

行列法による画像復元の 基礎特性

小林 富士男*

Basic Characteristics of Image Restoration by a Matrix Method

Fujio Kobayashi

ABSTRACT

This paper presents a basic discussion for the image restoration by a matrix method. A system of linear equations is formulated from a point spread function. Unique image can be restored by this method since the method satisfies both the necessary and sufficient conditions for obtaining solutions. By a method of conjugate gradients, an accurate solution is obtained by a relatively simple computation procedure and by a finite number of iterations. Computer simulations are made to restore the image by a point spread function of normal distribution. Using the practical image, the usefulness of the method is verified.

Key Words : image restoration, matrix method, method of conjugate gradients.

1. まえがき

電子計算機の進歩により従来アナログ処理されていた画像が次第にデジタル処理へと移行している。デジタル方式は記憶容量と演算時間が膨大になる難点はあるが、融通性、適応性、精度等の点からアナログ方式に比べて優れており、今後益々重要となってくる。

ぼけ画像を復元する方法は、空間周波数領域のフィルタリング法と実空間領域で行う直接処理法に大別される。前者に属する空間周波数フィルタとしては、逆フィルタ、ウィナーフィルタ、拘束条件付最小2乗フィルタ等の2次元デジタルフィルタが挙げられる。^{1)~5)}しかし、フィルタの安定性などの点でまだ問題が残されている。後者の直接処理法は、一般逆行列法、SVD法等があるが、²⁾³⁾⁶⁾⁷⁾大次元の固有値、固有ベクトルを求めなければならず極めて困難である。

本論文では、点ひろがり関数から多元連立1次方程式

を求め、この方程式を解いてぼけ画像を復元する方法について述べる。⁸⁾⁹⁾このような行列法においては、係数行列の性質が重要となるのでそれらの基礎的な特性を明らかにする。

次に、行列の次元が増大すると、記憶容量および解法が問題となるので、それらの点についても述べる。さらに、実際の画像に本方法を適用して、その有効性を検証する。

2. 行列法による画像復元

撮像に際しては、光電面に対象物の鮮明な像が結像されるように対象物の位置に合わせて光学レンズを調節するところが、焦点はずれになると光電面にできる像はぼけてくる。更に、光電面にできる像を電子ビームで走査する場合、ビームが広がりを持っているために像がぼける。

2次元画像において、焦点が合った理想的な像の濃度

値を $f(x, y)$ とし、実際に得られるぼけた画像の濃度値を $g(x, y)$ とすると、次式のように表すことができる。

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-x', y-y') f(x', y') dx' dy' \quad (1)$$

ただし、 $h(x, y)$ は点ひろがり関数(ぼけを表す関数)で、一般には正規分布またはそれに近い形となることが多い。上式をデジタル画像に適用すると

$$g(i, j) = \sum_k \sum_l h(i-k, j-l) f(k, l) \quad \dots\dots(2)$$

となる。デジタル画像の画素数を $m \times n$ とし、背景の影響が無視できるように設定すれば mn 元の連立1次方程式が得られる。いま、簡単のために画素 (i, j) に隣接した画素だけから影響を受けるものとする。点ひろがり関数の値は画素 (i, j) に対しては a_0 とし、左右・上下の隣接画素に対しては a_1 、斜め方向の隣接画素に対しては a_2 とする。また、各画素には $\hat{k} = (i-1)m + j$ 、 $(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ に従って一連番号をつける。更に、 $f(i, j)$ の濃度値を $\mu_{\hat{k}}$ 、 $g(i, j)$ の濃度値を $b_{\hat{k}}$ 、 $(\hat{k}=1, 2, \dots, mn)$ で表せば、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_0\mu_1 + a_1\mu_2 + 0 + \dots + 0 + a_1\mu_{n+1} + a_2\mu_{n+2} &= b_1 \\ a_1\mu_1 + a_0\mu_2 + a_1\mu_3 + 0 + \dots + 0 + a_2\mu_{n+1} + a_1\mu_{n+2} \\ &\quad + a_2\mu_{n+3} = b_2 \\ a_1\mu_2 + a_0\mu_3 + a_1\mu_4 + 0 + \dots + 0 + a_2\mu_{n+2} + a_1\mu_{n+3} \\ &\quad + a_2\mu_{n+4} = b_3 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_2\mu_{(m-1)n-1} + a_1\mu_{(m-1)n} + 0 + \dots \\ &\quad + 0 + a_1\mu_{mn-1} + a_0\mu_{mn} = b_{mn} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

式(3)をベクトルで表示すれば次式のようになる。

$$A \mu = b \quad \dots\dots\dots(4)$$

ただし、 A は $mn \times mn$ の行列であり、 μ 、 b は mn 次の列ベクトルである。係数行列 A は正則で疎行列となり一般には対角優位となる。したがって μ は一意的に定まる。それゆえ、点ひろがり関数が定まれば、焦点はずれ等でぼけた画像から鮮明な画像が復元されることになる。

3. 係数行列の性質

$M \times N$ の行列 A は、特異値分解により次式のように表される。

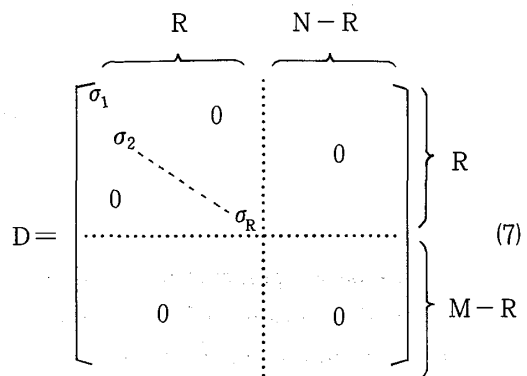
$$A = U D V^T \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 U は $M \times M$ の直交行列、 V は $N \times N$ の直交行列であり、 D は $M \times N$ の対角行列で、その対角成分はすべて非負である。なお、記号 T は行列の転置を示す。

式(5)はまた

$$D = U^T A V \quad \dots\dots\dots(6)$$

と表される。記述を簡単にするために $M \geq N$ とする。 A の階数を R とし、その特異値 σ_i 、 $(i=1, 2, \dots, N)$ を $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_R > 0$ 、 $\sigma_{R+1} = \sigma_{R+2} = \dots = \sigma_N = 0$ とすれば



となる。 $A^T A$ の固有値を λ_i 、 $(i=1, 2, \dots, N)$ とすれば、 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ となる。最大階数のとき $R=N$ であり、階数不足のとき $R < N$ となる。行列 A の階数は特異値分解によって得られる対角行列 D の階数に等しく、対角行列の階数は零でない対角成分の個数に等しいので、行列 A の階数は零でない特異値の個数を調べればよい。

$M \times N$ の長方形行列 A による線形写像 $Z = A \mu$ は、 N 次元ベクトル μ が M 次元ベクトル Z に写像されるので、 μ の変化 $\Delta \mu$ が Z に及ぼす変化 ΔZ は、 $\Delta Z = A \Delta \mu$ で与えられる。変化の相対的な大きさをノルムの比で表すと次式のようになる。

$$\frac{\|\Delta Z\|}{\|Z\|} / \frac{\|\Delta \mu\|}{\|\mu\|} = \frac{\|A \Delta \mu\|}{\|\Delta \mu\|} / \frac{\|A \mu\|}{\|\mu\|} \leq \frac{\max_{\|\xi\|=1} \|A \xi\|}{\min_{\|\tau\|=1} \|A \tau\|} \quad \dots\dots(8)$$

ただし、 μ 、 Z は零ベクトルではない。式(8)の右辺を行列 A の条件数 $Cond(A)$ と表し、スペクトル・ノルムを採用すれば

$$Cond(A) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \quad \dots\dots\dots(9)$$

となる。ここに、 σ_{max} は A の最大特異値であり、 σ_{min} は A の最小特異値である。明らかに $Cond(A) \geq 1$ である。その値が 1 に近ければ、 A の列は非常に独立である。

Cond(A)の値が大きくなるに従って、Aの列は次第に従属となり、Aの階数不足の場合には、 $\sigma_{min} = 0$ であるからCond(A)の値は無限大となる。

式(4)の連立1次方程式において、右辺bに誤差Δbが入ったとき、得られる解の誤差をΔμとすれば

$$A(\mu + \Delta\mu) = b + \Delta b \quad \dots\dots\dots(10)$$

となる。式(4)、(10)より、

$$\Delta\mu = A^{-1}\Delta b \quad \dots\dots\dots(11)$$

であるから、両辺のノルムをとれば次式のようになる。

$$\|\Delta\mu\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\| \quad \dots\dots(12)$$

一方、

$$\|b\| = \|A\mu\| \leq \|A\| \|\mu\| \quad \dots\dots\dots(13)$$

であるから、相対誤差として次式が得られる。

$$\frac{\|\Delta\mu\|}{\|\mu\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad \dots\dots\dots(14)$$

左辺の係数行列に誤差ΔAが入ったとき、得られる解の誤差をΔμとすれば

$$(A + \Delta A)(\mu + \Delta\mu) = b \quad \dots\dots\dots(15)$$

となる。ただし、A + ΔAは正則とする。式(4)の関係から式(15)は次のようになる。

$$\Delta\mu = -A^{-1}\Delta A(\mu + \Delta\mu) \quad \dots\dots\dots(16)$$

式(16)において、両辺のノルムをとれば次式が得られる。

$$\|\Delta\mu\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|\mu + \Delta\mu\| \quad \dots\dots\dots(17)$$

上式の両辺を $\|\mu + \Delta\mu\|$ で割れば

$$\frac{\|\Delta\mu\|}{\|\mu + \Delta\mu\|} \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| = \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \quad (18)$$

となる。

次に左辺の係数行列および右辺の定数に、それぞれ誤差ΔA、Δbが入ったとき、得られる解の誤差をΔμとすれば

$$(A + \Delta A)(\mu + \Delta\mu) = b + \Delta b \quad \dots\dots\dots(19)$$

となる。式(4)の関係から、式(19)は次のようになる。

$$\Delta A\mu + (A + \Delta A)\Delta\mu = \Delta b \quad \dots\dots\dots(20)$$

一般に、

$$A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A) \quad \dots\dots\dots(21)$$

であるから、A、A + ΔAが正則ならば、 $I + A^{-1}\Delta A$ も正則である。ただし、Iは単位行列を表す。それゆえ、式(20)は次のように表される。

$$\Delta\mu = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}(-\Delta A\mu + \Delta b) \quad (22)$$

いま、誤差ΔAが十分小さく、

$$\|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1 \quad \dots\dots\dots(23)$$

であるとする。すると、式(22)の両辺のノルムをとれば、

$$\|\Delta\mu\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} (\|\Delta A\| \|\mu\| + \|\Delta b\|) \quad (24)$$

となる。また、式(13)の関係から、相対誤差として次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta\mu\|}{\|\mu\|} &\leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) \\ &= \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A\| \|A^{-1}\| \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) \quad (25) \end{aligned}$$

また、

$$Cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \quad \dots\dots(26)$$

であるから、式(14)、(18)、(25)より、行列の条件数Cond(A)の値が大きいと、係数行列Aあるいは右辺の定数bに含まれるわずかな誤差ΔA、Δbが解に大きな誤差Δμをもたらすことが分かる。ただし、 λ_{max} 、 λ_{min} はそれぞれ $A^T A$ の最大および最小固有値である。

4. 反復解法

画像に本方法を適用する際、先ず問題となるのは記憶容量である。例えば、画素数を100×100とすれば次元Nが10000となり、係数行列Aを格納するのに多くの記憶容量が必要となり、また演算時間も莫大となる。もし、Aが疎行列となれば、記憶容量、演算時間共に節約されることになるが、いずれにしても解法が重要である。

連立1次方程式の解法は直接法と反復法に大別され、係数が密行列でその行列要素全体が計算機の主記憶装置に格納できる場合には、直接法が適している。直接法にはガウスの消去法あるいは数学的に同等なLU分割法が計算量、精度の面で優れている。N元の連立1次方程式を解くために必要な乗除算回数は、Nが大きいとき、ガウスの消去法では約 $N^3/3$ 回であるのに対し、ガウス・ジョルダンの消去法では約 $N^3/2$ 回である。精度の面では両者の間に有意な差がない。逆行列を計算する方法は多数あるが、計算量の少ない方法でも約 N^3 の乗除算回数

を必要とし、精度の面からもガウス消去法に劣る。係数行列が正値対称の場合には、コレスキー分解法ならびに修正コレスキー分解法が優れている。乗除算回数はいずれも $N^3/6$ 回で、両者は大差ないが、前者は N 回の平方根の計算を必要とする。係数行列の次元が大きく、疎で対角優位な正値対称行列の場合には、記憶容量、計算時間の点でガウスの消去法よりも反復法が有利である。反復法としては、ヤコビ法よりもガウス・ザイデル法が収束、記憶容量の点で一般に優るが、未知数が多いときには、収束がおそくなるため、SOR (逐次過剰緩和法) がよく使用される。しかし、SOR法は大次元では収束に要する反復回数が加速度的に増加し、反復計算を行っても誤差が減少しないこともある。これに対して、共役勾配法¹⁰⁾は、反復法でありながら理論的に有限回で厳密解に到達する利点をもっており、係数行列の次元が大きく疎行列である場合に有利である。大次元の係数行列を分解して扱いやすく、また、係数が疎行列で対角優位の場合には、 N 回の反復よりもはるかに少ない回数で解に収束する。

式(4)の真の解を μ^* 、第 k 段階の解を $\mu^{(k)}$ で表し、正値 2 次形式 $F(\mu^{(k)})$ を

$$F(\mu^{(k)}) = (\mu^* - \mu^{(k)}, A(\mu^* - \mu^{(k)})) \dots\dots(27)$$

とすれば、 A が対称行列であるから

$$F(\mu^{(k)}) = (\mu^{(k)}, A\mu^{(k)}) - 2(\mu^{(k)}, b) + (\mu^*, A\mu^*) \dots\dots(28)$$

となる。ただし、 $(\ , \)$ は内積を表す。 A が正定値行列であるから、 $F(\mu^{(k)}) \geq 0$ となり、 $\mu^{(k)} = \mu^*$ のとき最小で $F(\mu^{(k)}) = 0$ となる。それゆえ、式(4)を解くことは、式(28)の最小点を求める最小化問題と同等である。

いま、第 k 段階における解 $\mu^{(k)}$ から次の探索方向ベクトルを $P^{(k)}$ とし、その探索方向への修正量を $\alpha^{(k)}$ として

$$\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} + \alpha^{(k)}P^{(k)} \dots\dots(29)$$

とおく。 $F(\mu^{(k+1)})$ は式(28)より

$$F(\mu^{(k+1)}) = (\mu^{(k)} + \alpha^{(k)}P^{(k)}, A\mu^{(k)} + \alpha^{(k)}AP^{(k)}) - 2(\mu^{(k)} + \alpha^{(k)}P^{(k)}, b) + (\mu^*, A\mu^*) \quad (30)$$

となる。式(30)を $\alpha^{(k)}$ で偏微分すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mu^{(k+1)})}{\partial \alpha^{(k)}} &= (P^{(k)}, A\mu^{(k)} + \alpha^{(k)}AP^{(k)}) \\ &\quad + (\mu^{(k)} + \alpha^{(k)}P^{(k)}, AP^{(k)}) - 2(P^{(k)}, b) \\ &= 2(P^{(k)}, A\mu^{(k)} - b) + 2\alpha^{(k)}(P^{(k)}, AP^{(k)}) \quad (31) \end{aligned}$$

上式を 0 とおき、式(30)が極小となる $\alpha^{(k)}$ を求めると、

$$\alpha^{(k)} = - \frac{(P^{(k)}, A\mu^{(k)} - b)}{(P^{(k)}, AP^{(k)})} = \frac{(P^{(k)}, r^{(k)})}{(P^{(k)}, AP^{(k)})} \dots\dots(32)$$

を得る。ただし、 $r^{(k)}$ は残差ベクトルで

$$r^{(k)} = b - A\mu^{(k)} \dots\dots(33)$$

である。いま、 $P^{(k)}$ と $r^{(k+1)}$ の内積を計算すると、

$$\begin{aligned} (P^{(k)}, r^{(k+1)}) &= (P^{(k)}, r^{(k)} - \alpha^{(k)}AP^{(k)}) \\ &= (P^{(k)}, r^{(k)}) - \alpha^{(k)}(P^{(k)}, AP^{(k)}) = 0 \quad (34) \end{aligned}$$

となり、両者は直交していることが分かる。

探索方向ベクトル $P^{(k)}$ をそれまでに得られた残差ベクトル $r^{(k)}$ 、 $(k = 0, 1, 2, \dots, k)$ の張る空間的にとり、それらの 1 次結合とすれば、

$$\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} + \alpha^{(k)}P^{(k)} = \mu^{(k)} + \sum_{i=0}^k C^{(i)}r^{(i)} \dots\dots(35)$$

と表される。ただし、 $C^{(i)}$ は係数である。すると、残差は次式のようになる。

$$\begin{aligned} r^{(k+1)} &= b - A(\mu^{(k)} + \sum_{i=0}^k C^{(i)}r^{(i)}) \\ &= r^{(k)} - A \sum_{i=0}^k C^{(i)}r^{(i)} \quad \dots\dots(36) \end{aligned}$$

一方、 $r^{(k)} = A(\mu^* - \mu^{(k)})$ であるから、正値 2 次形式 $F(\mu^{(k+1)})$ は

$$\begin{aligned} F(\mu^{(k+1)}) &= (A^{-1}r^{(k+1)}, r^{(k+1)}) \\ &= (A^{-1}r^{(k)} - \sum_{i=1}^k C^{(i)}r^{(i)}, r^{(k)} - A \sum_{i=0}^k C^{(i)}r^{(i)}) \quad (37) \end{aligned}$$

となる。上式を $C^{(i)}$ で偏微分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mu^{(k+1)})}{\partial C^{(i)}} &= -2(r^{(i)}, r^{(k)}) \\ &\quad + 2 \sum_{j=0}^k C^{(j)}(r^{(i)}, Ar^{(j)}) \quad \dots\dots(38) \end{aligned}$$

式(38)を 0 とおいて、 $C^{(0)}$ 、 $C^{(1)}$ 、 $C^{(2)}$ 、 \dots 、 $C^{(k)}$ を決定すれば、 $F(\mu^{(k+1)})$ を最小とする係数が求まる。式(38)を 0 とおくと、式(36)、(38)より次式の関係が求まる。

$$(r^{(i)}, r^{(k+1)}) = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \dots\dots(39)$$

第 $k+1$ 段階の残差はそれまでのすべての残差と直交することになる。それゆえ、一般に次の関係式が得られる。

$$(r^{(i)}, r^{(k)}) = 0, \quad (i \neq k) \quad \dots\dots(40)$$

いま、

$$q^{(k)} = \sum_{i=0}^k C^{(i)}r^{(i)} \quad \dots\dots(41)$$

とおけば、 $i < k$ のとき、式(36)、(40)より、

$$(r^{(i)}, A q^{(k)}) = (r^{(i)}, r^{(k)} - r^{(k+1)}) = 0 \quad \dots(42)$$

となる。また、 $q^{(k)}$ は $r^{(0)}, r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(k)}$ の 1 次結合であるから

$$(q^{(i)}, A q^{(k)}) = 0, \quad (i < k) \quad \dots\dots\dots(43)$$

となる。一方、A は対称行列であるから、一般に次の関係式が得られる。

$$(q^{(k)}, A q^{(i)}) = 0, \quad (i \neq k) \quad \dots\dots\dots(44)$$

式(36)、(41)、(44)より

$$(q^{(k)}, A q^{(i)}) = (q^{(k)}, r^{(i)} - r^{(i+1)}) = 0 \quad \dots(45)$$

となり、

$$(q^{(k)}, r^{(i)}) = (q^{(k)}, r^{(i+1)}), \quad (i \neq k) \quad \dots(46)$$

の関係が得られる。上式より

$$(q^{(k)}, r^{(0)}) = (q^{(k)}, r^{(1)}) = \dots = (q^{(k)}, r^{(k)}) \quad \dots(47)$$

となる。

次に、式(47)に式(41)を代入すると、式(40)の関係より、

$$C^{(0)} |r^{(0)}|^2 = C^{(1)} |r^{(1)}|^2 = \dots = C^{(k)} |r^{(k)}|^2 \quad \dots(48)$$

となる。ただし、 $(r^{(k)}, r^{(k)}) = |r^{(k)}|^2$ である。それゆえ、 $q^{(k)}$ は次式のように表される。

$$q^{(k)} = C^{(k)} \sum_{i=0}^k \frac{|r^{(k)}|^2}{|r^{(i)}|^2} r^{(i)} \quad \dots\dots\dots(49)$$

一方、 $\alpha^{(k)} P^{(k)} = q^{(k)}$ であるから、 $\alpha^{(k)} = C^{(k)}$ とおけば、探索方向ベクトル $P^{(k)}$ は一般に次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} P^{(k)} &= r^{(k)} + \frac{|r^{(k)}|^2}{|r^{(k-1)}|^2} P^{(k-1)} \quad (k \geq 1) \\ P^{(0)} &= r^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(50)$$

また、式(40)と式(50)の関係から次式が得られる。

$$(P^{(k)}, r^{(k)}) = |r^{(k)}|^2 \quad \dots\dots\dots(51)$$

したがって、式(32)の $\alpha^{(k)}$ は次式のようになる。

$$\alpha^{(k)} = \frac{|r^{(k)}|^2}{(P^{(k)}, AP^{(k)})} \quad \dots\dots\dots(52)$$

残差 $r^{(0)}, r^{(1)}, r^{(2)}, \dots$ は式(40)により互いに直交している。N次元空間には、このようなベクトルはN個しか存在しない。それゆえ、 $k \leq N$ なる k に対して $r^{(k)} = 0$ となり、 $\mu^{(k)} = \mu^*$ となる。かくして、高々N個の反復で真の解が得られる。

計算手順を要約すると次のようになる。

- (i) 任意な初期値 $\mu^{(0)}$ を選ぶ。
- (ii) $r^{(0)} = b - A\mu^{(0)}$
 $r^{(0)} = 0$ ならば終了する。
- (iii) $P^{(0)} = r^{(0)}$
 $k = 0$
- (iv) $\alpha^{(k)} = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(P^{(k)}, AP^{(k)})}$
- (v) $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)}$
- (vi) $r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} AP^{(k)}$
- (vii) $\beta^{(k)} = \frac{(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(r^{(k)}, r^{(k)})}$
- (viii) $P^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta^{(k)} P^{(k)}$
- (ix) 収束判定を行い、収束していれば計算を終了する。収束が不十分であれば、 $k := k + 1$ として (iv) へ行く。

上述のように共役勾配法は疎行列を保つため、記憶容量が節約される。また、式(4)の係数行列Aは規則性があるため、Aの記憶を省略することも可能であり、メモリ使用量を大幅に低減できる。このようにすると、作業領域として本方法で必要とする記憶容量は、画像と同じ大きさの配列の5倍でよい。さらに、ベクトル計算機向きの解法であるためパイプライン型スーパーコンピュータに適している。

5. 計算機シミュレーション

レンズによって像がぼける場合、点ひろがり関数は正規分布で近似できるので

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \text{EXP} \left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) \quad \dots(53)$$

とする。ただし、 σ は標準偏差である。いま、1画素の大きさを $x = 1, y = 1$ の正方形として計算機シミュレーションを行う。点ひろがり関数によって式(4)の係数行列Aの性質が異なる。図1は画素数 28×28 としたとき、標準偏差 σ によって係数行列の性質がどのように変るかを示したものである。図2は $\sigma = 0.8$ としたとき、画素数 $n \times n$ の正方形画素の1辺の画素数 n と条件数の関係を示している。

解法として共役勾配法を適用すると、収束する反復回数は条件数によって変る。初期値をすべて0としたときの標準偏差 σ と収束する反復回数との関係は図3のようになる。ただし、画素数は 128×128 である。 σ の値が大きくなると、当然画像 $g(i, j)$ は次第にぼけてくる。 5×5 画素を単位とした市松模様 $f(i, j)$ に対するぼけ画像 $g(i, j)$ の相対誤差の様子を示したのが図4である。

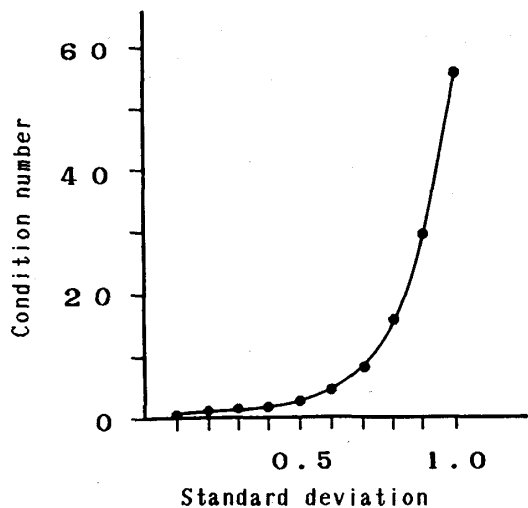


図1 標準偏差に対する条件数

Fig.1 Condition number against standard deviation.

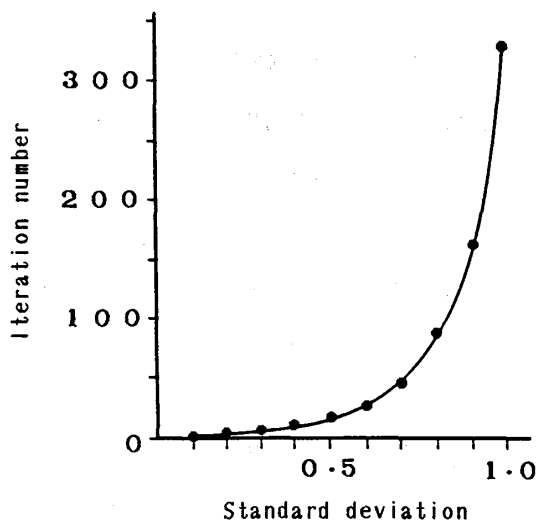


図3 収束反復回数

Fig.3 Number of iteration for convergence.

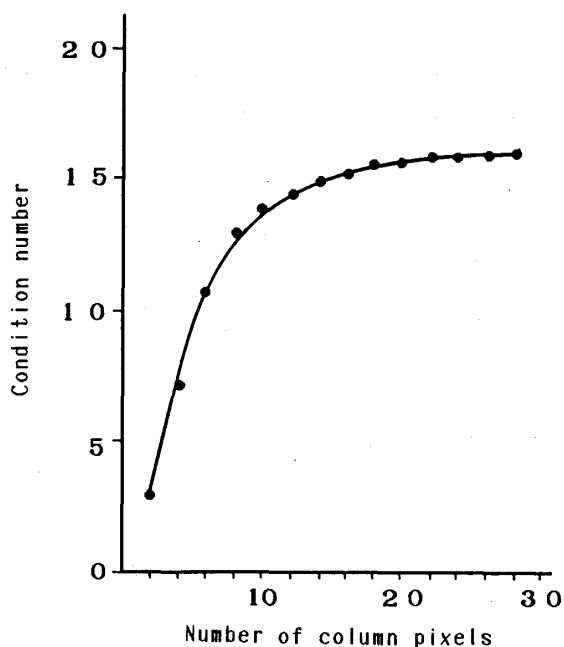


図2 1辺の画素数に対する条件数

Fig.2 Condition number against number of column pixels.

なお、同図の相対誤差Gは次式のように定義している。

$$G = \frac{|f(i, j) - g(i, j)|}{f(i, j)} \times 100 [\%] \quad \dots(54)$$

全画素数は 128×128 である。

次に、画像復元のシミュレーション結果を示す。すなわち、市松模様の画像を $\sigma = 0.8$ でぼかしておき、そのぼけた画像を種々な σ の値によって復元する。この場合、共役勾配法で得られた解を右辺 b に代入しては新たな解を求める。この操作をくり返し行くと、その相対誤差は

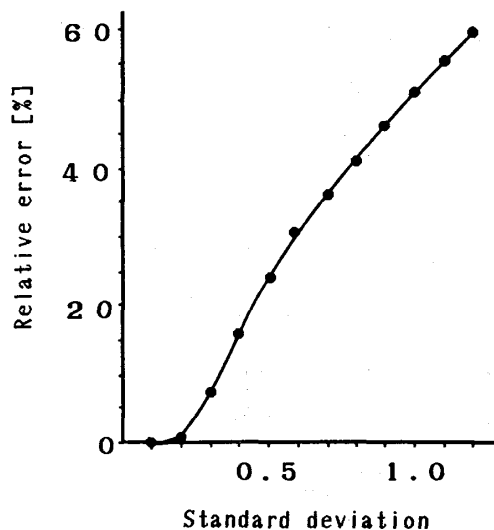


図4 ぼけ画像の誤差

Fig.4 Error of blurred image.

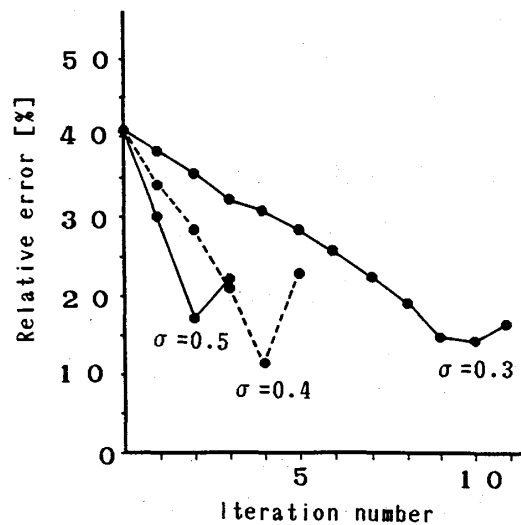


図5 くり返し処理結果

Fig.5 Results of iterative processing.

図5のようになる。ぼけた画像が与えられたとき、一般には最適な σ の値は明らかではないが、 σ を小さな値に設定して上述の操作をくり返し実行することにより、鮮明な画像が復元される。

最後に、人物像(GIRL)に適用した結果を示す。図6はGIRLの焦点はずれ画像である。 $\sigma=0.8$ とし、図6に上述の操作をくり返し実行して得られた画像が図7である。なお、くり返し回数は7回であり、画素数は 256×256 である。同図より鮮明な画像に復元されている様子がうかがえる。



図6 焦点はずれ画像

Fig. 6 Blurred image (out of focus).



図7 復元画像

Fig. 7 Restored image.

6. むすび

本論文では、行列法によって画像復元されることを示し、それらの基礎的特性を明らかにした。また、実際に

計算機シミュレーションを行い、復元画像が受ける影響について考察した。更に、画素数が多い場合にも本方法が適用できることを検証した。

本論文では、主としてぼけ画像の復元法について述べたが、本方法は画像の強調にも適用することが可能である。

画像の点ひろがり関数の推定に関しては種々の方法があるので、¹⁾⁻³⁾ これらの方法を利用して点ひろがり関数を求め、本方法に利用すればよりよい結果が得られることが期待される。この問題については今後検討する予定である。

【文 献】

- (1) A. Rosenfeld and A. C. Kak : "Digital Picture Processing", Academic Press, New York (1976).
- (2) H. C. Andrews and B. R. Hunt : "Digital Image Restoration", Prentice-Hall (1977).
- (3) W. K. Pratt : "Digital Image Processing", Wiley-Interscience, New York (1978).
- (4) C. W. Helstrom : "Image restoration by the method of least squares", J. Opt. Soc. Am., 57, 3, pp.297-303 (March 1967).
- (5) B. R. Hunt : "The application of constrained least squares estimation to image restoration by digital computer", IEEE Trans. Comput., C-22, 9, pp.805-812 (Sep. 1973).
- (6) T. S. Huang and P. M. Narendra : "Image restoration by singular value decomposition", Appl. Opt., 14, 9, pp.2213-2216 (Sep. 1975).
- (7) H. C. Andrews and C. L. Patterson : "Singular value decompositions and digital image processing", IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Process., ASSP-24, 1, pp.26-53 (Feb. 1976).
- (8) 小林富士男 : "焦点はずれ画像からの鮮明な画像復元", 昭61中国連大, 092116.
- (9) 小林富士男, 天野義樹 : "画像復元の基礎的特性", 昭62中国連大, 112211.
- (10) M. R. Hestenes and E. Stiefel : "Methods of conjugate gradients for solving linear systems", J. Res. Nat. Bur. Standards, 49, 6, pp.409-436 (Dec. 1952).