

福山大学工学部紀要
第11号 1989年3月

正方形孔を有する正方形板の弾塑性せん断座屈強度

上野谷 実*

Elasto-plastic Shear Buckling Strength of Square Plates with Square Holes

Minoru UENOYA

ABSTRACT

Elasto-plastic shear buckling of square plates containing centrally located square holes is investigated analytically. Critical loads are obtained by the Rayleigh-Ritz method in combination with the finite element method used only to evaluate in-plane stresses. The plates are subjected to uniform shear stress or uniform shear deformation. Ratios of the hole length to the plate length are 0.15, 0.3, 0.5, 0.7 and 0.85. The influence of the square hole and in-plane loading condition on buckling strength is considered on various sized holes. The results suggest that the buckling strength in the uniform shear deformation is higher than the uniform shear stress in the elastic and elasto-plastic ranges.

These phenomena are more remarkable for the clamped plates than the simply supported plates in the elastic range and for the simply supported plates than the clamped plates in the elasto-plastic range.

Key words: elasto-plastic buckling, shear load, perforated plates, square holes

キーワード：弾塑性座屈、せん断荷重、有孔板、正方形孔

1. まえがき

土木、建築、造船、航空機などの分野において、構造部材の板に配管、維持管理用マンホールなどの目的で孔を設ける場合がある。有孔板は孔によって断面積が減少するため力学的強度が低下する。有孔板の設計には応力集中、座屈強度、終局強度などの力学特性を正確に把握する必要がある。有孔板の座屈強度、終局強度に関する研究は円孔を有する板について多くなされているが、四角形孔に関する研究は非常に少ない^{1), 2)}。このような視点から本報告では正方形孔を有する正方形板の弾塑性せん断座屈解析を行い、弾塑性座屈強度および塑性崩壊強度を

明らかにする。

有限要素法で弾塑性座屈解析を行う場合、荷重増分ごとに弾塑性応力計算と大型の固有値計算が必要である。本研究では多くのケースについて解析する必要があり、計算時間を短縮することは経費の面から非常に重要である。弾塑性応力解析は初期応力法で行い、座屈解析は固有値計算にほとんど時間のかからない Rayleigh-Ritz 法（エネルギー法）を適用する³⁾。これによって計算に時間がかかるのは弾塑性応力計算だけとなり計算経費を大幅に削減できる。実際の構造物にみられる有孔板の設計には周辺が補剛材で弹性支持される有孔板の弾塑性座屈

* 土木工学科

強度を明らかにすることが必要であるが、そのためには補剛材の剛性をパラメーターとする膨大な量の計算をしなければならない。Fig. 1 に示すように、ここではその上下限である変形載荷 (uniform shear deformation) と応力載荷 (uniform shear stress) の座屈強度をまず明らかにして、有孔板設計の基礎資料を得る。

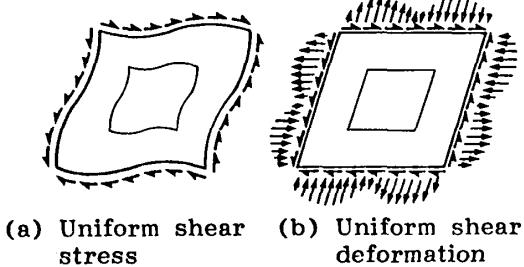


Fig. 1 Perforated plate subjected to shear

2. 弾塑性座屈解析

解析法はすでに円孔を有する正方形板の弾塑性せん断座屈解析で示した座屈解析法³⁾を正方形孔を有する正方形板の弾塑性せん断座屈解析に適用する。正方形孔の位置は座屈強度にもっとも影響が大きい板の中央とする。本解析は次の条件で行う。

- (1) 載荷条件は一様せん断応力載荷および一様せん断変形載荷である。
- (2) 材料特性は完全弾塑性で、ミゼスの降伏条件に従う。
- (3) 板の形状は正方形板で、周辺の面外支持条件は単純支持あるいは固定である。
- (4) 正方形孔は板の中央に位置し、大きさは板の辺長 ℓ に対する正方形孔の辺長 a の比が $a/\ell = 0.15, 0.3, 0.5, 0.7, 0.85$ である。
- (5) 正方形孔の隅角部は極端な応力集中を避けるため曲率半径 $r = a/10$ の丸みをつける。
- (6) 残留応力や初期たわみなどの初期不整は考慮しない。

載荷条件および正方形孔の大きさが応力集中、弾性および弾塑性座屈強度、塑性域の進展、塑性崩壊強度に与える影響を明らかにする。

正方形孔を有する正方形板の平面応力解析は有限要素法で行った。用いた要素は要素内応力一定の三角形要素である。一様せん断変形は境界辺の長さが一定のまま直線を保ちながら回転するような変位を節点に与えた。計算は対称性を利用して正方形板の $1/4$ について行った。要素分割は Fig. 2 に示すように、板の $1/4$ において $a/\ell = 0.15 \sim 0.85$ に対してそれぞれ節点数 $142 \sim 138$ 、要素数 $235 \sim 212$ である。

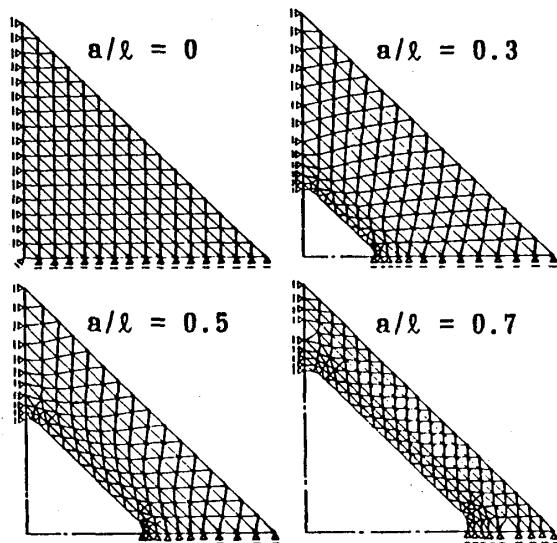


Fig. 2 Finite element mesh

弾塑性応力解析は初期応力法を用い、材料特性はひずみ硬化のない完全弾塑性とし、弾性係数 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ (206 GPa)、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、降伏判定はミゼスの降伏条件を用いた。各荷重増分における収束判定は、降伏した要素の相当応力が降伏曲面の 1% 以内に近づくまで繰り返し計算を続ける。応力載荷の場合、繰り返し回数が 40 回を越えても収束しない場合を塑性崩壊とした。また変形載荷の場合、周辺の節点に与えた一様せん断変位によって生ずる節点反力から計算する周辺せん断力がほとんど増加しなくなった状態を塑性崩壊とした。座屈計算の場合、降伏した要素の面外曲げ剛性は零とした。

Rayleigh-Ritz 法による座屈解析で用いる正方形板の対角線に対して対称座屈するたわみ関数は次のような円孔板の解析の場合と同じ 8 項のフーリエ級数を適用した。周辺において単純支持の場合

$$\begin{aligned} w(x, y) = & a_{11} \cos \frac{\pi x}{\ell} \cos \frac{\pi y}{\ell} + a_{22} \sin \frac{2\pi x}{\ell} \sin \frac{2\pi y}{\ell} \\ & + a_{13} \cos \frac{\pi x}{\ell} \cos \frac{3\pi y}{\ell} + a_{31} \cos \frac{3\pi x}{\ell} \cos \frac{\pi y}{\ell} \\ & + a_{33} \cos \frac{3\pi x}{\ell} \cos \frac{3\pi y}{\ell} + a_{24} \sin \frac{2\pi x}{\ell} \sin \frac{4\pi y}{\ell} \\ & + a_{42} \sin \frac{4\pi x}{\ell} \sin \frac{2\pi y}{\ell} + a_{44} \sin \frac{4\pi x}{\ell} \sin \frac{4\pi y}{\ell} \dots (1) \end{aligned}$$

周辺において固定の場合

$$\begin{aligned} w(x, y) = & (\cos \frac{\pi x}{\ell})^2 (\cos \frac{\pi y}{\ell})^2 (a_0 + b_{11} \sin \frac{\pi x}{\ell} \sin \frac{\pi y}{\ell} \\ & + a_{22} \cos \frac{2\pi x}{\ell} \cos \frac{2\pi y}{\ell} + b_{22} \sin \frac{2\pi x}{\ell} \sin \frac{2\pi y}{\ell} \\ & + b_{33} \sin \frac{3\pi x}{\ell} \sin \frac{3\pi y}{\ell} + a_{11} \cos \frac{\pi x}{\ell} \cos \frac{\pi y}{\ell} \\ & + a_{33} \cos \frac{3\pi x}{\ell} \cos \frac{3\pi y}{\ell} + b_{44} \sin \frac{4\pi x}{\ell} \sin \frac{4\pi y}{\ell}) \dots (2) \end{aligned}$$

3. 孔縁および周辺の弾性応力

解析結果の応力に関する表示は周辺のせん断力 Q を断面積で除した次式の平均せん断応力 τ_0 によって無次元応力として表示する。

$$\tau_0 = \frac{Q}{t\ell} \quad \dots \dots \dots (3)$$

孔縁は応力集中によって最大応力が生ずる部分である。孔縁の隅角部の応力は極座標で表わす。孔縁は自由端であるから、半径方向垂直応力 σ_r とせん断応力 $\tau_{r\theta}$ は零である。周方向垂直応力 σ_θ は、孔縁の隣接節点の周方向変位から周方向ひずみを計算し、そのひずみに弾性係数を乗じて求めた。その結果を応力載荷は Fig.3 に、変形載荷は Fig.4 に示す。これらの図を比較すると、正方形孔が小さい場合、あまり差はみられない。正方形孔が大きくなると、応力載荷の応力集中は著しく大きくなる。 $a/\ell = 0.85$ の場合、最大値の生ずる位置が対角線方向からはずれ 8箇所となる。これは応力載荷の場合、正方形孔が大きいと面内で曲げを受けるような変形となるためである。

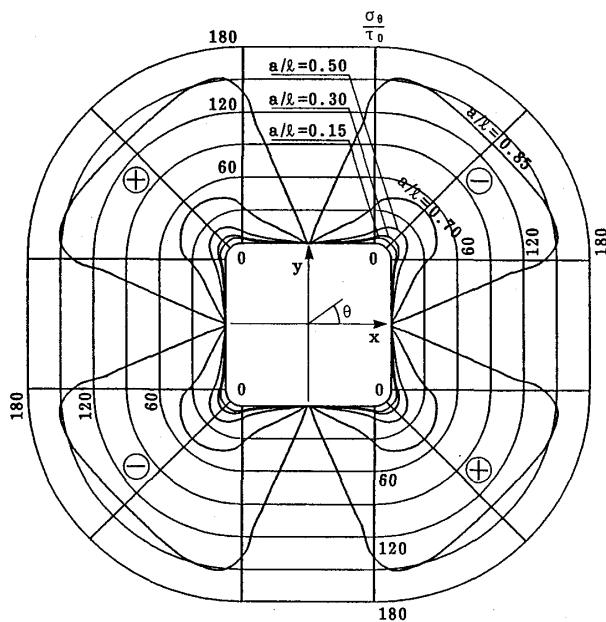


Fig. 3 Circumferential stresses at hole edge under uniform shear stress

応力載荷と変形載荷における孔縁の最大応力を平均せん断応力で除した応力集中係数を Fig.5 に示す。同図には孔縁隅角部の曲率半径 r による応力集中の変化を見るために $r = a/10, a/5, a/2$ について示している。ただし、 $r = a/2$ は円孔に相当する。応力載荷は変形載荷に比べて正方形孔が大きくなると応力集中が著しく、 $r = a/10$ で $a/\ell = 0.85$ の場合、応力載荷は変形載荷の 3.68 倍の応力集中を生ずる。なお、曲率半径 r を大きくすれば応力集中の低減する様子がよくわかる。

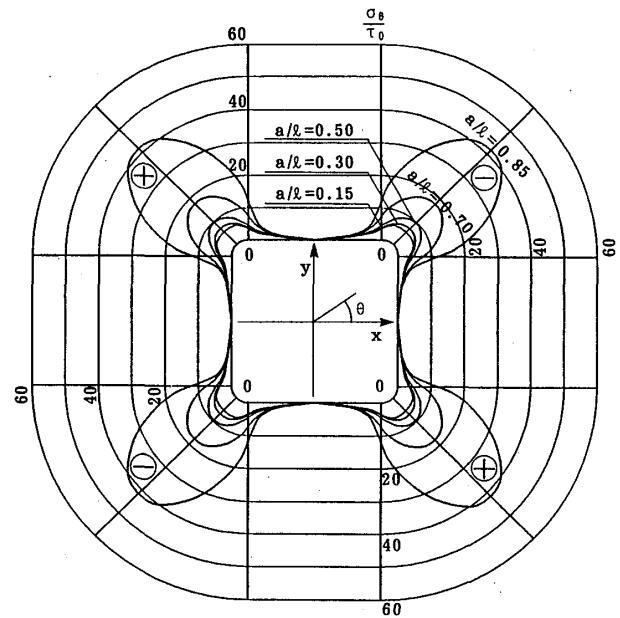


Fig. 4 Circumferential stresses at hole edge under uniform shear deformation

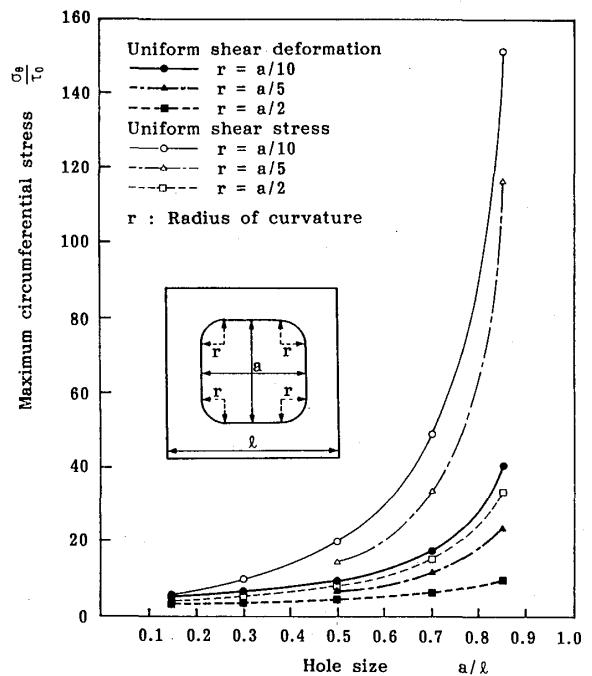


Fig. 5 Maximum circumferential stresses at hole edge

孔縁の応力集中は周辺に向けて減衰し、孔が小さい場合、せん断応力は周辺上で等分布に近いが、孔が大きくなると減衰が不充分となり周辺上の応力は一定ではなくなる。 $x = \ell/2$ の周辺境界における応力分布を応力載荷と変形載荷に対して Fig.6 と Fig.7 に示す。応力載荷の場合、周辺上では載荷条件から $\tau_{xy} = \tau_0, \sigma_x = 0$ であるが、孔が大きくなると、周辺の面内曲げ変形によって垂直応力 σ_y が生ずる。変形載荷では周辺が直線を保つよ

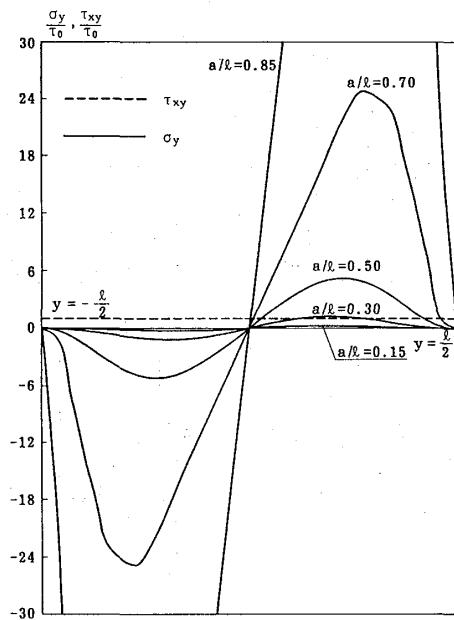
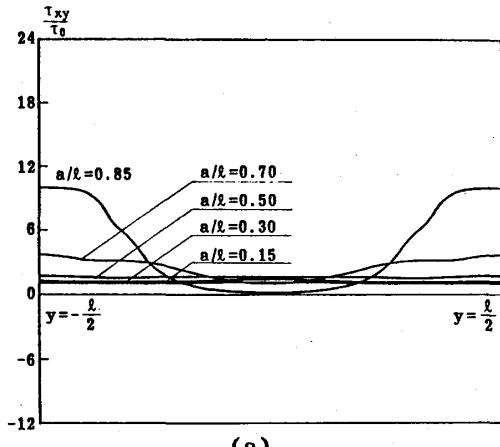
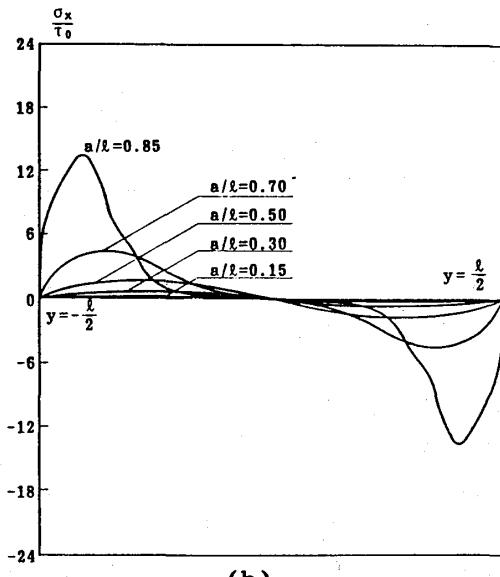


Fig. 6 Stress distribution at boundary under uniform shear stress



(a)



(b)

Fig. 7 Stress distribution at boundary under uniform shear deformation

うに拘束されるので垂直応力 σ_x とせん断応力 τ_{xy} が生ずる。また、周辺がその長さを一定に保つ変形であることから $\epsilon_y = 0$ となる条件より、 $\sigma_y = \nu \sigma_x$ となる。これらの図より応力載荷の場合、正方形孔が大きくなるとかなり大きな垂直応力 σ_y が生じるが、孔縁の応力集中よりはるかに小さい。変形載荷の場合は応力載荷に比べてかなり小さくて、せん断応力分布は孔が小さいとき周辺中央がわずかに大きくなるが、孔が大きくなると、逆に周辺中央は小さくなり周辺の両端で最大となる分布を示す。

4. 弹性座屈強度

一様せん断応力を受ける板の座屈応力は座屈係数 k を用いて次式で表わす。

$$\tau_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\ell}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

無孔板の古典解による座屈係数は、単純支持および固定に対して、それぞれ $k_s = 9.34$ と $k_c = 14.71$ である。変形載荷を受ける有孔板の座屈強度は応力載荷の場合と比較するため、式(3)によって定義した平均せん断応力を表わし式(4)を適用する。これによって、座屈強度は座屈係数 k によって比較することができる。

Fig. 8 に弾性座屈係数と孔の大きさの関係を示す。同図において、面外境界条件は単純支持と固定に分け、面内境界条件は変形載荷に関するものを黒丸の実線で、応力載荷を黒丸の破線で示してある。全体的に正方形孔による座屈強度の低下は著しく、特に単純支持は固定より顕著である。

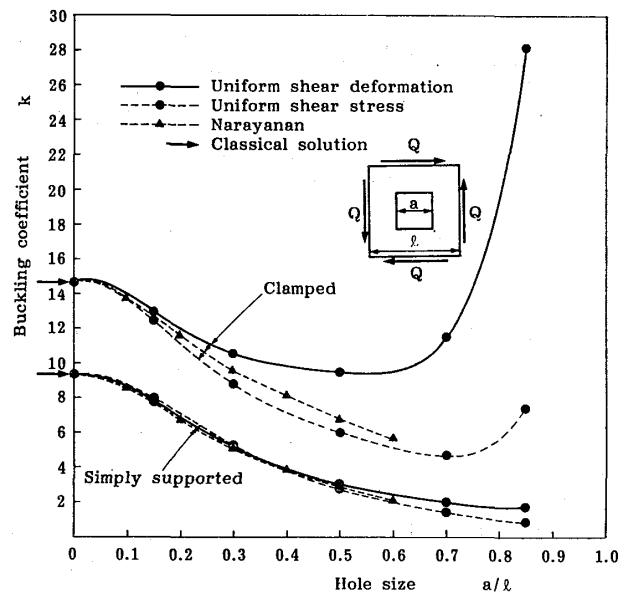


Fig. 8 Variation of elastic buckling coefficients with hole size

面内境界条件すなわち載荷条件の違いが座屈強度に与える影響を検討するため変形載荷と応力載荷の結果を比較する。単純支持の場合、座屈強度は載荷条件の違いによる差がほとんどみられない。ところが固定の場合、変形載荷の座屈強度は正方形孔が大きくなるほど応力載荷より大きく、 $a/\ell = 0.7 \sim 0.85$ のとき応力載荷の2.49～3.80倍になる。また $a/\ell = 0.7$ から孔が大きくなる

ほど座屈強度が増加している。これはFig. 9に示すように周辺が固定の場合、 $a/\ell = 0.7 \sim 0.85$ の座屈によるたわみは孔の隅角部に集中して現れて局部座屈のような座屈モードになるためと考えられる。Sabir・Chow¹⁾はこのような現象が圧縮の変形載荷を受ける正方形孔を有する正方形板の場合に現れることを示している。

次に一様せん断変形の荷重条件で、有限要素法を用い

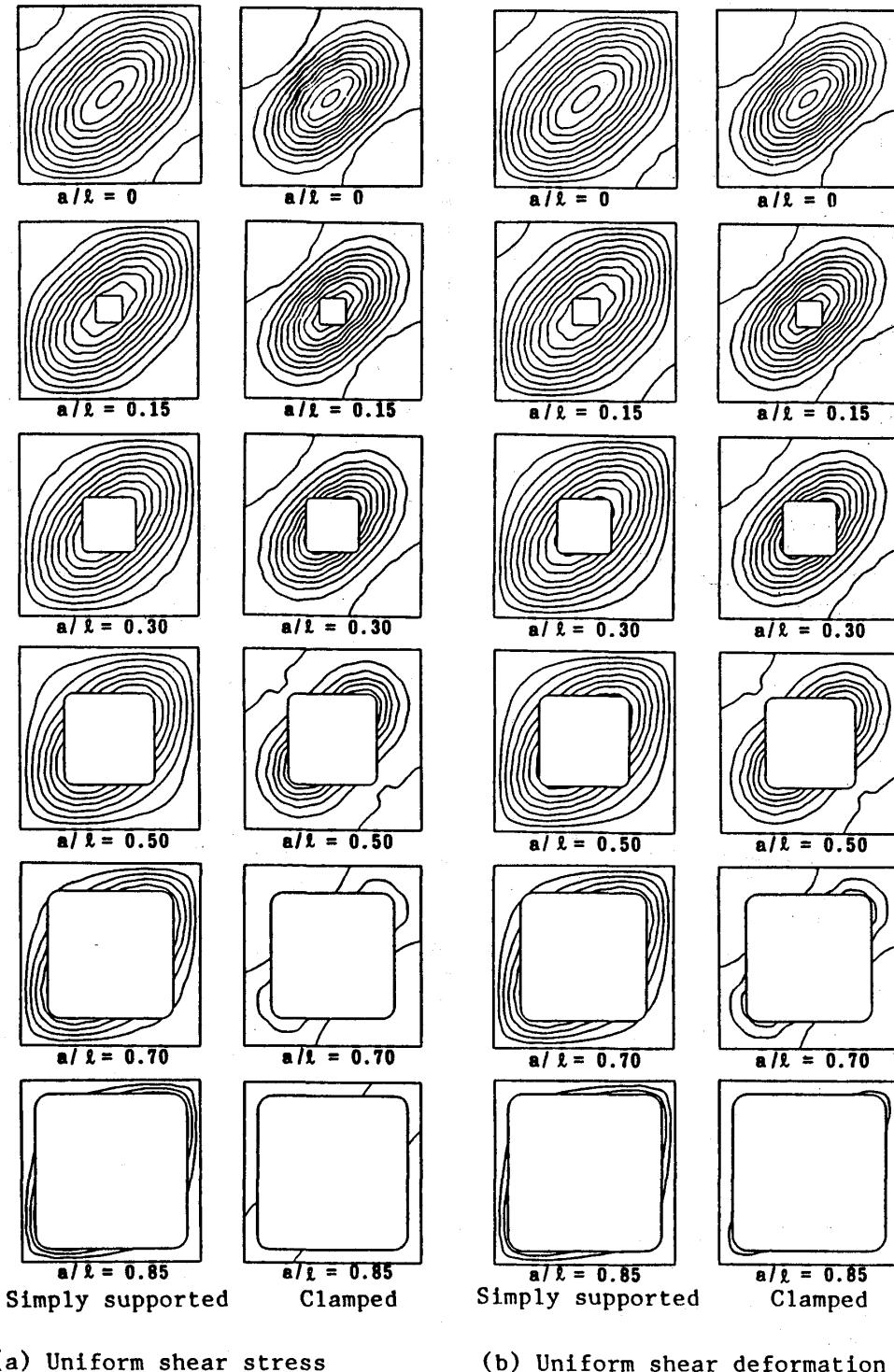
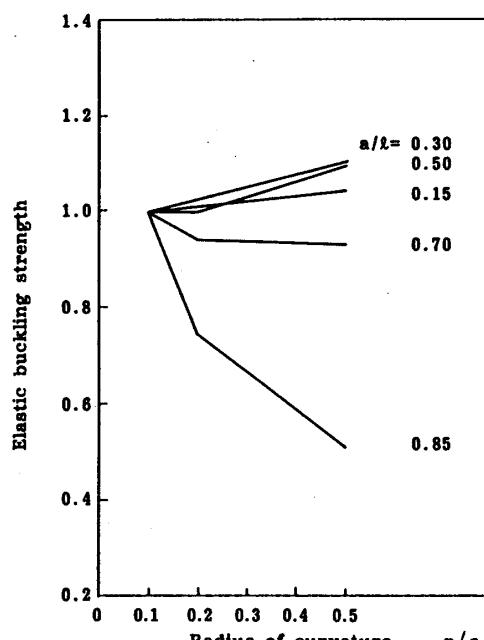


Fig. 9 Elastic buckling mode of square plate with square hole

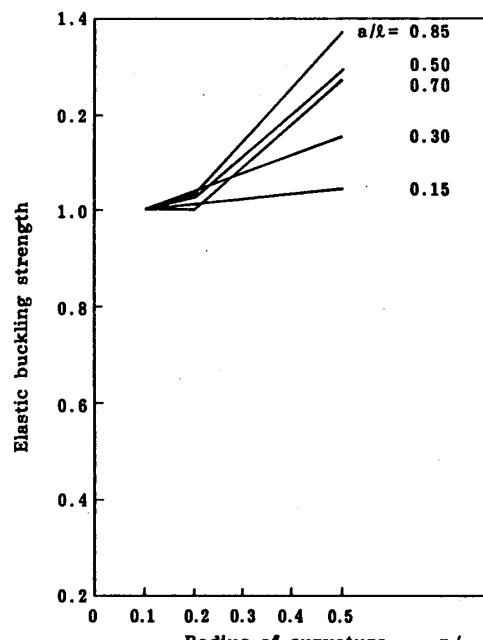
て解いたNarayananの解析結果と比較する。単純支持は有限要素法による結果とよい近似を示す。固定の場合、正方形孔が大きくなると、本解析は有限要素法による結果よりかなり大きくなり $a/\ell = 0.6$ のとき40%大きい値を示す。Narayananの解析結果は本解析の応力載荷に近い傾向を示す。これはNarayananの解析の場合、周辺

に有限な剛性のはり要素に面内回転を拘束する条件によって解析されているので完全な変形載荷でないために座屈強度が小さくなつたものと思われる。

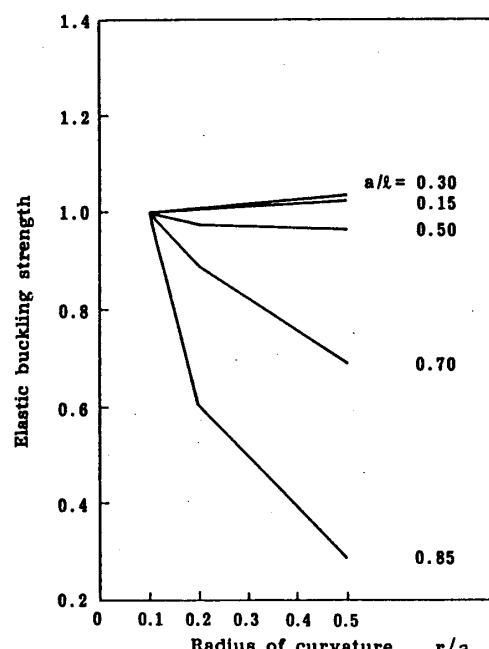
Fig.10に孔縁隅角部の曲率半径 r と正方形孔の辺長 a の比 r/a と弾性座屈強度の関係を示す。縦軸は曲率半径 $r/a = 0.1$ の弾性座屈強度に対する $r/a = 0.2$ 、



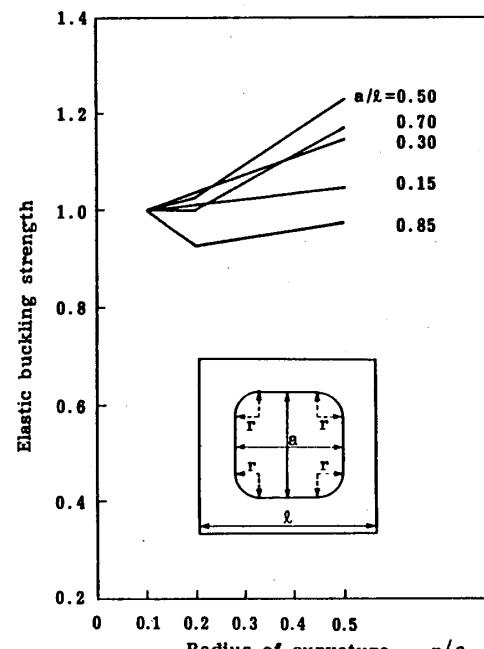
(a) Uniform shear stress
Clamped



(b) Uniform shear stress
Simply supported



(c) Uniform shear deformation
Clamped



(d) Uniform shear deformation
Simply supported

Fig. 10 Elastic buckling strength with radius of curvature at hole corner

0.5(円孔)の比を示す。ただし、曲率半径 $r/a=0.2$ の場合は $a/\ell=0.5, 0.7, 0.85$ についてのみ解析した。周辺の面外支持条件が単純支持の場合、曲率半径が大きくなると $a/\ell=0.15 \sim 0.5$ の有孔板は強度が増加するが $a/\ell=0.7 \sim 0.85$ は強度が低下する。これは曲率半径が小さいほど局部座屈の傾向が強くなり、全体座屈の円孔板より相対的に強度が増加するためと思われる。

Fig.11に有孔板の孔形が弾性座屈強度に与える影響を正方形孔と直径 d の円孔について示す。同図の横軸は正方形孔の a/ℓ と円孔の d/ℓ が共通であるから、同値の a/ℓ と d/ℓ では孔による欠損面積は正方形孔が常に大きい。周辺が単純支持の場合、載荷条件に関係なく常に円孔板の座屈強度が正方形板よりやや大きい。周辺が固定の場合、孔の小さいときは単純支持の場合より孔形による差は小さいが、変形載荷の $a/\ell=d/\ell=0.4$ および応力載荷の $a/\ell=d/\ell=0.7$ より大きい範囲において、正方形板の座屈強度が円孔板より大きくなり、孔が大きくなるほどその差は増大する。これは前述したように正方形孔が大きい場合に起きた局部座屈のような座屈モードのためと思われる。

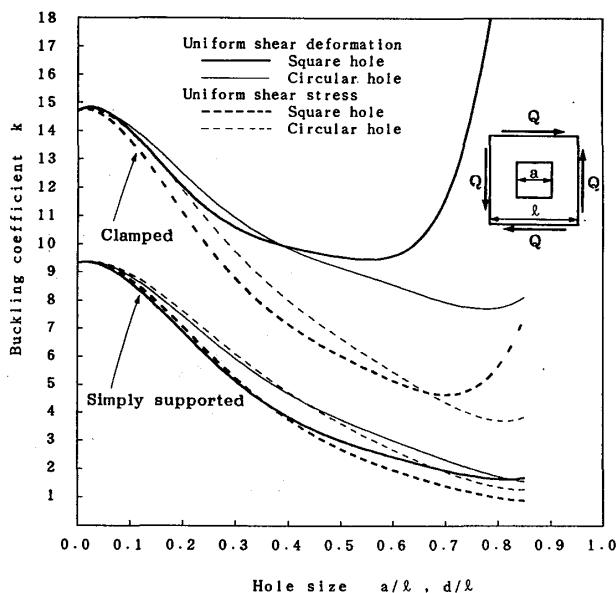


Fig. 11 Comparison of elastic buckling strength and hole shape

5. 塑性崩壊強度

Fig.12に弾塑性応力解析における荷重とせん断変形の関係を示す。縦軸は次式で定義する塑性せん断力 Q_p で除した無次元せん断力である。

$$Q_p = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} t \ell \quad \dots \dots \dots (5)$$

横軸のせん断ひずみは、応力載荷の場合、周辺境界が直線でないので図中に示すように境界辺の両端を結んだ直

線が載荷前の境界辺となす角度を平均せん断ひずみ γ_0 とする。この図において曲線の傾きは有孔板の面内剛性を表わすことになる。正方形孔が大きくなると、載荷条件の違いによる差異が顕著となり、変形載荷は応力載荷より強度が著しく大きいことがわかる。すなわち変形載荷は面内剛性および塑性崩壊荷重がそれぞれ応力載荷より大きい。塑性崩壊強度は、正方形孔の大きい場合、変形載荷が応力載荷の2~3倍になる。また、塑性崩壊時の平均せん断ひずみ γ_0 は孔が大きくなると応力載荷が著しく大きい。

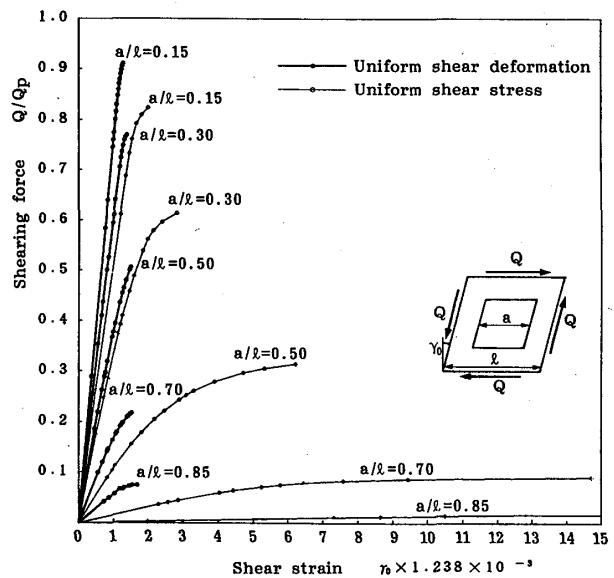


Fig. 12 Load vs average shear strain

塑性域は対角線軸と座標軸に関して対称となるので、板の1/8について変形載荷と応力載荷の塑性域をFig. 13に示す。図中の番号は降伏したときの荷重段階を表わし、番号順に塑性域が拡がる。最初の降伏は対角線上の孔縁で始まり、徐々に周辺に向けて塑性域が拡がる。正方形孔の小さい場合この拡がりは周辺断面に向かって進展する。応力載荷は塑性域が周辺断面に到達した荷重で崩壊するが、変形載荷はまだ耐荷強度があり、塑性域が周辺断面全域を貫通したときに崩壊する。この相違が崩壊強度の差異となる。また、正方形孔が大きくなると塑性域の拡がり方にも差異が現われ、応力載荷は面内の曲げ変形の影響を強く受けて塑性域が正方形孔の隅角部から最も近い周辺へ貫通する。ところが、変形載荷は塑性域が対角線断面を貫通するため、塑性崩壊強度に大きな差が生ずる。

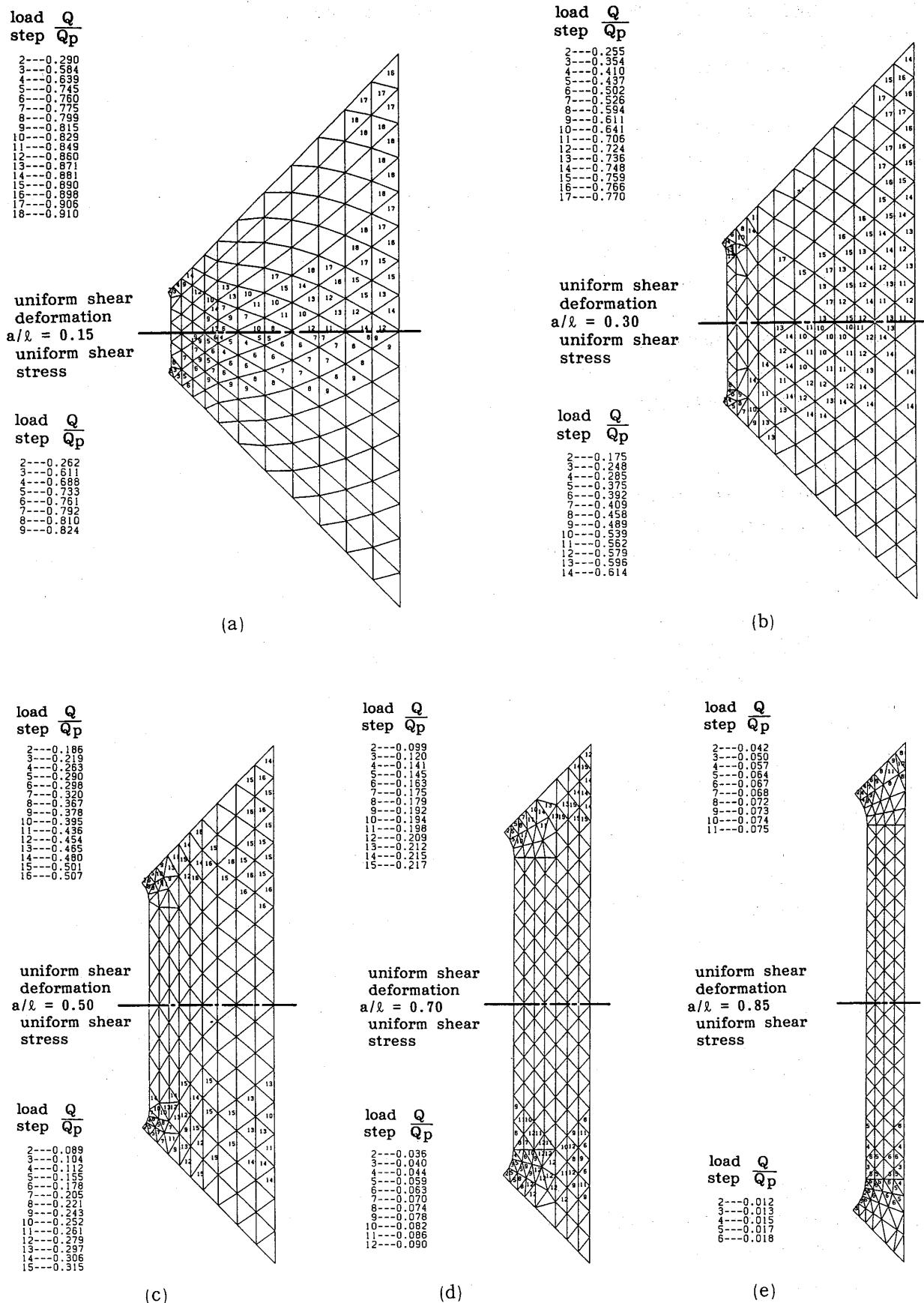


Fig. 13 Spread of plasticity under uniform shear deformation and uniform shear stress

6. 弹塑性座屈強度

単純支持および固定に対する正方形孔板の弾塑性座屈強度曲線をそれぞれFig.14とFig.15に示す。横軸は次式で定義する幅厚比パラメータ λ である。

$$\lambda = \frac{\ell}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad \dots \dots \dots (6)$$

幅厚比の大きい場合、有孔板は弾性応力状態で座屈する。ところが、図中の矢印より小さい幅厚比パラメータ λ では弾塑性座屈となる。図中の黒点は弾塑性応力解析の荷重段階を示している。したがって曲線の最上位の点が塑性崩壊荷重に相当する。これらの図からわかるように、弾塑性座屈強度は正方形孔が大きくなるほど、また幅厚比パラメータ λ が小さくなるほど弾性座屈以外に載荷の影響を強く受ける。 $a/\ell=0.15 \sim 0.85$ において、変形載荷の弾性座屈強度は単純支持の場合応力載荷の0.98~1.43倍であり、固定の場合応力載荷の1.03~2.14倍である。塑性崩壊強度は単純支持、固定ともに応力載荷の1.08~3.80倍となり、塑性崩壊強度の増加の割合は単純支持が固定より大きく、弾性座屈とは逆の傾向を示す。

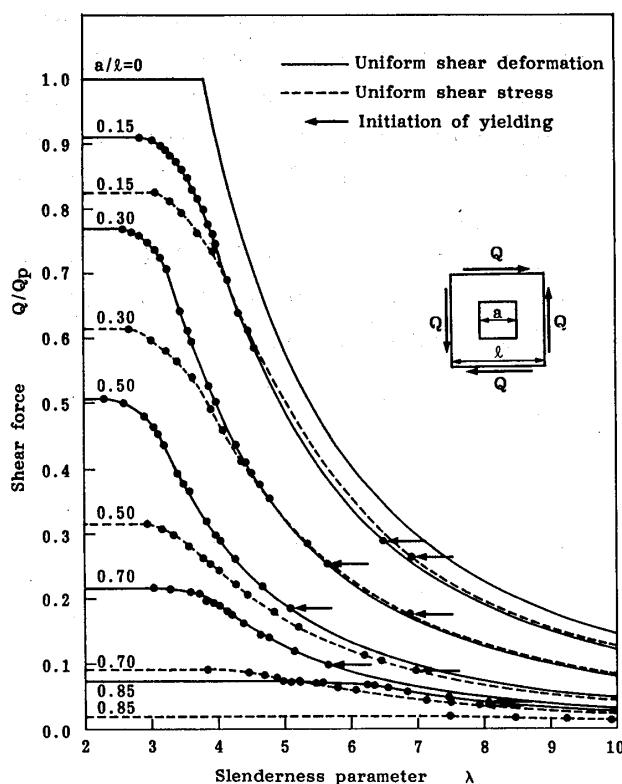


Fig. 14 Elasto-plastic buckling of simply supported square plate

Fig.16に有孔板の孔形が塑性崩壊強度に与える影響を正方形孔と円孔について示す。応力載荷に対する変形載荷の強度の増加は円孔板も正方形孔板も孔が大きくなるほど大きくなりその割合はほぼ同じである。正方形孔板の塑性崩壊強度は載荷条件に関係なく円孔板より小さく

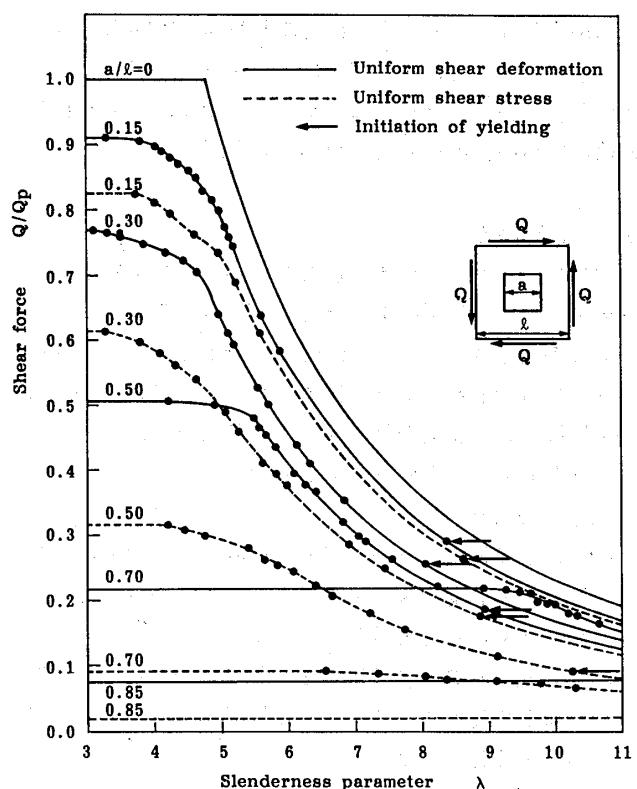


Fig. 15 Elasto-plastic buckling of clamped square plate

孔が大きくなるほどその差が大きくなる。なお、応力載荷を受ける円孔板と変形載荷を受ける正方形孔板の塑性崩壊強度がほぼ同じなのは興味ある現象である。

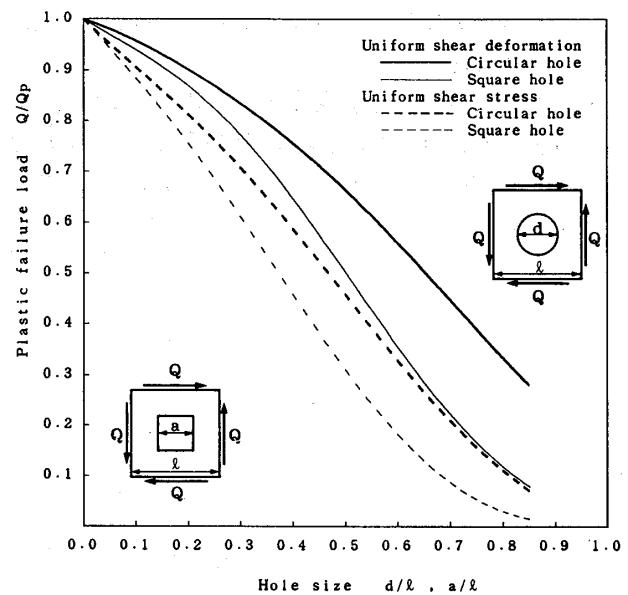


Fig. 16 Comparison of ultimate strength and hole shape

実際の構造物では本解析のような載荷状態はまれで、ほとんどの場合周辺境界はフランジのような補剛材で支持されている。このような場合、周辺の境界条件は本解

析の境界条件である応力載荷と変形載荷の中間的なものと予想される。したがって今後フランジなどで支持されている有孔板を直接解いてフランジの剛性と座屈強度の関係を定量的に把握する研究が必要と思われる。

7. あとがき

中央に正方形孔を有する正方形板がせん断を受けるときの弾塑性座屈解析を Rayleigh-Ritz 法で行った。正方形孔の大きさは $a/\ell = 0.15 \sim 0.85$ の範囲で変化させ、載荷条件は変形載荷あるいは応力載荷とした。応力分布や座屈強度は、正方形孔の大きさと載荷条件によって大きく変化することが明らかになった。これらの点を列挙すれば次のようになる。

- (1) 変形載荷による弾塑性座屈強度および塑性崩壊強度は応力載荷の場合より大きく、その差は正方形孔が大きくなるほど著しい。
- (2) 弹性座屈強度は弾塑性座屈強度と同様に載荷条件による影響を受けるが、弾塑性座屈強度の場合ほど著しい差は生じない。
- (3) 変形載荷で面外支持条件が固定の場合、正方形孔が $a/\ell > 0.6$ になると、局部座屈モードになり弾性座屈強度が増加するようになる。
- (4) 正方形孔の辺長と等しい直徑を有する円孔板に比べて、弾性座屈強度は全体座屈の場合常にやや小さいが、局部座屈になる場合は正方形孔板が著しく大きくなる。また、塑性崩壊強度は載荷条件に関係なく円孔板より小さく、孔が大きくなるほどその差が大きくなる。
- (5) 応力載荷は、正方形孔が小さい場合、塑性域が最小断面を貫通して崩壊する。正方形孔が大きい場合、塑性域が最小断面と対角線断面の中間に貫通して崩壊する。

(6) 変形載荷は、正方形孔が小さい場合、塑性域が周辺断面を貫通して崩壊する。世方形孔が大きい場合、塑性域が対角線断面を貫通して崩壊する。

(7) 孔縁の応力集中は、正方形孔が大きくなると、応力載荷の場合著しく高くなるが、変形載荷の場合はそれほど高くならない。また、正方形孔の隅角部の曲率半径が大きくなると、孔縁の応力集中は減少する。

なお、本解析は有孔板の弾塑性せん断座屈の基礎的研究として正方形孔を有する正方形板を解析の対象に選んだ。しかし実際の設計では長方形孔や座屈強度低下を防ぐ補強方法に関する資料が重要となるのでこれらの問題に対する解析や実験が必要と思われる。

【参考文献】

- (1) Sabir, A. B. and Chow, F. Y. :Elastic buckling of flat panels containing circular and square holes, Proc. of the International Conference on Instability and Plastic Collapse of Structures, Manchester, pp.311-321, 1983.
- (2) Narayanan, R. and Chow, F. Y. : Experiments on perforated plates subjected to shear, J. Strain Anal. Eng. Des., Vol.20, No.1, pp. 23-34, 1985.
- (3) 上野谷 実、大村 裕：一様せん断変形を受ける円孔を有する正方形板の弾塑性座屈強度、土木学会論文集、第 386 号／I-8、1987.