福山大学工学部紀要
第14号　1992年3月

変形されたベッセル関数に関する2，3の公式

新谷　敏朗*

Some Formulae on the Modified Bessel Functions

Toshio SHINTANI

ABSTRACT

A linear combination of the modified Bessel functions is a general solution of the Laplace differential equation under a boundary condition in the cylindrical co-ordinate system. An example of such cases is the two-dimensional analysis of electro-magnetic fields and eddy currents of cylindrical and conductive dampers in superconducting generators. The analytic solution with integral constants derived from the boundary condition has a very complex expression. In this note, some recursion formulae of the modified Bessel funcions, which make the reductions of expressions easier considerably, are derived from the Lommel's equations.

Key words : Modified Bessel function, Recursion formula, Lommel function

1．まえがき

円筒座標系において、ある境界条件のもとでLaplaceの方程式を解くと、一般解は変型されたBessel関数を含む。そのような場合のひとつの例としては、ダンパ円筒の渦電流を考慮した超電導発電機の内部電磁界の2次元解析を行う場合が挙げられる。[1] その際、境界条件から積分定数を定める作業はかなり煩雑な式の導出を含み、それにより得られた解析解は、複素変数のBessel関数を含むかなり複雑な形の式となる。本報告では、そのような複雑な解の導出の過程で用いることができる2，3の公式を導いた。

2．記　号

本報告で使用する記号をまとめて以下に示す。

v：実数、z，w：複素数、m，n：整数

$i=\sqrt{-1}$　　（虚数単位）

$I_v(z)$：第1種の変形されたBessel関数

$K_v(z)$：第2種の変形されたBessel関数

$R_{n,v}(z)$：Lommelの多項式

$$R_{n,v}(z)=-R_{-n-2,v+n+1}(z) \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&R_{0,v}(z)=1\\
&R_{1,v}(z)=\frac{2v}{z}\\
&R_{2,v}(z)=\frac{4v(v+1)}{z^2}-1\\
&R_{-1,v}(z)=0\\
&R_{-2,v}(z)=-1\\
&R_{-3,v}(z)=\frac{2(2-v)}{z}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

それらに関して、次のような漸化公式[2]と加法定理[3]が成り立つ。

$$I_{v-1}(z)-I_{v+1}(z)=\frac{2v}{z}I_v(z) \tag{3}$$

*情報処理工学科

$$K_{v-1}(z)-K_{v+1}(z)=-\frac{2v}{z}K_v(z) \tag{4}$$

$$I_{v-1}(z)K_v(z)+K_{v-1}(z)I_v(z)=\frac{1}{z} \tag{5}$$

$$R_{n-1,v}(z)+R_{n+1,v}(z)=\frac{2(v+n)}{z}R_{n,v}(z) \tag{6}$$

$$I_v(z\text{-}w)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m I_{v+m}(z)I_m(w) \tag{7}$$

$$K_v(z\text{-}w)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}K_{v+m}(z)I_m(w) \tag{8}$$

3．拡張された漸化公式(1)

(3)式を繰り返し適用することにより、$I_{v+n}(z)$を$I_v(z)$と$I_{v-1}(z)$によって表わすことができる。同様に、(4)式を繰り返し適用すると、$K_{v+n}(z)$を$K_v(z)$と$K_{v-1}(z)$によって表わすことが可能である。それにより、次の公式を得る。

〔公式１〕

$$I_{v+n}(z)=I_v(z)(-i)^nR_{n,v}(iz)+I_{v-1}(z)(-i)^{n-1}R_{n-1,v+1}(iz) \tag{9}$$

$$K_{v+n}(z)=K_v(z)\,i^nR_{n,v}(iz)+K_{v-1}(z)\,i^{n-1}R_{n-1,v+1}(iz) \tag{10}$$

（証明）：数学的帰納法を用いる。(9)式について、まずn=0の場合は、$R_{0,v}(iz)=1$，$R_{-1,v+1}(iz)=0$なので、

右辺$=I_v(z)=$左辺

が成り立つ。次にn=1の場合も、同様に(2)式から、

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=I_v(z)(-i)R_{1,v}(iz)+I_{v-1}(z)(-i)^0R_{0,v+1}(iz)\\&=-\frac{2v}{z}I_v(z)+I_{v-1}(z)\\&=\text{左辺}\end{aligned}$$

が成り立つ。そして、(9)式がn=0,1…,m-1,mについて成立すると仮定すると、n=m+1の場合も、

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=I_{v+m+1}(z)\\&=I_{v+m-1}(z)-\frac{2(v+m)}{z}I_{v+m}(z)\\&=I_v(z)(-i)^{m-1}R_{m-1,v}(iz)\\&\quad+I_{v-1}(z)(-i)^{m-2}R_{m-2,v+1}(iz)\\&\quad-\frac{2(v+m)}{z}\{I_v(z)(-i)^mR_{m,v}(iz)\\&\quad+I_{v-1}(z)(-i)^{m-1}R_{m-1,v+1}(iz)\}\\&=I_v(z)(-i)^{m+1}\{-R_{m-1,v}(iz)\\&\quad+\frac{2(v+m)}{iz}R_{m,v}(iz)\}\\&\quad+I_{v-1}(z)(-i)^m\{-R_{m-2,v+1}(iz)\\&\quad+\frac{2(v+m)}{iz}R_{m-1,v+1}(iz)\}\\&=I_v(z)(-i)^{m+1}R_{m+1,v}(iz)\\&\quad+I_{v-1}(z)(-i)^mR_{m,v+1}(iz)\\&=\text{右辺}\end{aligned}$$

が成立する。但し、式の変形には(3)式と(6)式を用いた。次にnが負の場合を考える。n=-1の場合は、$R_{-1,v}(iz)=0$, $R_{-2,v+1}(iz)=-1$なので、

右辺$=I_{v-1}(z)=$左辺

が成り立つ。そして、(9)式がn=0,-1,…,m+1,mについて成立すると仮定すると、n=m-1の場合も、

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=I_{v+m-1}(z)\\&=I_{v+m+1}(z)+\frac{2(v+m)}{z}I_{v+m}(z)\\&=I_v(z)(-i)^{m+1}R_{m+1,v}(iz)\\&\quad+I_{v-1}(z)(-i)^mR_{m,v+1}(iz)\\&\quad+\frac{2(v+m)}{z}\{I_v(z)(-i)^mR_{m,v}(iz)\\&\quad+I_{v-1}(z)(-i)^{m-1}R_{m-1,v+1}(iz)\}\\&=I_v(z)(-i)^{m-1}\{-R_{m+1,v}(iz)\\&\quad+\frac{2(v+m)}{iz}R_{m,v}(iz)\}\\&\quad+I_{v-1}(z)(-i)^{m-2}\{-R_{m,v+1}(iz)\\&\quad+\frac{2(v+m)}{iz}R_{m-1,v+1}(iz)\}\\&=I_v(z)(-i)^{m-1}R_{m-1,v}(iz)\\&\quad+I_{v-1}(z)(-i)^{m-2}R_{m-2,v+1}(iz)\\&=\text{右辺}\end{aligned}$$

が成立する。

次に(10)式について同様に考える。まずn=0の場合は、$R_{0,v}(iz)=1$, $R_{-1,v+1}(iz)=0$なので、

右辺$=K_v(z)=$左辺

が成り立つ。次にm=1の場合も、同様に(2)式から、

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=K_v(z)iR_{1,v}(iz)\\&\quad+K_{v-1}(z)i^0R_{0,v+1}(iz)\end{aligned}$$

$$=\frac{2\nu}{z}K_\nu(z)+K_{\nu-1}(z)$$

$$=\text{左辺}$$

が成り立つ。そして、(10)式がn=0,1,…,m-1,mについて成立すると仮定すると、n=m+1の場合も、

$$\text{左辺}=K_{\nu+m+1}(z)$$

$$=K_{\nu+m-1}(z)+\frac{2(\nu+m)}{z}K_{\nu+m}(z)$$

$$=K_\nu(z)i^{m-1}R_{m-1,\nu}(iz)$$

$$+K_{\nu-1}(z)i^{m-2}R_{m-2,\nu+1}(iz)$$

$$+\frac{2(\nu+m)}{z}\{K_\nu(z)i^mR_{m,\nu}(iz)$$

$$+K_{\nu-1}(z)i^{m-1}R_{m-1,\nu+1}(iz)\}$$

$$=K_\nu(z)i^{m-1}\{-R_{m-1,\nu}(iz)$$

$$+\frac{2(\nu+m)}{iz}R_{m,\nu}(iz)\}$$

$$+K_{\nu-1}(z)i^m\{-R_{m-2,\nu+1}(iz)\}$$

$$+\frac{2(\nu+m)}{iz}R_{m-1,\nu+1}(iz)\}$$

$$=K_\nu(z)i^{m+1}R_{m+1,\nu}(iz)$$

$$+K_{\nu-1}(z)i^mR_{m,\nu+1}(iz)$$

$$=\text{右辺}$$

が成立する。次にnが負の場合を考える。n=-1の場合は、$R_{-1,\nu}(iz)=0, R_{-2,\nu+1}(iz)=-1$なので、

右辺$=K_{\nu-1}(z)=$左辺

が成り立つ。そして、(10)式がn+0,-1,…,m+1,mについて成立すると仮定すると、n=m-1の場合も、

$$\text{左辺}=K_{\nu+m-1}(z)$$

$$=K_{\nu+m+1}(z)-\frac{2(\nu+m)}{z}K_{\nu+m}(z)$$

$$=K_\nu(z)i^{m+1}R_{m+1,\nu}(iz)$$

$$+K_{\nu-1}(z)i^mR_{m,\nu+1}(iz)$$

$$-\frac{2(\nu+m)}{z}\{K_\nu(z)i^mR_{m,\nu}(iz)$$

$$+K_{\nu-1}(z)i^{m-1}R_{m-1,\nu+1}(iz)\}$$

$$=K_\nu(z)i^{m-1}\{-R_{m+1,\nu}(iz)$$

$$+\frac{2(\nu+m)}{iz}R_{m,\nu}(iz)\}$$

$$+K_{\nu-1}(z)i^{m-2}\{-R_{m,\nu+1}(iz)\}$$

$$+\frac{2(\nu+m)}{iz}R_{m-1,\nu+1}(iz)\}$$

$$=K_\nu(z)i^{m-1}R_{m-1,\nu}(iz)$$

$$+K_{\nu-1}(z)i^{m-2}R_{m-2,\nu+1}(iz)$$

$$=\text{右辺}$$

が成立する。

以上より、(9)、(10)式は任意の実数νと任意の整数nに対して成立する。(証明終わり)

4．拡張された漸化公式(2)

前節で得られた〔公式1〕と(5)式から、(5)式を拡張した次のような漸化公式が得られる。

〔公式2〕

$$I_{\nu+n}(z)K_\nu(z)-(-1)^nK_{\nu+n}(z)I_\nu(z)$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{z}R_{n-1,\nu+1}(iz) \qquad (11)$$

(証明)：(11)式の左辺に〔公式1〕の(9)(10)式と(5)式を代入する。

$$\text{左辺}=\{I_\nu(z)(-i)^nR_{n,\nu}(iz)$$

$$+I_{\nu+1}(z)(-i)^{n-1}R_{n-1,\nu+1}(iz)\}K_\nu(z)$$

$$-(-1)^n\{K_\nu(z)i^nR_{n,\nu}(iz)$$

$$+K_{\nu-1}(z)i^{n-1}R_{n-1,\nu+1}(iz)\}I_\nu(z)$$

$$=\{I_{\nu-1}(z)K_\nu(z)+K_{\nu-1}(z)I_\nu(z)\}$$

$$\times(-1)^{n-1}R_{n-1,\nu+1}(iz)$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{z}R_{n-1,\nu+1}(iz)$$

$$=\text{右辺}$$

以上より、任意の実数νと任意の整数nに対して(11)式が成立する。(証明終わり)

次に(11)式の両辺に$-(-1)^{n-1}$をかけることにより、

$$I_\nu(z)K_{\nu+N}(z)-(-1)^nK_\nu(z)I_{\nu+n}(z)$$

$$=\frac{i^{n-1}}{z}R_{n-1,\nu+1}(iz) \qquad (12)$$

が得られる。また(12)式において、n→m，とした後ν→ν＋n，m→m－nとすることにより、

$$I_{\nu+n}(z)K_{\nu+m}(z)-(-1)^{m-n}K_{\nu+n}(z)I_{\nu+m}(z)$$

$$=\frac{i^{m-n-1}}{z}R_{m-n-1,\nu+n+1}(iz) \qquad (13)$$

が得られる

(11)式において、n=-1とすると(11)式は(5)式と一致する。また、(11)式において、n=1とすると次式が

得られる。

$$I_{v+1}(z)K_v(z)+K_{v+1}(z)I_v(z)=\frac{1}{z} \tag{14}$$

次に、(11)式においてn=2とすると(15)式が、(13)式においてn=-1,m=1とすると(16)式がそれぞれ得られる。

$$I_{v+2}(z)K_v(z)-K_{v+2}(z)I_v(z)=-\frac{2(v+1)}{z^2} \tag{15}$$

$$I_{v-1}(z)K_{v+1}(z)-K_{v-1}(z)I_{v+1}(z)=\frac{2v}{z^2} \tag{16}$$

5．加法定理と漸化公式から導かれる公式

変形されたBessel関数の漸近展開式[2])から、$|z|\to\infty$の時、(17)式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} I_v(z) &\to e^z\sqrt{\frac{1}{2\pi z}} \\ K_v(z) &\to e^{-z}\sqrt{\frac{\pi}{2z}} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

従って、$I_v(z)$、$K_v(z)$の値を数値計算する際$|z|$が大きいとe^zによるoverflowとe^{-z}によるunderflowが生じる。* しかし、実際上は$I_v(z)$、$K_v(z)$各々の値は必要ではなく、両者の積のみが必要である場合も多い。例えば、文献〔1〕で取り上げた問題では、

$$I_{v+n}(z)K_v(z-w)-(-1)^nK_{v+n}(z)I_v(z-w) \tag{18}$$

という形の式が現れる。このような場合はe^zとe^{-z}の項が打ち消しあうので、数値計算が可能な$|z|$の範囲が広がることになる。この形の式に対して、次の公式が得られる。

〔公式3〕

$$I_{v+n}(z)K_v(z-w)-(-1)^nK_{v+n}(z)I_v(z-w)$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}I_m(w)\frac{i^{m-n-1}}{z}R_{m-n-1,v+n+1}(iz) \tag{19}$$

（証明）：左辺に、加法定理(7)、(8)式と前節で得られた(13)式を代入する。

$$左辺=I_{v+n}(z)\sum_{m=-\infty}^{\infty}K_{v+m}(z)I_m(w)$$
$$-(-1)^nK_{v+n}(z)\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^mI_{v+m}(z)I_m(w)$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}I_m(w)\{I_{v+n}(z)K_{v+m}(z)$$
$$-(-1)^{m-n}K_{v+n}(z)I_{v+m}(z)\}$$
$$=右辺$$

以上より、任意の実数vと任意の整数nに対して(19)式が成立する。（証明終わり）

なお、w=0の時は、$I_0(z)=1$, $I_n(z)=0(n\neq0)$[2)]なので、(1)式を考慮すると、(19)式は、

$$I_{v+n}(z)K_v(z)-(-1)^nK_{v+n}(z)I_v(z)$$
$$=\frac{i^{-n-1}}{z}R_{-n-1,v+n+1}(iz)$$
$$=\frac{(-i)^{n-1}}{z}R_{n-1,v+1}(iz)$$

となり、(11)式と一致する。

〔公式3〕は無限級数の形をしているので、数値計算に用いる際は、収束の速さが問題になると考えられる。文献〔1〕では$|z|$が大きい場合の(19)式の値を計算するために、漸近展開式を利用した近似計算を行った。それに対して、(19)式では$R_{n,v}(z)$がz^{-1}の多項式であることを考慮すると、特に$|w|$が小さい場合には〔公式3〕を(18)式の数値計算に用いることができる可能性があると考えられる。

6．あとがき

本報告ではLommel関数を用いて、変形されたBessel関数に関する2，3の公式を導出した。Bessel関数$J_v(z)$、$N_v(z)$に関しては、本報告の〔公式1〕、〔公式2〕に対応する、Lommel関数を用いた漸化公式がよく知られている。著者は、文献〔1〕でLaplceの方程式の一般解から境界条件を用いて積分定数を定める際に、本報告で導いた変形されたBessel関数$I_v(z)$、$K_v(z)$に関する公式が必要になり、公式集やBessel関数に関する文献を調べたが記載されていなかった。また現在利用可能な科学技術計算用サブルーチンライブラリでは、複素変数で整数次の変形されたBessel関数$I_n(z)$、$K_n(z)$の値は計算することができるが、実数次のもの$I_v(z)$、$K_v(z)$は計算することはできない。

本報告で得た公式は、実数次の変形されたBessel関数$I_v(z)$、$K_v(z)$の数値計算に用いることができる。特に$I_v(z)$、$K_v(z)$の両者の積が必要な場合には、計算可能な引き数($|z|$)の範囲が広がることが期待できる。

---

*具体的な値は使用する計算機の精度によって異なるが、例えば文献〔4〕によるとRe(z)＞174.673、またはIm(z)＞174.673でoverflowまたはunderflowが生じる。

参考文献

〔1〕 新谷、仁田、岡田：超電導発電機の機器定数の構造パラメータによる簡易表現、電気学会論文誌B，Vol.106, No12, pp.1075（昭61-12）

〔2〕 森ロ、宇田川、一松：岩波数学公式集III、岩波書店（昭35-3）

〔3〕 G.N.Watson:A treatise on the theory of Bessel function, Cambridge (1958)

〔4〕 FACOM FORTRAN SSL II 使用手引書、富士通（昭55-12）