

## 境界要素法による三次元電磁界解析

美咲 隆吉\*・坪井 始\*・田中 始男\*

On Three-Dimensional Electromagnetic Field Analysis  
by Boundary Element Method

Takayoshi MISAKI, Hajime TSUBOI and Motoo TANAKA

## ABSTRACT

Boundary element methods for three-dimensional electromagnetic field analysis are overviewed. Boundary element method is categorized into integral equation method and characterized by mathematical formulation procedure based on the Green's theorem. The boundary element methods for electromagnetic field analysis are formulated by using the Maxwell's equations, in which magnetic field and electric field are related each other and expressed by vector operations. In this paper, surface charge method for electrostatic problems, boundary element method using unknown magnetic flux density for magnetic flux density and electric field for eddy current problems, and moment method for electromagnetic wave problems are described as practical boundary element methods and computation results by the methods are shown.

## 1. まえがき

電磁界の数値解析手法は、差分法から有限要素法へと発達した領域分割法と、積分方程式法から境界要素法へと発達した境界分割手法に大きく分類できるが、ここでは後者について概観する。電磁界解析問題には、静電界、静磁界、渦電流、電磁波の各問題があり、それぞれに適した手法が用いられる。また、電磁界の数値解析法の発達、電子計算機の発達に大きく依存しており、二次元問題から三次元問題へ、静電界および静磁界から渦電流問題への展開は、それぞれ大型計算機の高速化、大記憶容量化の時期、スーパーコンピュータの普及の時期と無関係ではない。さらに、解析手法そのものも、問題の大規模化、高精度化の要求に従い、計算機の高速性、大記憶容量を必要とする手法へと移行している。

ここでは、マクスウエルの方程式を基にして、静電界

問題では表面電荷法、静磁界問題ではベクトル変数を未知変数とする境界要素法、渦電流問題ではベクトル変数を未知変数とする境界要素法および電流ベクトルポテンシャルを未知変数とする微分・積分方程式法、電磁波問題ではモーメント法について述べる。

## 2. マクスウエルの方程式

周知のように、マクスウエルの方程式は時間依存性が  $\exp(-j\omega t)$  の場合には次のように与えられる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{H}$  : 磁界、 $\mathbf{B}$  : 磁束密度、 $\mathbf{E}$  : 電界、 $\mathbf{D}$  : 電束密度、 $\mathbf{J}$  : 電流密度、 $\rho$  : 電荷密度

また、構成方程式は、

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{5}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \tag{6}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{7}$$

ここで、 $\mu$  : 透磁率、 $\epsilon$  : 誘電率、 $\sigma$  : 導電率  
 で与えられる。以後、各媒質定数が電界や磁束密度に依  
 存しないいわゆる線形な三次元場を考える。

静電界、静磁界問題では、(1)、(2)式の右辺の時間微  
 分項が零となり、磁界の式と電界の式が分離されて独立  
 となり、問題は縮小される。したがって、時間依存問題  
 の解析時が最も問題の規模が大きくなる。また、未知変  
 数を電界や磁束密度あるいは電荷密度や電流密度などの  
 物理量にする場合とポテンシャルを用いる場合があるが、  
 問題によって得失がある。

### 3. 静電界問題

静電界問題では、(2)、(4)、(6)式より、次の方程式  
 を満たす電界を求める。

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon \tag{9}$$

そこで、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \tag{10}$$

となるスカラーポテンシャル $\phi$ を導入すると、ベクトル公  
 式から(8)式は恒等的に零となる。したがって、

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon \tag{11}$$

を満たす $\phi$ を求める問題となる。さらに、みかけの表面  
 電荷密度 $q$ を導入すると、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{q}{r} ds \tag{12}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{q \mathbf{r}}{r^3} ds \tag{13}$$

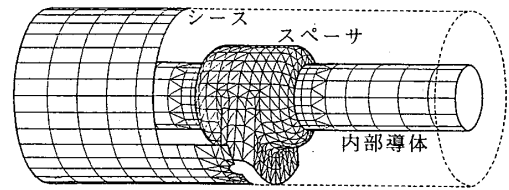
ここで、 $S$  : 導体及び誘電体境界面、 $r$  : ソース点  
 と計算点の距離  
 となり、 $q$ を求める問題となる。導体の表面では、(12)  
 式の電位の式、誘電体の境界面では次の電束密度の法線  
 成分の連続条件の式を導入して最終方程式を作成する。

$$\epsilon_1 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n} - \epsilon_2 \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{14}$$

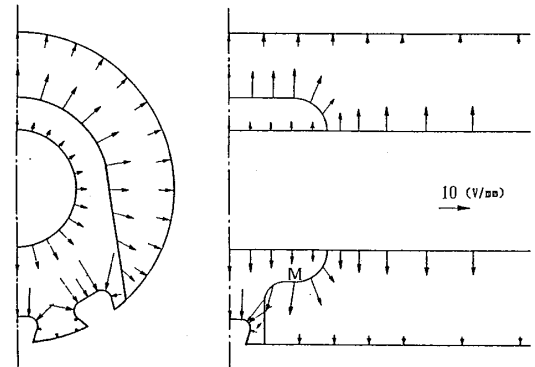
ここで、 $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$  : 誘電体1及び2の誘電率、 $\mathbf{E}_1$ 、  
 $\mathbf{E}_2$  : 誘電体1及び2側の電界、 $\mathbf{n}$  : 単位法線ベクトル

表面電荷法は、未知変数がスカラー量の表面電荷密度で  
 あるので未知数が少なくなり、印加される電位条件がそ  
 のまま電位の式として用いられるため、静電界問題には  
 最も適した手法である。このとき、電極表面や誘電体表  
 面上の電界を高精度に求めるには、曲面要素の導入が不  
 可欠である。また、扱い式が簡単であるので、電極や誘  
 電体の最適設計手法の開発も容易である。しかし、2つ

の誘電体の誘電率の比が100以上になると、後述する表  
 面磁荷法と同様、精度が低下する傾向がある<sup>(8)</sup>。また、ス  
 カラポテンシャルを用いた境界要素法と比較しても未知  
 数の点から有利である<sup>(3)</sup>。図1に実用例として管路気中ケー  
 ブルの電界解析例<sup>(1)</sup>を示す。



(a) 分割図



(b) 導体及びスペーサ表面の電界

図1 管路気中送電線の電界解析

### 4. 静磁界問題

静磁界問題では、(1)、(3)、(5)式より、次の方程式  
 を満たす磁束密度を求める。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{16}$$

(15)式右辺を零として表面電荷法と等価な表面磁荷を用  
 いて $\mathbf{J}$ の影響はビオ・サバルの法則で求める表面磁荷  
 法、あるいは表面電流密度を未知変数とする表面電流法  
 によって $\mathbf{B}$ または $\mathbf{H}$ を求めることができる。

しかし、計算精度の点からは、磁束密度を直接未知数  
 とする境界要素法が最も有用である<sup>(6)</sup>。(15)、(16)式を用  
 いて、ベクトルグリーン<sup>(6)</sup>の定理により、次の計算点 $i$ の  
 磁束密度 $\mathbf{B}_i$ の式が得られる。

$$\frac{\Omega_i}{4\pi} \mathbf{B}_i = \iint_S \{ -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \nabla \phi + (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \times \nabla \phi \} dS + \mu \iiint_V \mathbf{J}_0 \times \nabla \phi dv \tag{17}$$

ここで、 $\Omega_i$  : 計算点から解析領域を見る立体角、 $S$  :

磁性体境界面、V：ソース電流が流れている領域、

$J_0$ ：ソース電流

$\phi$  は基本解で、静磁界問題では次式で与えられる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi r} \quad (18)$$

また、次のベクトルポテンシャルAを導入して解析することもできる。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (19)$$

このとき、(1)式は、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (20)$$

と書け、(3)式はベクトル公式により恒等的に成立する。

さらに、Aのゲージ条件として、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (21)$$

を採用する。

(20)、(21)式と、ベクトルグリーン<sup>(9)</sup>の定理より、計算点iのベクトルポテンシャル $A_i$ の式が得られる。

$$\frac{\Omega_i}{4\pi} A_i = \iint_S \{-(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \nabla \phi + (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \times \nabla \phi + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} \phi\} dS - \iiint_V (\mu \mathbf{J}_0 \phi) dv \quad (22)$$

計算点iの磁束密度の式は(22)式の回転をとることによって得られる<sup>(9)</sup>。

磁束密度を未知数とする場合の境界条件は、次のように与えられる。

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_1 \times \mathbf{n} / \mu_1 = \mathbf{B}_2 \times \mathbf{n} / \mu_2 \quad (24)$$

ここで、 $B_1$ 、 $B_2$ ：磁性体1、2側の磁束密度、 $\mu_1$ 、

$\mu_2$ ：磁性体1、2の透磁率

ベクトルポテンシャルの境界条件は、次のような連続条件で与えられる。

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad (25)$$

ここで、 $A_1$ 、 $A_2$ ：磁性体1、2側のベクトルポテン

シャル

ベクトルポテンシャルを用いる場合には(25)式と、 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ であるから(24)式と(25)式が境界条件として課せられる。

図2に比透磁率が1000の磁性体の中空球を一様磁界中に置いたときの表面磁荷法、表面電流法、境界要素法<sup>(5)</sup>の計算結果を示す。同図に示すように、外部の空気中では何れの手法もほぼ同じ結果であるが、磁性体内、内部の空気中では表面磁荷法、表面電流法の計算精度が低下している。また、ベクトルポテンシャルを用いた場合には、磁束密度を用いる場合に比べてやや精度が低下する傾向にあり、特に角点がある場合に不利である<sup>(9)</sup>。

### 5. 渦電流問題

渦電流問題のための境界要素法の式は、(1)-(7)式とベクトルグリーン<sup>(10)</sup>の定理を用いて次のように求められる。

$$\frac{\Omega_i}{4\pi} \mathbf{B}_i = \iint_S \{-(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \nabla \phi + (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \times \nabla \phi + j\omega \mu \epsilon^* (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \phi\} dS + \iiint_V (\mu \mathbf{J}_0 \times \nabla \phi) dV \quad (26)$$

$$\frac{\Omega_i}{4\pi} \mathbf{E}_i = \iint_S \{(\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \times \nabla \phi - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \times \nabla \phi - j\omega (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \phi\} dS + \iiint_V \left(\frac{\rho_0}{\epsilon^*} \nabla \phi - j\omega \mu \mathbf{J}_0 \phi\right) dV \quad (27)$$

ここで、 $B_i$ ：計算点iの磁束密度、 $E_i$ ：電界、 $\rho_0$ ：

ソース電荷、 $\epsilon^*$ ：複素誘電率( $\epsilon^* = \epsilon - j\sigma/\omega$ )。

境界条件は、磁束密度については(23)、(24)式で与えられ、電界については次式で与えられる。

$$\epsilon^*_1 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n} = \epsilon^*_2 \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (28)$$

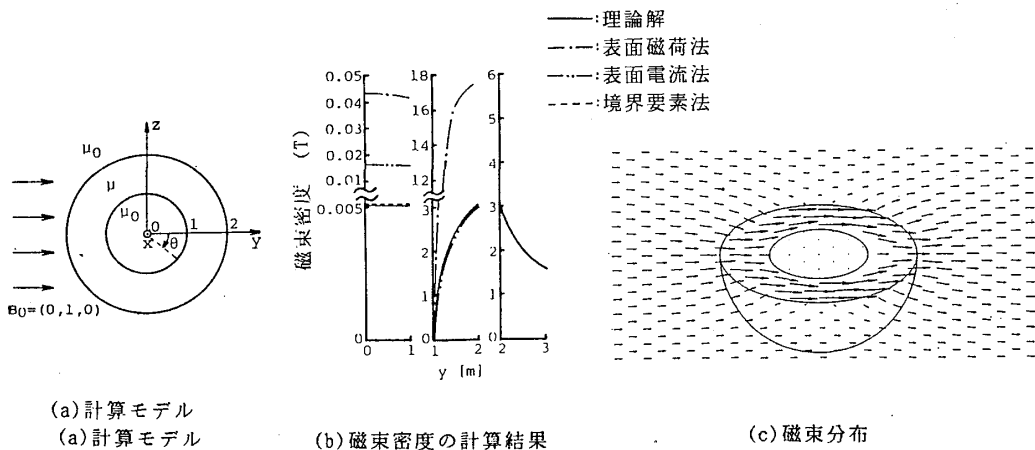


図2 中空磁性体球モデルの磁界解析

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{n} \quad (29)$$

この場合の基本解は次式で与えられる。

$$\phi = \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \quad (30)$$

ここで、 $k$ : 波数

(26)~(27)式は渦電流問題だけでなく、変位電流を考慮した式で、誘電体、磁性体、導体を含む場に適用可能である。しかし、低い周波数の渦電流問題に限定するならば、(1)式右辺第二項の変位電流は無視でき、空気中の基本解は(17)式で与えられる静磁界問題の基本解を用いることができる。さらに、変位電流が無視できることから導体表面の電界の法線成分は零となり、未知変数から除外できる。このことにより、境界面上の未知変数は通常1節点当たり磁束密度の3成分と電界の3成分のあわせて6成分であるが、5成分に減らすことができる。大規模問題では連立方程式を解くためのガウスの消去法の計算時間が全計算時間の大半を占め、その計算時間は未知数の三乗に比例するため、5成分に減らすことにより計算時間は約60%に減少する。

また、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ とスカラーポテンシャルを用いた境界要素法の定式化も可能である。このとき、磁束密度は(19)式で定義され、電界は次式で定義される。

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - j\omega \mathbf{A} \quad (31)$$

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ とスカラーポテンシャル $\phi$ の支配方程式は、ローレンツゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \mu \epsilon^* \phi = 0 \quad (32)$$

を導入して、次のように書ける。

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu \epsilon^* \phi = -\mu \mathbf{J}_0 \quad (33)$$

$$\nabla \phi + \omega^2 \mu \epsilon^* \phi = -\rho_0 / \epsilon \quad (34)$$

さらに、 $\mathbf{A}$ と $\phi$ の境界要素法の式は次のように求められる。<sup>(11),(12)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_i}{4\pi} \mathbf{A}_i = & \iint_S \{ -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \nabla \phi + (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \times \nabla \phi \\ & + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} \phi + (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{n} \phi \} dS \\ & + \iiint_V \mu \mathbf{J}_0 \phi dV \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_i}{4\pi} \phi_i = & \iint_S (\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} - \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n}) dS \\ & + \iiint_V \frac{\rho_0}{\epsilon} \phi dV \end{aligned} \quad (36)$$

この場合の境界条件は次のように与えられる。

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad (37)$$

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (38)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_1 \times \mathbf{n} / \mu_1 = (\nabla \times \mathbf{A})_2 \times \mathbf{n} / \mu_2 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1^* (-j\omega \mathbf{A}_1 - \nabla \phi_1) \cdot \mathbf{n} \\ = \epsilon_2^* (-j\omega \mathbf{A}_2 - \nabla \phi_2) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (40)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})_1 / (\mu_1 \epsilon_1^*) = (\nabla \cdot \mathbf{A})_2 / (\mu_2 \epsilon_2^*) \quad (41)$$

このように、 $\mathbf{A}$ と $\phi$ を未知変数とする場合には、境界条件は複雑となる。

$\mathbf{A}$ と $\phi$ を未知変数とする境界要素法については、 $\mathbf{A}$ の成分毎にスカラグリーン<sup>(13),(14)</sup>の定理を用いて定式化する手法についても検討されている。また、境界要素法と有限要素法の結合解法も検討されている。<sup>(15)</sup>

図3に、計算例として磁束密度と電界を用いた境界要素法による電気学会の検証モデルの渦電流分布を示す。

一方、渦電流解析では、未知変数として電流ベクトルポテンシャルを用いる手法が考えられる。電流ベクトルポテンシャル $\mathbf{T}$ <sup>(16)</sup>は、導体内で次のように定義される。

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T} \quad (42)$$

(42)式を、(7)式に注意して(2)式に代入すると、次式が得られる。

$$\nabla \times \left( -\frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{T} \right) = -j\omega \mathbf{B} \quad (43)$$

薄い板状の導体では、 $\mathbf{J}$ は板の面に平行な二成分のみを持つため、 $\mathbf{T}$ は1成分(板に垂直な法線成分)のみになり、(43)式は次のように書ける。

$$\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \mathbf{T} = -j\omega \mathbf{B}_n \quad (44)$$

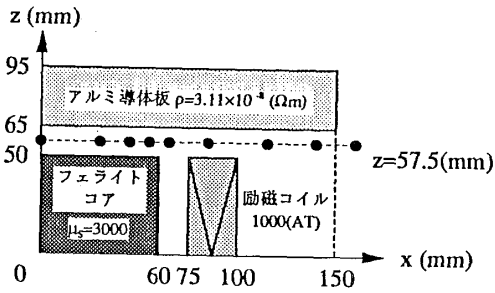
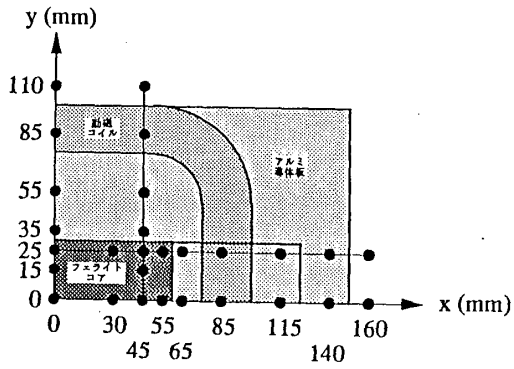
ここで、 $\mathbf{T}$ :  $\mathbf{T}$ の法線成分、 $\mathbf{B}_n$ :  $\mathbf{B}$ の薄板に垂直な成分。

(44)式は、薄板導体モデルの渦電流問題に対する $\mathbf{T}$ の支配方程式で、微分・積分方程式法(integro-differential method)<sup>(17),(18)</sup>といわれる手法で解かれる。この手法は、(44)式の左辺を二次元有限要素法のような差分的な手法で定式化し、右辺の $\mathbf{B}_n$ を渦電流とソース電流からビオ・サバールの法則を用いた積分によって計算するものである。したがって、左辺は導体に対する定式化、右辺は空気中の定式化となり、未知変数は $\mathbf{T}$ のみとなる。薄板導体モデルを用いることにより、適用可能な問題は限定されるが定式化が非常に簡単化されることがわかる。

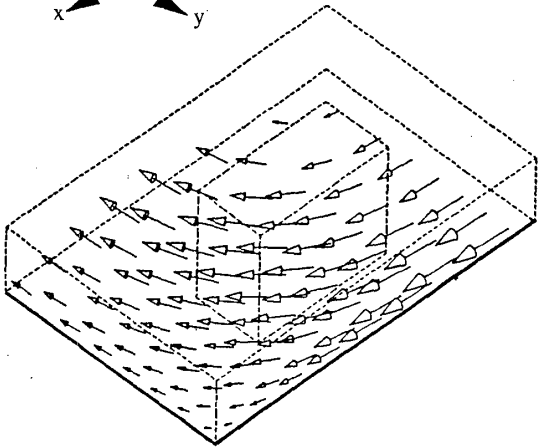
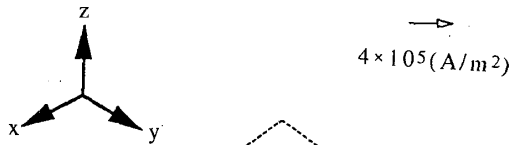
図4に一様交番磁界中に置かれた中空導体球モデルを示す。中空球を4層(半径の異なる4つの球)に分割し、それぞれの球を薄板導体モデルとして解いた場合の計算誤差を表1に示す。第4層の虚部を除いて2%以内の精度で渦電流が求められている。

## 6. 電磁波問題

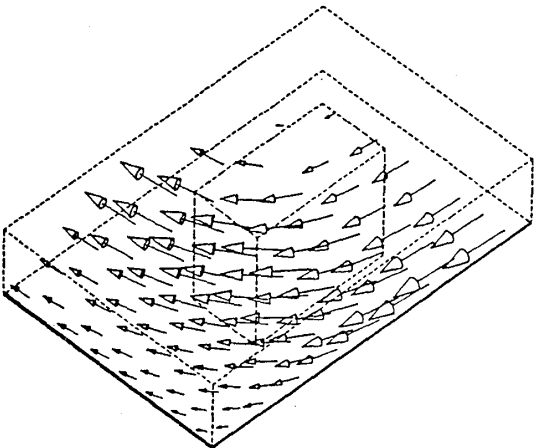
アンテナの問題や電磁波の散乱、放射の問題の最も一般的な解法はモーメント法<sup>(19)</sup>である。3章で述べた表面電荷法もモーメント法の一つである。モーメント法は、(12)式のような未知変数を決定するための方程式に重み関数を乗じて考察領域で積分して最終の連立方程式を作成する手法である。すなわち、表面電荷法を例にとると次のように説明できる。(12)式を簡単に次のように書く。



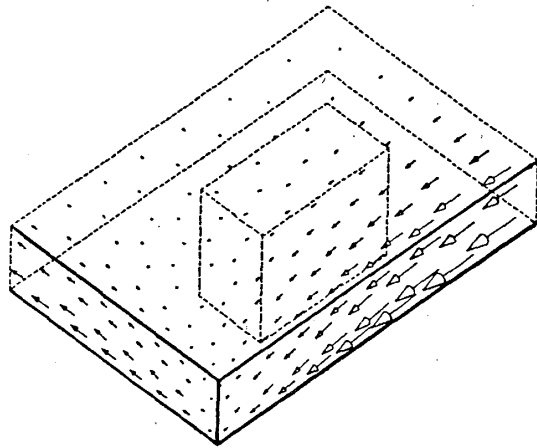
(a) 計算モデル



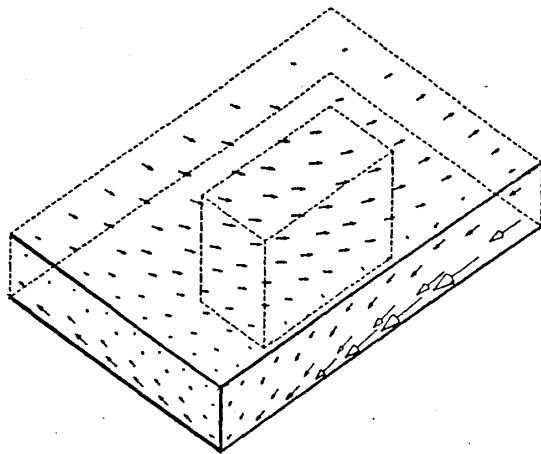
(b) 渦電流の実部 (導体下面)



(c) 渦電流の虚部 (導体下面)

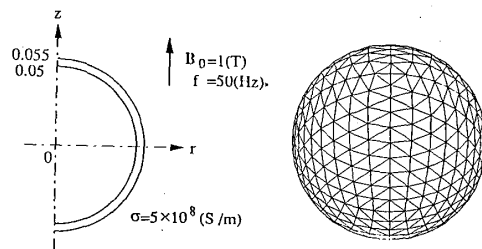


(d) 渦電流の実部 (導体上面、側面)



(e) 渦電流の虚部 (導体上面、側面)

図3 電気学会検証モデルの渦電流解析



(a) 計算モデル

(b) 一層の分割図

図4 中空導体球モデルの渦電流解析

表1 中空導体球モデルの電流密度の最大計算誤差

	実部	虚部
一層( $r=0.050625$ )	-0.90(%)	-1.62(%)
二層( $r=0.051875$ )	-1.67	-1.56
三層( $r=0.053125$ )	-0.07	-1.34
四層( $r=0.054375$ )	-0.64	-3.47

$$L(q) = \psi \tag{45}$$

qは次のように離散化され、

$$q = \sum_n q_n f_n \tag{46}$$

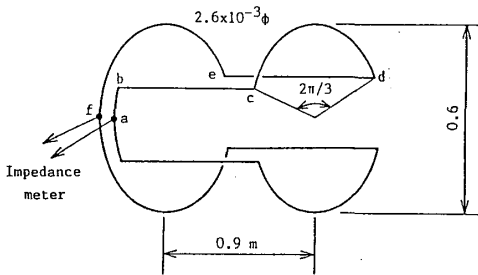
重み関数 $w_i$ を乗じて(45)式を境界面上で積分すると連立方程式のi行目は次のように作成され、連立方程式を解いて各節点の値 $q_n$ を求めることができる。

$$\sum_n q_n \iint_S L(f_n) w_i ds = \iint_S \psi w_i ds \tag{47}$$

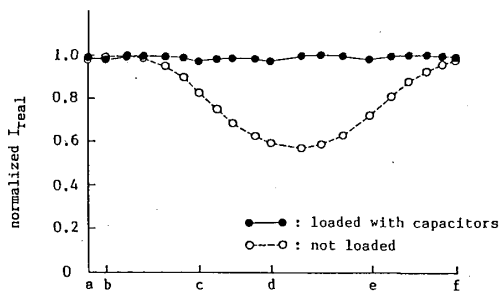
このとき、 $w_i$ を節点iにおける $\delta$ 関数とすれば表面電荷法の式と一致する。

細線アンテナの解析では、アンテナを線分要素で近似し、線分上の電流値を未知変数として解く。連立方程式は、完全導体上では電界の接線成分が零になるという条件で作成する。この場合、ベクトルポテンシャルAとスカラーポテンシャル $\psi$ を導入し、

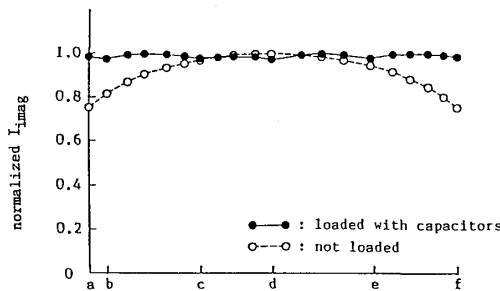
$$A = \mu \int_{\text{axis}} I \phi dl \tag{48}$$



(a) 計算モデル



(b) 電流分布 (実部)



(c) 電流分布 (虚部)

図5 MRI用RFアンテナの装荷コンデンサによる電流分布の一樣化

$$\psi = \frac{1}{\epsilon} \int_{\text{axis}} \rho \phi dl \tag{49}$$

で計算する。アンテナ上の電界 $E_a$ は、次式で計算される。

$$E_a = -j\omega A - \partial \psi / \partial l \tag{50}$$

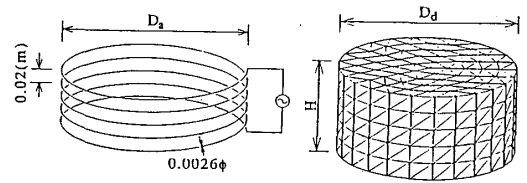
また、Iと $\rho$ は独立ではなく、電荷連続の式から、

$$\rho = (-1/j\omega) dI/dl \tag{51}$$

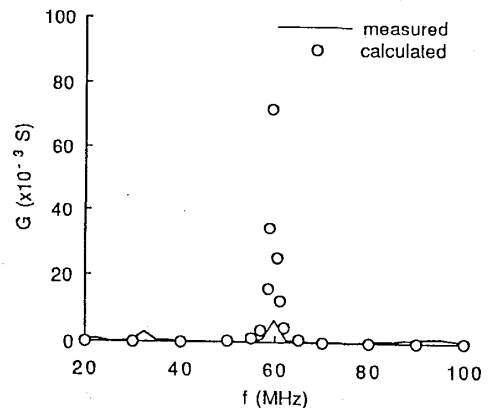
の関係があり、Aと $\psi$ はローレンツゲージを満たす。

Iの近似関数(基底関数)fと重み関数wとしては、両者とも正弦関数を用いる方法(ガラーキン法)、前者にステップ関数、後者に $\delta$ 関数を用いる方法、前者に三角波関数、後者に $\delta$ 関数を用いる方法などの多くの方法が提案されている。

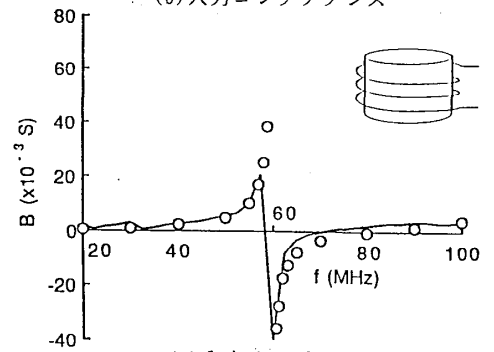
モーメント法は細線アンテナの形状設計だけでなく、装荷によるアンテナ上の電流分布の最適化にも応用可能である。<sup>(20),(21)</sup> 図5に、MRI用RFアンテナの装荷コンデンサの容量を電流分布が一樣になるように決定した例を示す。



(a) 計算モデル



(b) 入力コンダクタンス



(c) 入力サセプタンス

図6 誘電体が挿入されたらせんアンテナの入力アドミタンス

また、アンテナ近傍に誘電体や磁性体等が置かれたときのアンテナ特性の変化が問題になる場合の解析法として、5章で示したBとEを未知変数とする境界要素法との結合も可能である。図6にらせんアンテナ内に誘電体を挿入したときのアンテナ特性の解析結果を示す。<sup>(22)</sup>

最近、面アンテナが注目されているが、面アンテナの解析には三角形要素を用いたモーメント法が用いられる。面導体上の電流の発散が零とならないため、境界要素法で一般的に用いられる三角形要素ではなく、辺上に未知電流を定義する一種の辺要素を用いる。三角形要素は、前述の線要素と混在可能であるが、三角形要素と線要素の接続点がある場合には特別の考慮が必要である。三角形要素、線分要素とも近似関数が三角波関数(一次近似)のときには、接続点の線分要素を等価な三角形要素に置き換えることにより接続点の考慮が可能である。<sup>(23)</sup> この手法による計算結果と測定値の比較を図7に示す。<sup>(24)</sup>

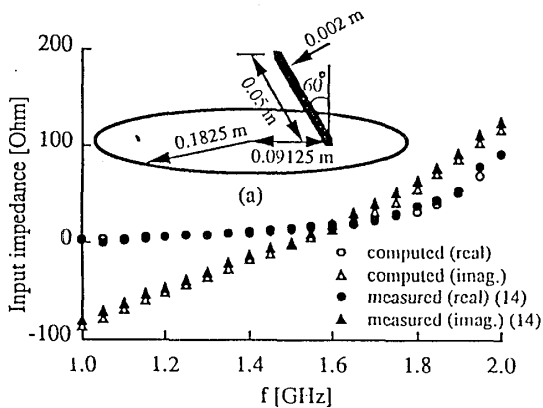


図7 円板導体に取り付けられたモノポールの入力インピーダンス

7. まとめ

以上、静電界、静磁界、渦電流、電磁波の各問題について、境界要素法の定式化および、適用例について述べた。まとめると表2のようなになる。境界要素法の名称の定義は現在曖昧であるが、境界積分方程式を作成する手法を表2に掲げている。境界要素法の一般的な特徴としては、高精度である、入力データが少ない、開領域問題が扱える、線形問題向きである、連立方程式の係数行列が密行列となることなどが挙げられる。密行列を扱うことは、従来境界要素法の短所と考えられていたが、スーパーコンピュータや並列コンピュータの利用を考えるとベクトル化あるいは並列化が容易であり、大幅な高速化が可能である。<sup>(27)</sup> また、磁気飽和のような非線形問題では領域積分が必要となるため、磁気モーメント法等の領域積分形の積分方程式が適していると思われる。

ここでは、時間依存性が $\exp(j\omega t)$ の場合のみを考えてきたが、過渡応答問題では領域積分が不可欠となり、境界要素法の長所の一つが損なわれる。しかし、他の特徴は生かされるため種々の検討が行われている。<sup>(28), (29)</sup>

また、境界要素法の実用化とともに、前後処理の重要性が増加するであろう。三次元問題では、入力データのデータ構造が複雑となり、AI技術の導入等が必要になるとと思われる。また、解析結果の表示法も三次元的で複雑な結果をいかに適確に捕らえるかという点で重要であり、コンピュータグラフィックス技術の進歩とともに静止画だけでなくアニメーション表示も有効な手法となる。<sup>(31)</sup>

表2 電磁界解析における境界要素法の分類

問題	手法	未知変数	特徴
静電界	表面電荷法	q: 表面電荷密度	曲面要素の使用で精度向上.
	境界要素法	$\phi$ : スカラポテンシャル	未知数が多い.
静磁界	表面磁荷法	$q_m$ : 表面磁荷密度	強磁性体内部の計算精度が低い.
	表面電流法	k: 表面電流密度	同上
	境界要素法	B: 磁束密度 A: ベクトルポテンシャル	計算精度が高い. 定式化が複雑.
渦電流	境界要素法	B: 磁束密度、E: 電界 A: ベクトルポテンシャル、 $\phi$ : スカラポテンシャル	未知数が多いが、計算精度が高い. 定式化、境界条件が複雑.
	微分・積分方程式法	$T_n$ : 電流ベクトルポテンシャル	適用が薄板導体に限られる.
電磁波	境界要素法	B: 磁束密度、E: 電界	損失のある誘電体、磁性体が扱える.
	モーメント法	I: 電流	主に導体系に適用.

## 文 献

- (1) 美咲、坪井、位高、原：表面電荷法による一般三次元電界の一解析法とその応用、電気学会論文誌A、Vol.101-A、No.10、p.499 (昭56)。
- (2) T. Misaki, H. Tsuboi, K. Itaka and T. Hara: Computation of Three-Dimensional Electric Field Problems by a Surface Charge Method and its Application to Optimum Insulator Design, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No.3, p.627 (1982).
- (3) 美咲、坪井、藤宮、河上：電界解析における表面電荷法と境界要素法の計算精度の比較について、電気学会回転機・静止器合同研究会資料 RM-84-45, SA-84-16 (昭59)。
- (4) T. Misaki, H. Tsuboi, K. Itaka and T. Hara: Optimization of Three-Dimensional Electrode Contour Based on Surface Charge Method and Its Application to Insulation Design, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol.PAS-102, No.6, p.1687 (1983)。
- (5) 坪井、美咲：表面電荷法による電極形状の最適化について、電気学会論文誌A、Vol.103-A、No.12、p.675 (昭58)。
- (6) 坪井、美咲：ニュートン法による電極形状および絶縁物形状の最適化、電気学会論文誌A、Vol.106-A、No.7、p.307 (昭61)。
- (7) H. Tsuboi and T. Misaki: The Optimum Design of Electrode and Insulator Contours by Nonlinear Programming using the Surface Charge Simulation Method, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.MAG-24, No.1, p.35 (1988)。
- (8) 美咲、坪井、川上：境界要素法による三次元うず電流分布の一解析、電気学会論文誌A、Vol.105-A、No.5、p.553 (昭60)。
- (9) H.Tsuboi, M.Tanaka and T.Misaki: Magnetic Field Analysis by the Boundary Element Method Using Vector Potential, Advances in Boundary Elements Vol.2 (Field and Fluid Flow Solutions), Editors: C.A. Brebbia and J.J.Connor, p.185, Springer Verlag (1989)。
- (10) H.Tsuboi and T.Misaki: Three-Dimensional Analysis of Eddy Current Distributions by the Boundary Element Method using Vector Variables, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.MAG-23, No.5, p.3044 (1987)。
- (11) H.Tsuboi and M.Tanaka: Three-Dimensional Eddy Current Analysis by the Boundary Element Method Using Vector Potential, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.26, No.2 (1990)。
- (12) 坪井、田中、美咲：ベクトルポテンシャルを用いた境界要素法による電磁界解析、電気学会静止器・高電圧合同研究会 SA-89-33, HV-89-34 (平1)。
- (13) T.Misaki and H.Tsuboi: Computation of 3-Dimensional Eddy Current Problems by Using Boundary Element Method, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.MAG-21, No.6, p.2227 (1985)。
- (14) 榎園、戸高、早川：対称性を考慮した3次元境界要素磁界解析、電気学会静止器・回転機合同研究会資料SA-88-21, RM-88-43 (昭63)。
- (15) 小貫、島本、木本、山村：有限要素・境界要素併用H- $\phi$ 法による三次元磁界解析、電気学会論文誌A、Vol.109-A、No.11、p.489 (平1)。
- (16) C.J. Carpenter: Comparison of Alternative Formulationd of 3-Dimensional Magnetic-Field and Eddy-Current Problems at Power Frequencies, IEE Proceedings, Vol.124, No.11, p.1026 (1977)。
- (17) 亀有、鈴木：有限要素回路法による渦電流解析、日本原子力研究所 JAERI-M7120 (1977)。
- (18) 坪井、須江、国末：薄板導体のうず電流解析、電気学会静止器・回転機合同研究会 SA-89-46, RM-89-35(平1)。
- (19) R.F.Harrington: Matrix Method for Field Problems, Proceedings of the IEEE, Vol.55, No.2, p.136 (1967)。
- (20) H.Tsuboi, H.Tanaka, T.Misaki and M.Fujita: Electromagnetic Field Analysis of RF Antenna for MRI, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.MAG-24, No.6, p.2591 (1988)。
- (21) 藤田、樋口、坪井、田中、美咲：MRI用RFアンテナの設計、電気学会静止器・回転機合同研究会資料SA-88-42, RM-88-64 (昭和63)。
- (22) H.Tsuboi, H.Tanaka and M.Fujita: Elctromagnetic Field Analysis of the Wire Antenna in the Presence of a Dielectric with Three-Dimensional Shape, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.25, No.5, p.3602 (1989)。
- (23) S.M.Rao, D.R.Wilson and A.W.Glisson: Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.30, No,5, p.409 (1982)。



- (24) M. Analoui, H. Tsuboi and T. Nakata: A Moment Method for System of Conducting Surfaces and Wires, 1989 International Symposium on Antennas and Propagation, Tokyo, August 22-25 (1989).
- (25) M. Analoui and H. Tsuboi: A New Moment Solution for Wire-Surface Junction, 平成2年電気学会全国大会 (平2).
- (26) M. Marin and M.F. Catedra: A Study of a Monopole Arbitrary Located on a Disk Using Hybrid MM/GTD Techniques, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.35, No. 3, p.287 (1987).
- (27) 坪井、石井: 三次元境界要素法におけるスーパーコンピュータ用数値積分、電気学会論文誌A、Vol. 109, No.9, p.399 (平1).
- (28) H. Tsuboi, M. Tanaka, T. Misaki and T. Naito: Computation Accuracies of Boundary Element Method and Finite Element Method in Transient Eddy Current Analysis, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.MAG-24, No.6, p.3174 (1988-11).
- (29) H. Tsuboi, M. Tanaka and T. Naito: A New Approach to the Transient Analysis with Variable Transformation Based on Eigenvalues, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.26, No.2 (1990).
- (30) H. Tsuboi, T. Simotsukasa and K. Kato: Triangular Mesh Generation Using Knowledge Base for Three-Dimensional Boundary Element Method, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.26, No.2 (1990).
- (31) 山下、上甲、中前: 格子データを利用した三次元分布渦電流アニメーション表示法、電気学会静止器・回転機合同研究会 SA-89-63, HV-89-52 (平1).