ですでに使われていて、ファイル FPHE の写真座標はすでに主点位置を原点とし、レンズ歪を補正したものと仮定する。

(4) 外部標定要素の近似値をファイル FEXT から読み込む。

(5) 観測の自由度を計算する。

SUBROUTINE PRODUCT——正規方程式の係数を計算する。メモリを節約するために正規方程式(2-9)の係数を直接作っていく。記憶領域としては A11, A22, E1, E2 を 1 次元配列として取り、A12 は(6*3)の部分行列ごとに直接編成ファイルに記憶する。A11, A22 などの計算はつぎのようにする。各写真ごとに写真点座標を読み込み、B1, B2, e1, e2 の成分を計算し順次加えていく。A12 の成分のみは各点ごとに計算し、ファイル NOR12 に書き出す。したがって、写真点座標については一つの写真中に含まれる最大点数の分のメモリを取って置く。

SUBROUTINE DATPHO——写真座標をファイル FPHE から読み込む。写真番号が引き数になっている。SUBROUTINE DATACAL——線形化した共線条件の微分係数を計算する。写真番号と対象点番号が引き数になっている。

SUBROUTINE N11CAL, N22CAL, N12CAL——

それぞれ A11 と E1, A22 と E2, A12 を計算する。

SUBROUTINE CONCHK——最小 2 乗法の解の収束をチェックする。

SUBROUTINE NORSOR——2. 3 節に従い正規方程式の解法のためのサブルーチン REDUCE, CHD CMP, CH SOLV, CAL SOL2 を呼ぶ。

SUBROUTINE REDUCE——正規方程式(2-9')を縮約し、式(2-11')を得る。

SUBROUTINE CHD CMP——縮約正規式の係数行列 R を Cholesky 分解する。

SUBROUTINE CH SOLV——縮約式(2-11')を解いて、外部標定要素の補正量 $\Delta 1$ を求める。

SUBROUTINE CAL SOL2——式(2-10)によって対象空間点の座標 $\Delta 2$ を求める。

SUBROUTINE AA2INV——式(2-10)の行列 A22 の逆行列を Cholesky 法によって計算する。

SUBROUTINE SOLCAL——未知パラメータの近似値を更新する。

SUBROUTINE STAT——2. 4 節に従って、外部標定要素の最確値の標準偏差を計算する。

SUBROUTINE CH INVS——3. 3 節に従って係数行列 R の逆行列を計算する。

参考文献

- 1) ASPRS 編: MANUAL OF PHOTOGRAMMETRY (4th ed), 1986, pp. 88-100
- 2) 日本写真測量学会編: 解析写真測量, 1985, pp. 126-148
- 3) 森 正武: FORTRAN77 数値計算プログラミング、岩波コンピュータサイエンス、岩波書店、1986、pp. 52-78
- 4) 戸川 隼人: マトリクスの数値計算、オーム社、1971、pp. 51-143
- 5) 雨宮 綾夫、田口 武夫: 数値解析と FORTRAN, 丸善、1969, pp. 265-275