

## 薄板導体の渦電流解析

坪井 始\*・田中 始男\*・小林 富士男\*・美咲 隆吉\*

### Eddy Current Analysis of Thin Conducting Plates

Hajime TSUBOI, Motoo TANAKA, Fujio KOBAYASHI and Takayoshi MISAKI

#### ABSTRACT

Several methods for eddy current analysis of thin conducting plates have been developed. The eddy current analysis can be performed by an integro-differential method using an electric vector potential. The integro-differential method is formulated as a differential equation by a finite element scheme where the impressed magnetic flux density and the induced magnetic flux density are evaluated by integral terms. In this paper, a method for eddy current analysis of thin conducting plates taking account of the source currents in the conductors is proposed. An electric scalar potential is introduced for the analysis of source current distribution and the distribution of the scalar potential is calculated by a 2-D finite element method which expanded to 3-D arrangement of the thin plates. The formulations for the electric vector potential and the electric scalar potential are shown and the applicability of the proposed method is verified by using experimental models.

#### 1. まえがき

電力機器内には薄板状或いは薄板の円筒状の導体が存在し、その導体上の電流分布が問題になることがある。この場合、薄板導体内の交流電流分布を把握するには渦電流解析が必要となる。渦電流分布の数値解析法として、最近多くの手法が発表されているが、本稿では、薄板導体の渦電流分布の解析法について述べる。薄板導体としては、渦電流がその厚さ方向の成分を持たない、すなわち導体表面に平行な成分のみを持つと近似できる厚さの導体を考える。

薄板導体の渦電流分布の解析法は、いずれも薄板導体の面上に二次元的に分布するポテンシャルを導入している。<sup>(7)-(11)</sup>このポテンシャルは、論文によって種々の解釈がなされているが、結果として電気ベクトルポテンシャルの導体面に垂直な成分と考えられる。<sup>(12)</sup>この電気ベクトルポテンシャルは、微分・積分方程式を用いて解かれる。こ

の場合、渦電流分布を決める微分方程式を面上の二次元有限要素法で離散化し、渦電流の起電力となる磁束の影響を積分項で表わす。本稿では、この手法をソース電流が流れている薄板導体の渦電流分布の解析に拡張する。ソース電流の分布を計算するためにスカラーポテンシャルを用いた有限要素法を導入し、これによって求められたソース電流分布を用いて渦電流分布の解析を行う手法を提案する。また、実験を行い、計算結果と実験結果の比較により提案した手法の妥当性を確認する。

#### 2. 定式化

##### 2.1 基礎方程式

変位電流及び空間電荷がない場合のマクスウエルの方程式は次のように表わされる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{H}$ ：磁界、 $\mathbf{B}$ ：磁束密度、 $\mathbf{E}$ ：電界、

$\mathbf{D}$ ：電束、 $\mathbf{J}$ ：電流密度

また、透磁率を $\mu$ 、導電率を $\sigma$ 、誘電率を $\epsilon$ として、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 、 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ の関係がある。(1)式の両辺の発散をとると、

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5)$$

が得られ、これは透磁率と導電率が一定な導体内において(4)式と等価である。したがって、以後扱う薄板導体内では、(4)式の代わりに(5)式を考える。また、 $\mathbf{J}$ は次のようにソース電流 $\mathbf{J}_s$ と渦電流 $\mathbf{J}_e$ の和として次式で与えられる。

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e \quad (6)$$

この場合、ビオサバルの法則によって計算される磁界は(1)、(3)式を満たす。したがって、ビオサバルの法則によって磁界あるいは磁束密度を計算するならば、電界に関する(2)、(5)を用いて解くべき方程式を作成できる。(1)式の $\mathbf{J}$ においては渦電流の考慮は必要であるが、ビオサバルの法則によって求められる磁束密度 $\mathbf{B}$ を(2)式に代入することにより、(2)式と(5)式を満たすように $\mathbf{E}$ または $\mathbf{J}$ を決める問題を考える。

次に、渦電流問題の定式化のために次式で与えられる電気ベクトルポテンシャル $\mathbf{T}$ を導入する。

$$\nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{J}_e \quad (7)$$

(7)式を(2)式に代入すると薄板導体内における次式が得られる。

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{T} \right) = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8)$$

(7)式はベクトル公式により $\nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0$ を自動的に満たすから(5)式が常に成立し、(8)式が渦電流を求めるための $\mathbf{T}$ の方程式となる。

また、電流密度 $\mathbf{J}$ が与えられたとき、前述したように(1)及び(3)式を満たす磁束密度 $\mathbf{B}$ は、磁性体が存在しない場合にはビオサバルの法則より次式で与えられる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dv \quad (9)$$

ここで、 $V$ ：電流が流れている導体領域、 $\mathbf{r}$ ：ソース点から計算点に向かうベクトルで、その大きさは $r$

(9)式を(8)式に代入し、(6)、(7)式を考慮すると次式が得られる。

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{T} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{(\nabla \times \mathbf{T} + \mathbf{J}_s) \times \mathbf{r}}{r^3} dv \quad (10)$$

Fig.1 Simple thin conducting plate model.

薄板導体内では、電流は導体面に平行な二成分のみを持つため、電気ベクトルポテンシャルは導体面に垂直な成分のみを用いれば(7)式を満たすことができる<sup>(5)</sup>。したがって、ここではこの成分を単に $\mathbf{T}$ と書く。この場合、渦電流の誘導に寄与するのは磁束密度の法線成分のみであるから、(10)式右辺と $\mathbf{n}$ の内積をとり、図1の記号を用いて $\sigma$ が一様な場合には、(10)式は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \mathbf{T} \\ &= \frac{\mu h}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \frac{\{\nabla \times (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{T})\} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} ds \\ &+ \frac{\partial \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{n}}{\partial t} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $h$ ：薄板導体の厚さ、 $\mathbf{n}$ ：薄板導体表面の計算点の法線ベクトル、 $\mathbf{n}'$ ：ソース点の法線ベクトル、 $\mathbf{s}$ ：薄板導体表面

$\mathbf{B}_s$ はソース電流による磁束密度で(9)式から次式で与えられる。

$$\mathbf{B}_s = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}_s \times \mathbf{r}_s}{r_s^3} dv \quad (12)$$

(11)式は $\mathbf{T}$ の最終的な支配方程式となり、左辺は有限要素法によって離散化され、右辺は外部からの強制項として扱われる。このときの境界条件は固定境界条件と自然境界条件である。固定境界条件としては、電流の入出が無い薄板の縁などの境界または対称面に一定の固定値を与える。その値は、物理的な条件では決められず、任意に与えられる(通常 $\mathbf{T} = 0$ )。これは $\mathbf{T}$ を一成分にすることで $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ となり、 $\mathbf{T}$ のゲージは固定されるが、この条件だけでは $\mathbf{T}$ が定数分だけの不定性をもつためである。また、自然境界条件は等ポテンシャル線が境界に垂直になる対称面に与えられる。 $\mathbf{T}$ が求められると、(7)

式より渦電流が求められる。

ソース電流分布の解析は、電気スカラーポテンシャル  $\phi$  を用いて行うことができる。このとき、導体内のソース電流  $\mathbf{J}_s$  と電界  $\mathbf{E}_s$  は次式で定義される。

$$\mathbf{J}_s = \sigma \mathbf{E}_s \tag{13}$$

$$\mathbf{E}_s = -\nabla \phi \tag{14}$$

(13)、(14)式を(5)式に代入すると次のラプラスの方程式が得られる。

$$\sigma \nabla^2 \phi = 0 \tag{15}$$

(15)式が  $\phi$  の支配方程式であり、境界条件としては、印加電圧によってポテンシャルがきまる固定境界条件と電流が入出しない自然境界条件の二種類の条件が与えられる。

また、(14)式の回転をとると、ベクトル公式により恒等的に零である。すなわち、 $\phi$  で決まるソース電流は、渦電流に無関係に決まることを示している。このことは、電気ベクトルポテンシャルと電気スカラーポテンシャルの相互干渉はなく、それぞれ独立に求められることを示している。ただし、(12)式で与えられるソース電流による影響は電気ベクトルポテンシャルの式に入っているため、 $\phi$  を求めてから  $\mathbf{T}$  を求める必要がある。

得られた定式化の確認のために、(6)式を(5)式に代入すると

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J}_s + \nabla \cdot \mathbf{J}_v \tag{16}$$

であるから、右辺の二つの発散はそれぞれ  $\mathbf{T}$  と  $\phi$  を代入すると零となり、(5)式を満たす。また、(14)式の回転は常に零となり、(11)式は、(2)式を満たすから、得られた  $\mathbf{T}$  と  $\phi$  は(2)を満たす。

最終的な電流分布は、求められた二つのポテンシャルからソース電流と渦電流の重畳として、(5)、(7)、(13)式より次式で与えられる。

$$\mathbf{J} = -\sigma \nabla \phi + \nabla \times (\mathbf{nT}) \tag{17}$$

また、(17)式で表される  $\mathbf{J}$  による任意点の磁束密度は(9)式によって計算される。

### 2. 2 離散化

電気ベクトルポテンシャル  $\mathbf{T}$  は、(11)式右辺を強制項と考え、ガラーキンの重み付残差方程式によって定式化した有限要素法の式によって解くことができる。ここで

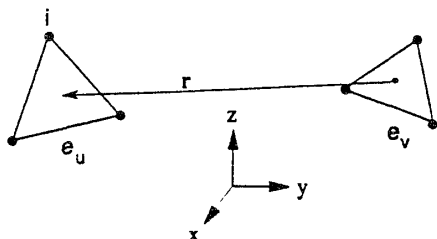


Fig.2 Arrangement of triangular elements.

は、一次近似の平面三角形要素を用いる。

節点  $i$  について作成された式を考えると、(11)式左辺は通常の二次元有限要素法と同様に求められる。また、(11)式右辺の積分を  $I_R$  とすると、図2の三角形要素の配置を用いて  $I_R$  は次のように表される。

$$I_R = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sum_{u=1}^K \left[ \frac{\mu h}{4\pi} \iint_{e_u} N_i \right. \\ \times \sum_{v=1}^L \iint_{e_v} \frac{\{\nabla \times (\mathbf{n}' \mathbf{T})\} \times \mathbf{r}}{r^3} ds' ds \\ \left. + \iint_{e_u} N_i B_s ds \right] \tag{18}$$

ここで、 $e_u$  : 節点  $i$  を含む三角形要素、 $e_v$  : ソースとなるすべての三角形要素、 $K$  :  $e_u$  の数、 $L$  :  $e_v$  の数、 $N_i$  : 補間関数

一次近似の平面三角形要素を用いた場合、 $\nabla \times (\mathbf{n}' \mathbf{T})$  は三角形要素内で一定値となるため、 $e_u$  に関する積分は解析的に行える<sup>(13)</sup>。しかし、 $e_v$  に関する積分は解析的に評価することが難しいため、数値積分によって計算する。一様磁界中の中空球モデル(後述)に対する数値実験の結果、解の収束性から一つの三角形要素の積分点数は7点とした。

整理すると、最終的に次のような  $\mathbf{T}$  の方程式が得られる。

$$[\mathbf{R}]\{\mathbf{T}\} = [\mathbf{M}]\left\{\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right\} + \left\{\frac{\partial B_0}{\partial t}\right\} \tag{19}$$

ここで、 $[\mathbf{R}]$  : 二次元有限要素法の定式化で与えられる係数行列、 $[\mathbf{M}]$  : (18)式右辺第一項から作成される係数行列、 $\{\partial B_0 / \partial t\}$  : ソース電流に関連した(18)式右辺第二項で決まる定数ベクトルの時間微分

また、電気スカラーポテンシャル  $\phi$  の最終方程式は次のようになる。

$$[\mathbf{R}']\{\phi\} = 0 \tag{20}$$

ここで、 $[\mathbf{R}']$  :  $[\mathbf{R}]$  と同様に有限要素法の定式化で得られる係数行列

結果的に、 $[\mathbf{R}']$  と  $[\mathbf{R}]$  は、 $\sigma$  の扱いを除いて同じ係数行列である。

解析は、まず境界条件を(20)式に導入して  $\phi$  を求めてソース電流を計算し、これを用いて(19)式により  $\mathbf{T}$  を求める。そして、最終的な渦電流分布を(7)式から、あるいは磁束密度分布を(9)、(17)式から求めることができる。

### 2. 3 時間微分の考慮

電気ベクトルポテンシャル  $\mathbf{T}$  について(19)式を解いた

めには、 $T$ の時間微分を考慮する必要がある。周知のように強制項が時間の正弦波関数であれば時間微分は $j\omega$ で置き換えることができ、複素数を用いた解析を行うことができる。このとき、(19)式は、次のように変形される。

$$[[R] - j\omega [M]] \{T\} = j\omega \{B_0\} \quad (21)$$

ここで、 $\{T\}$ と $\{B_0\}$ は複素数である。

また、強制項が時間の任意の関数である場合には、後退差分を用いて次式により $\{T\}$ を求めることができる。

$$\begin{aligned} & \left[ [R] - \frac{1}{\Delta t} [M] \right] \{T_{t+\Delta t}\} \\ &= -\frac{1}{\Delta t} [M] \{T_t\} + \left\{ \left( \frac{\partial B_0}{\partial t} \right)_{t+\Delta t} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 $\Delta t$ は時間きざみ、 $\{T_{t+\Delta t}\}$ と $\{T_t\}$ はそれぞれ時刻 $t+\Delta t$ と $t$ における $\{T\}$ の値であり、 $\{T_{t+\Delta t}\}$ は未知、 $\{T_t\}$ は既知である。

### 3. 実験モデルによる検証

ソース電流が流れている場合の渦電流分布の理論解を

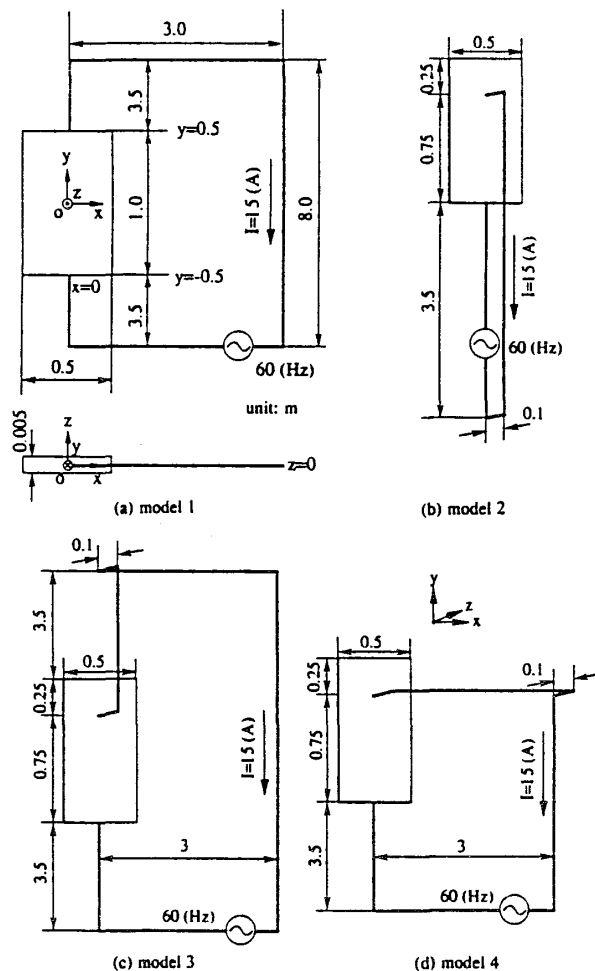


Fig.3 Experimental models.

求めることは難しいため、実験モデルを用いて提案した手法による計算結果の検討を行った。図3に4つの実験モデルの概略を示す。薄板導体は厚さ5(mm)のアルミニウム板で $\sigma = 3.22 \times 10^7$  (S/m)として計算を行った。導線はアルミニウム板の一つの辺の中央ともう一つの辺の中央(モデル1)またはアルミニウム板内(モデル2、3、4)に直径4 (mm) のボルトで接続している。電源電流 $I_s$ は15 (A)として測定した。これらのモデルでは導線内の電源電流 $I_s$ の影響を無視できないため、図3に示す導線の配置で実験を行い、計算においても $I_s$ を考慮した。モデル2、3、4はソース電流分布は同じであるが、導線の配置が異なるモデルである。

図4に示すように、計算はアルミニウム板を800の三角形要素に分割して行った。電気スカラーポテンシャル $\phi$

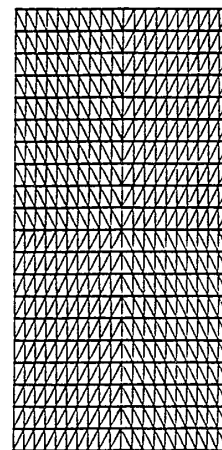


Fig.4 Triangular mesh.

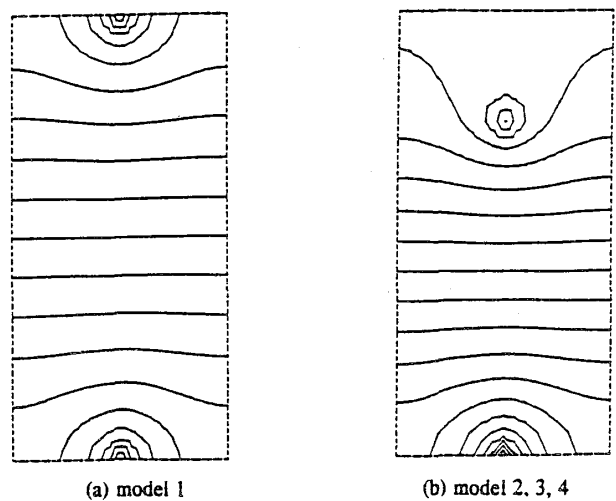


Fig.5 Computation results of electric scalar potential.

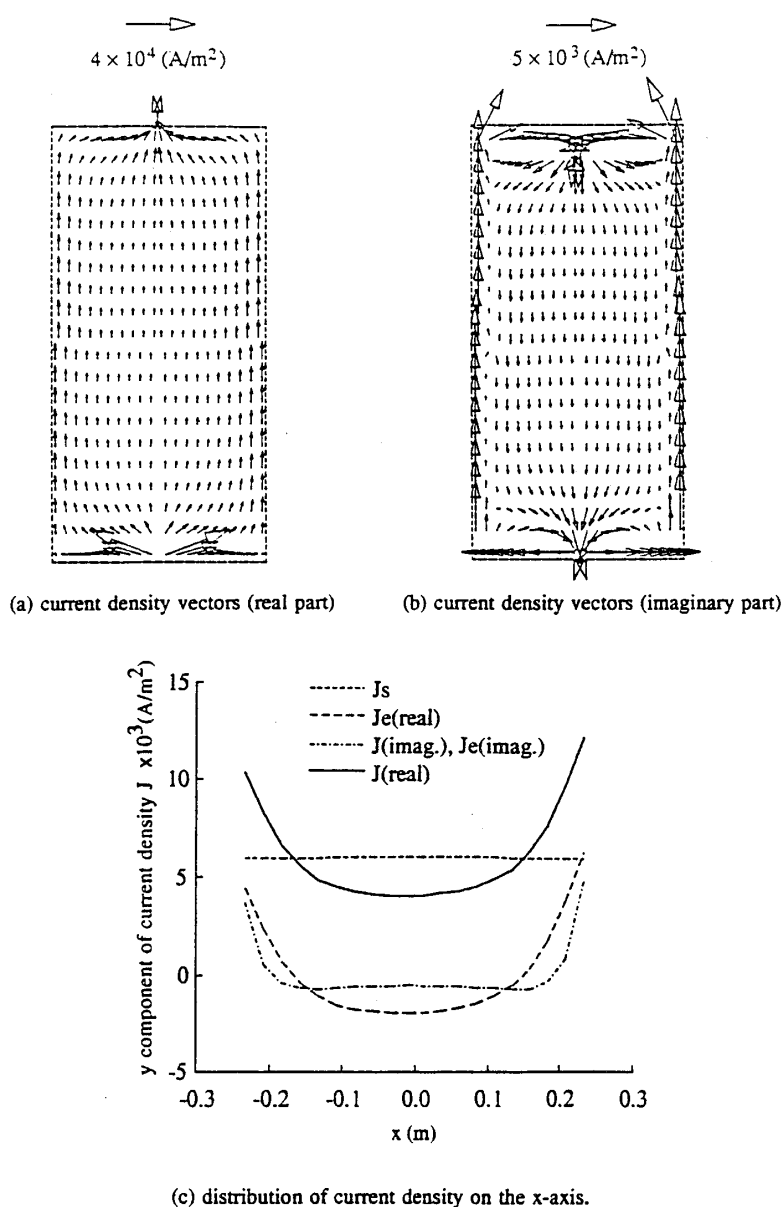


Fig.6 Current distributions.

の計算では導線への接続点の節点に固定値を与えて未知節点数439で、電気ベクトルポテンシャル $T$ の計算ではアルミニウム板の四辺に $T=0$ を与えて未知節点数361で計算を行った。図5(a)、(b)に等ポテンシャル線を示す。ソース電流は $\phi$ 等電位線に垂直に流れ、電流密度は等ポテンシャル線の密度に比例する。また、ポテンシャル線の間隔は印加した電位差の1/20である。

モデル1の電流密度ベクトルの分布と $x$ 軸上の渦電流密度の $y$ 成分の分布を図6に示す。同図において、 $J_s$ はソース電流密度、 $J_r(\text{real})$ と $J_r(\text{imag.})$ はそれぞれ渦電流密度の実部と虚部、 $J(\text{real})$ と $J(\text{imag.})$ はそれぞれ全電流密度の実部と虚部を表している。ここではソース電流が位相の基準となっているので、リース電

流には虚部がなく、全電流の虚部と渦電流の虚部は同一の線で示されている。

図7に各モデルの $T$ の等ポテンシャル線を示す。 $T$ は渦電流分布を表し、渦電流は等ポテンシャル線に沿って流れ電流密度は等ポテンシャル線の密度に比例する。また、ポテンシャル線の間隔はモデル1が0.25 (A/m)、モデル2、3、4が0.4 (A/m)である。モデル2、3、4では、導線を通る電流の影響で、モデルによって渦電流分布が異なることがわかる。図8に、アルミニウム板の上表面から1 cm ( $z=0.0125\text{m}$ )の図に示す線上の磁束密度分布を示す。ここで、磁束密度の $B_x$ 、 $B_y$ と $B_z$ はそれぞれ接線成分と法線成分に対応する。図8に示すように、計算値は実験値によく一致している。モデル1

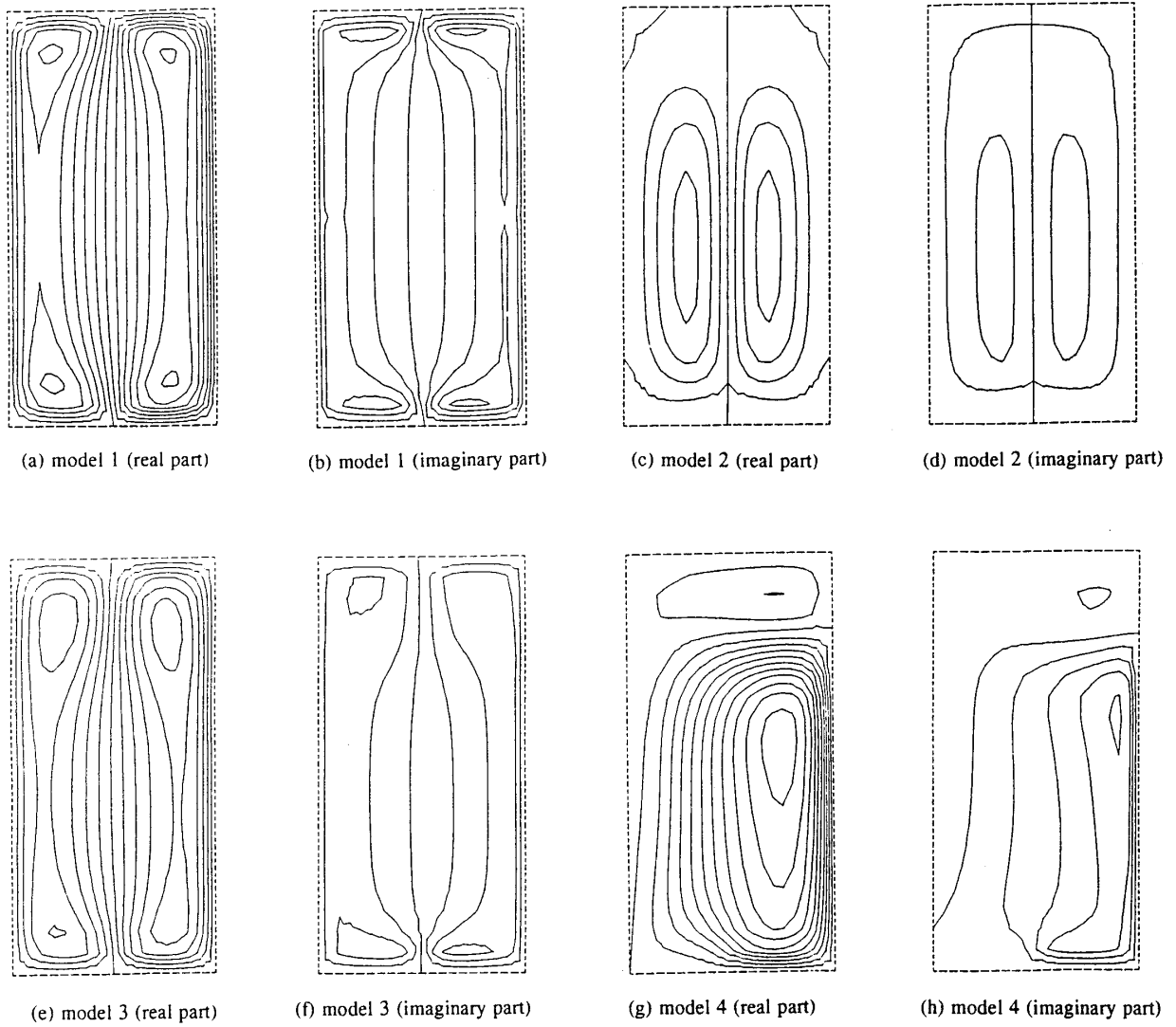


Fig.7 Computation results of electric vector potential.

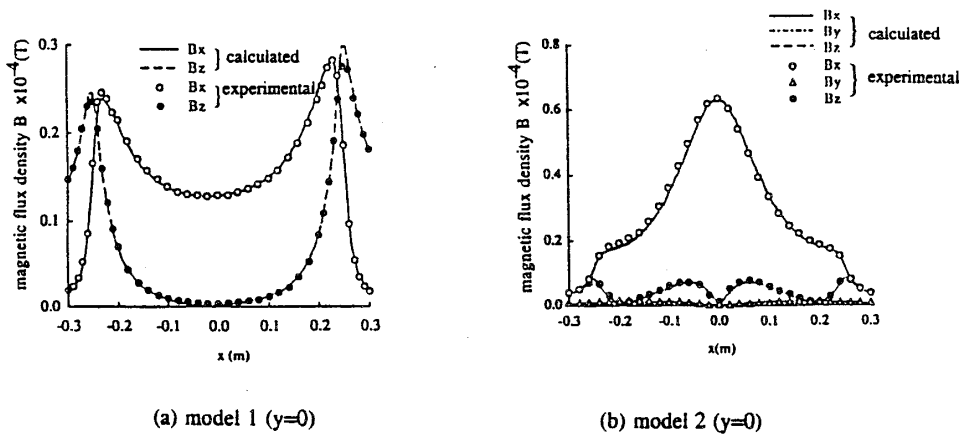


Fig. 8 Comparison of computation results and experimental results. (part 1)

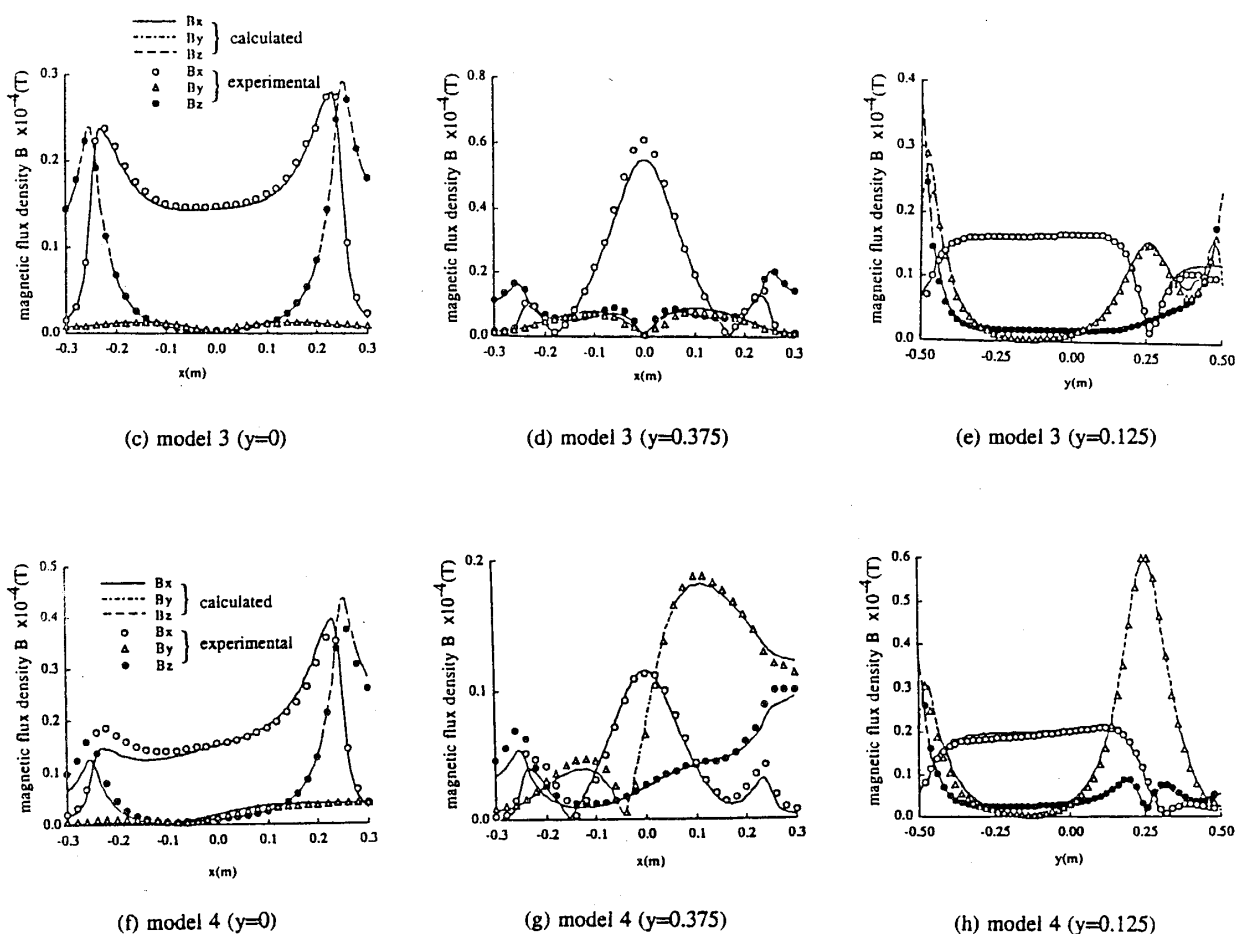


Fig.8 Comparison of computation results and experimental results. (part 2)

で $x=0$ に対してグラフが対称になっていないのは、前述したように電源電流の影響である。なお、磁束密度の測定は、図9に示す平均直径16.5 (mm)、巻幅3.8 (mm)、巻数5,500回のサーチコイルを使用した。以上のように、提案したソース電流が流れる薄板導体の解析法の妥当性を実験モデルによって確認することができた。

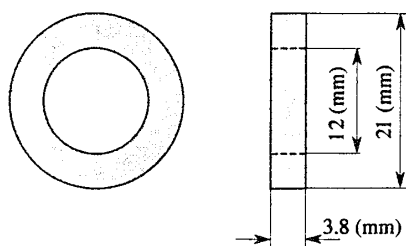


Fig.9 Search coil.

#### 4. むすび

以上、ソース電流を考慮した薄板導体の渦電流解析法

を提案し、その妥当性を確認した。得られた結果をまとめると次のようになる。

- (1) 従来の電気ベクトルポテンシャルを用いた薄板の渦電流解析において、ソース電流を含めた解析を行うために電気スカラポテンシャルを用いた有限要素法を導入し、その定式化を示した。この有限要素法は、三次元配置の薄板に拡張した二次元有限要素法である。
- (2) ソース電流の解析に用いる電気スカラポテンシャルと渦電流の解析に用いる電気ベクトルポテンシャルの式は独立になり、電気スカラポテンシャルそして電気ベクトルポテンシャルの順に計算が行われる。それぞれの解析で得られた電流分布の重畳として最終的な電流分布が得られる。
- (3) 電気ベクトルポテンシャルの定式化に現れるソースおよび計算点の三角形要素に対する四重積分は、境界要素法における境界積分と同じ二重積分の部分は解析式を用いて行い、他の二重積分は数値積分によって計算できる。
- (4) 提案した手法によるソース電流を考慮した渦電流の計算は実験モデルによってその妥当性を確認した。

## 文 献

- (1) H. Tsuboi, K. Sue, K. Kunisue: "Surface Impedance Method Using Boundary Elements for Exterior Regions," IEEE Trans. on Magnetics, Vol.27, No.5, p.4118, 1991.
- (2) 田中、坪井、内藤、美咲:「境界要素法に基づく時間および空間固有モードを用いた過渡渦電流解析」電学論A、Vol.111、No.10、p.897(平3).
- (3) 田中、坪井、美咲:「辺要素を用いた境界要素法による三次元静磁界解析」電学論A、Vol.112、No.1、p.21(平4).
- (4) 田中、坪井、美咲:「未知変数の発散が零の辺要素を用いた境界要素法による三次元渦電流解析」電学論A、Vol.112、No.1、p.27(平4).
- (5) 坪井、須江、国末:「ソース電流を考慮した薄板導体のうず電流解析」電学論A、Vol.110、No.9、p.591(平2).
- (6) H. Tsuboi, M. Tanaka, T. Misaki: "Eddy Current Deflection Analysis of a Thin Plate in time Changing Magnetic Field," IEEE Trans. on Magnetics, Vol.26, No.5, p.1647, 1990.
- (7) H. Tsuboi, K. Kunisue: "Eddy Currents Analysis of Thin Plates Taking Account of the Source Current Distributions and its Experimental Verifications," IEEE Trans. on Magnetics, Vol.27, No.5, p.4020, 1991.
- (8) 亀有、鈴木:「有限要素回路法による渦電流解析」、日本原子力研究所 J A E R I - M7120、1977年6月.
- (9) S.J. Salon, B. Mathewson and S. Uda: "An Integro-Differential Approach to Eddy Currents in Thin Plates," IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-19, No.6, p.2405, 1983.
- (10) A. Kameari: "Transient Eddy Current Analysis on Thin Conductors with Arbitrary Connections and Shapes," Journal of Computational Physics, Vol.42, No.1, 124, 1981.
- (11) D. Rodger and N. Atkinson: "Finite Element Method for 3D Eddy Current Flow in Thin Conducting Sheets," IEE Proceedings, Vol.135, No.6, p.369, 1988.
- (12) C.J. Carpenter: "Comparison of Alternative Formulations of 3-Dimensional Magnetig-Field and Eddy-Current Problems at Power Frequencies," IEE Proceedings, Vol.124, No.11, p.1026, 1977.
- (13) 桑原、武田:「解析積分を用いた高次要素による三次元境界要素法の効率化」電学論A、Vol.107、No.6、p.275(昭62).