

福山大学工学部紀要  
第11号 1989年3月

## 補強円孔を有する正方形板の 弾性せん断座屈強度

上野谷 実\*・中村 雅樹\*

Elastic Shear Buckling Strength of Square Plates  
with Reinforced Circular Holes

Minoru UENOYA and Masaki NAKAMURA

### ABSTRACT

Elastic shear buckling of square plates containing reinforced circular holes is investigated analytically. The perforated plates are subjected to uniform shear stress or uniform shear deformation, and are simply supported or clamped on all four edges. Ratios of the hole diameter to the plate width,  $d/\ell$ , are 0.15, 0.3, 0.5, 0.7 and 0.85. The influence of the circular hole and loading condition on buckling strength is considered. Relationships are presented between the buckling strength of plates, the size of the hole and depth of the reinforcing ring. In addition the results of an experimental study on square plates with circular holes which are reinforced to equal buckling strength of the unperforated plate are presented. The ratio of the width to the thickness of the test plates is 333. The plates are subjected to uniform shear deformations and clamped at all four edges. Results are compared with analysis and experiments for various sized holes. Comparison of analytical results with test shows good agreement on the elastic buckling strength for unperforated plate and the plate of  $d/\ell = 0.3$ , and fairly good agreement for the plates of  $d/\ell = 0.5$  and 0.7. It is shown that the experimental ultimate loads of the perforated plates with reinforcements are from 5.6 to 7.0 times of the initial buckling loads.

Key words : elasto-plastic buckling, shear load, perforated plates, square holes

キーワード：弾塑性座屈、せん断荷重、有孔板、正方形孔

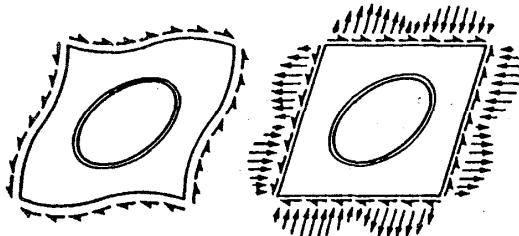
### 1. まえがき

有孔板は孔によって断面積が減少するため座屈強度や終局強度が低下する。孔による強度の低下を抑えるために孔のまわりを補強することがある。補強方法としてはリング、ダブリング、スチフナーによる補強が考えられる。有孔板の円孔縁における補強リングの効果について、1976年に Grosskruth<sup>1)</sup>は正方形板の辺長  $\ell$  に対する円孔の直径  $d$  の比  $d/\ell = 0.4$  の円孔板が一様せん断変形

載荷を受けるときの弾性座屈強度に及ぼす補強方法の効果について実験的研究を行った。その結果リング補強が最も補強効率がよいことを明らかにした。1979年に Rockey<sup>2)</sup>は  $d/\ell = 0.25, 0.333, 0.5$  について理論および実験的研究を、同年に日本造船学会船体構造委員会、横強度小委員会WG(ワーキング・グループ)<sup>3)</sup>は  $d/\ell = 0.1, 0.3, 0.5$  について理論的研究を行った。両者とも Fig. 1 に示すようにせん断荷重を受ける有孔板が周辺で面内

\* 土木工学科

変位拘束の自由な場合、すなわち、一様せん断応力載荷 (uniform shear stress) の解析を行っている。ところが両者の解析結果は円孔板の弾性座屈強度の補強効果の定量的評価に差異があり、 $d/\ell = 0.5$  より大きい円孔の補強効果は未解決のままである。また、Fig. 1 に示すような周辺における面内方向変位が完全に拘束される場合の一様せん断変形載荷 (uniform shear deformation) に対する解析はまったく行われていない。著者は円孔を有する正方形板がせん断を受ける場合、応力載荷 (uniform shear stress) と変形載荷 (uniform shear deformation) について弾塑性座屈解析を Rayleigh-Ritz 法で行った。<sup>4)</sup> その結果、円孔径  $d$  と正方形板の辺長  $\ell$  の比  $d/\ell = 0.15 \sim 0.85$  の広い範囲において周辺で単純支持あるいは固定支持される場合の弾塑性座屈強度が明らかになった。



(a) Uniform shear stress    (b) Uniform shear deformation

Fig. 1 Perforated plate subjected to shear

このように孔縁の補強効果に関する研究が少ない現状から、本報告ではリング補強した円孔を有する正方形板のせん断座屈強度を検討する。孔縁をリング補強をした円孔を有する正方形板が応力載荷と変形載荷を受ける場合の弾性座屈解析を文献(4)と同じ方法で行い、孔縁の補強が弾性座屈強度や塑性崩壊強度、応力状態に及ぼす影響を  $d/\ell = 0.15 \sim 0.85$  の広い範囲で明らかにする。また、載荷実験を行い、解析結果と比較することによって解析の適用性を検討する。

## 2. 弾性座屈解析

孔縁は補強幅が板厚  $t$  と等しく、厚さが  $t_r$  のリングによって補強する。有限要素解析に用いた要素分割を Fig. 2 に示す。リング補強厚  $t_r$  を変化させて  $t_r/t = 1 \sim 5$  について弾性座屈解析を行った。孔縁における弾性応力の最大値について、応力集中係数として Fig. 3 に示す。応力載荷の場合、変形載荷に比べ無補強のとき応力集中が大きいので補強効果も大きく応力集中をかなり低減することができる。

弾性座屈係数  $k$  と補強厚  $t_r/t$  の関係を Fig. 4 に示す。同図に Rockey<sup>2)</sup> の研究結果、日本造船学会船体構造委員

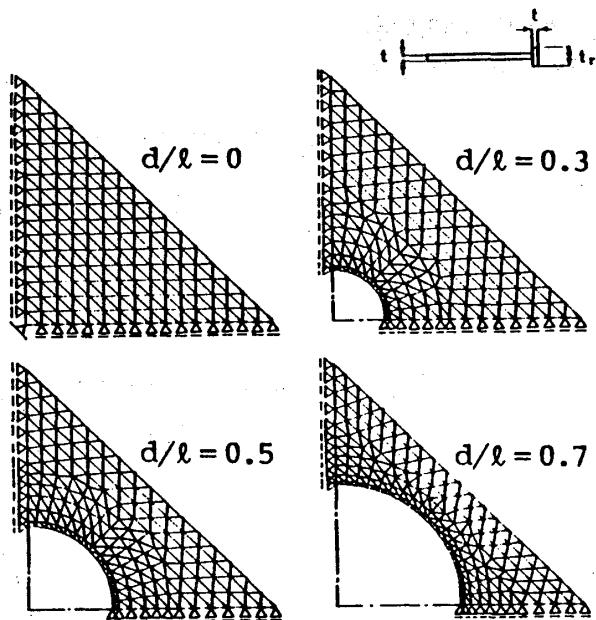


Fig. 2 Finite element mesh

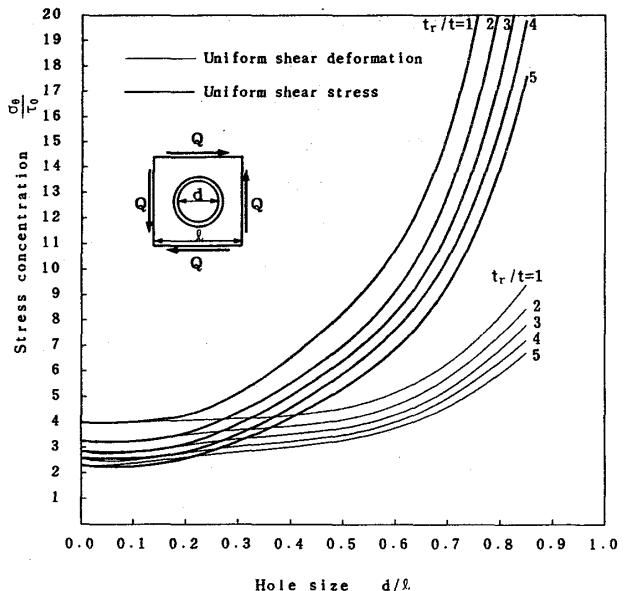
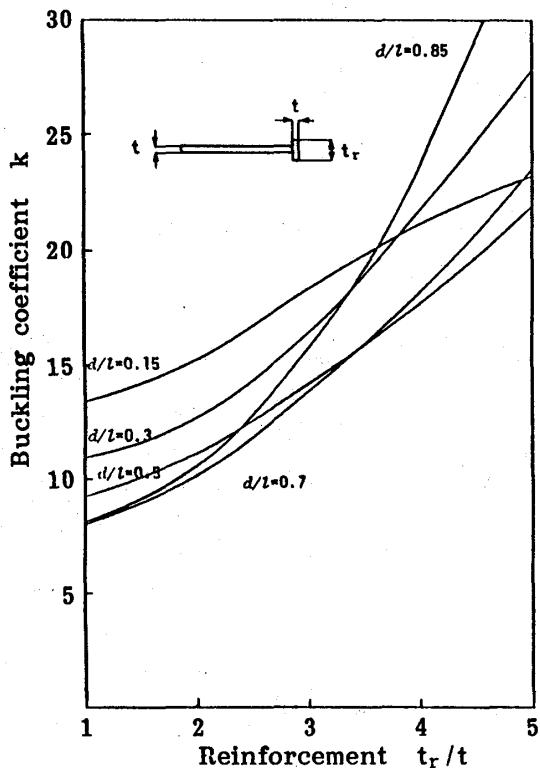


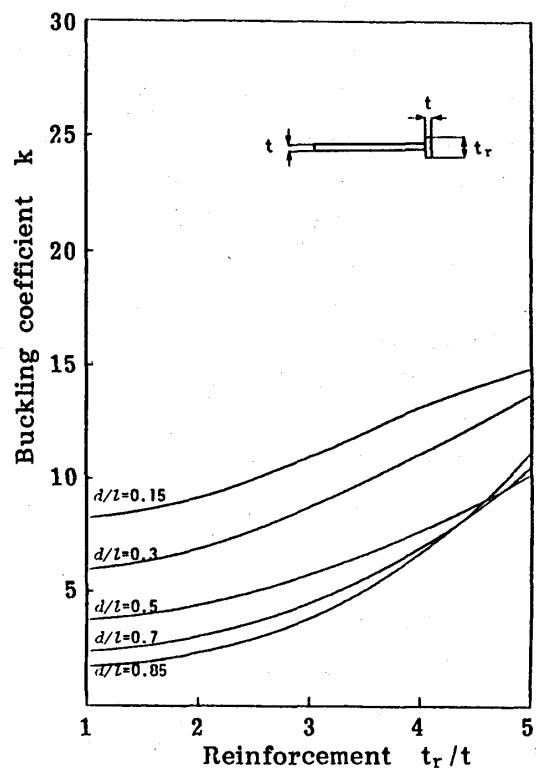
Fig. 3 Maximum circumferential stresses at hole edge with reinforcement

会、横強度小委員会 WG の研究結果も比較のため載せて いる。この図より、リングが厚くなるにしたがって座屈強度は高くなっている。横強度小委員会 WG の研究結果は一様せん断応力載荷の周辺単純支持の場合だけであるが、 $d/\ell = 0.3, 0.5$  のとき  $t_r/t = 3 \sim 4$  程度までは本解析と同様な傾向を示すが、 $t_r/t = 3 \sim 4$  以上では WG の座屈強度は本解析より小さくなる。WG の報告には補強の要素分割図は示されず、その代わりに補強リングの断面積、断面 2 次モーメントが示されている。こ

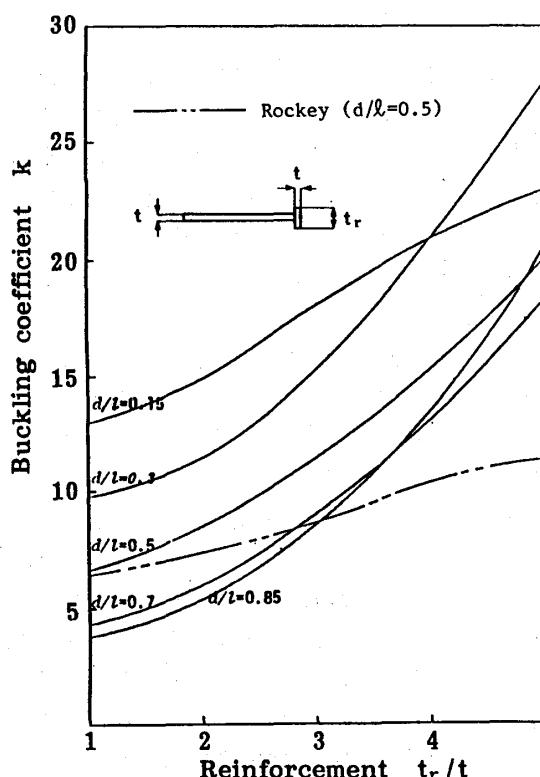
これは補強リングを本解析のように三角形要素に分割して解析したのではなく、孔縁の節点間に補強リングと等価な断面積と断面2次モーメントを有する棒要素を付加して解析を行ったと推定される。この場合、ねじり抵抗は



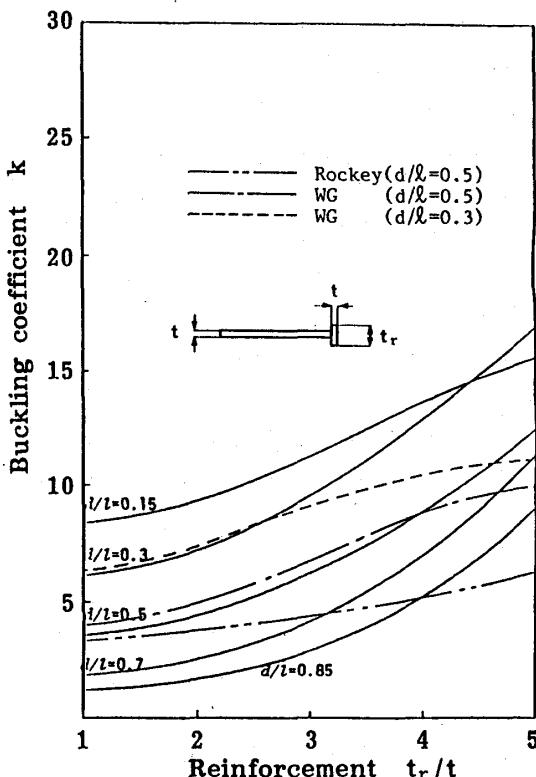
(a) Uniform shear deformation, Clamped



(b) Uniform shear deformation, Simply supported



(c) Uniform shear stress, Clamped



(d) Uniform shear stress, Simply supported

Fig. 4 Relationships between buckling coefficient and ring reinforcement

無視されるので補強効果は過小評価される。したがって補強厚  $t_r/t$  が大きくなると本解析との差異が顕著になったものと思われる。

Rockey の解析結果と本解析結果を比較すると無補強

の座屈強度はよく一致しているが、補強した場合の座屈強度は本解析に比べてかなり小さなものとなっている。これは Rockey の解析では非適合要素によるかなり粗い要素分割が影響していると考えられる。

また  $d/\ell = 0.15$  の座屈係数は  $t_r/t$  が大きくなると  $d/\ell = 0.30$  の座屈係数より小さくなる。これは補強リングの厚さが同じでも  $d/\ell = 0.15$  の補強材料の延長は  $d/\ell = 0.30$  の 51% である。したがって、材料欠損による曲げ剛性の低下と補強による曲げ剛性の上昇とのかね合いで、補強有孔板の座屈強度は孔の大きさの序列と異なる変化をする場合もある。

### 3. 弾性座屈実験

#### 3. 1 実験装置および供試体

実験装置は供試体の有孔板を固定するため、Fig. 5 に示すように 4 隅をヒンジ機構にした非常に剛性の高い鋼鉄製の載荷フレームを用いた。載荷方法は直径 24mm の高力ボルトで供試体を載荷フレームに固定し、試験機の引張荷重  $P$  が連結器から載荷フレームを経て、板周辺に一様せん断変形荷重として作用する方法を用いた。供試体は正方形板の辺長  $\ell$  と円孔の直径  $d$  の比で表わすと、無孔板 ( $d/\ell = 0$ ) と有孔板 ( $d/\ell = 0.3, 0.5, 0.7$ ) の 4 種類である。また、供試体の寸法は平均板厚が  $t = 1.2 \text{ mm}$  であり、正方形板の辺長は 510 mm であるが、4 隅のヒンジ部分を切除してあり、実際にせん断変形を受ける部分は載荷フレーム内の一辺 400 mm の正方形部分である。したがって幅厚比は  $\ell/t = 333$  となる。補強円孔は鋼板に機械穿孔した円孔に供試体の鋼板と同じ材料で製作した補強リングを溶接した。本実験の場合、比較する解析結果が残留応力を考慮していないため、リングを孔縁に溶接して生じた残留応力を除去するため 600 °C で焼鈍した。本実験の補強厚  $t_r$  を Fig. 5 に示す。この補強厚は弾性座屈解析結果より無孔板と同じ弾性座屈強度になるように決定した。溶接前は解析値と同じ補強厚のリングであったが、非常に薄い鋼板の溶接のため溶接板の整形などにより解析値よりかなり小さい補強厚になった。実験に用いた鋼板は構造用軟鋼である。引張強度試験の結果は引張降伏応力  $\sigma_y = 2760 \text{ kgf/cm}^2$  (271 MPa)、引張強度  $\sigma_u = 3550 \text{ kgf/cm}$  (348 MPa) であった。応力計算に用いる弾性係数  $E$ 、ポアソン比  $\nu$  は、構造用軟鋼の一般的な数値である  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  (206 GPa)、 $\nu = 0.3$  を用いた。

#### 3. 2 ひずみと変位の測定方法

供試体の板が初期座屈を起こすまでの面内応力分布や板の応力状態、更に面外の曲げ挙動を調べるために電気抵抗線ひずみゲージ (ゲージ長 5 mm) を Fig. 6 に示す位

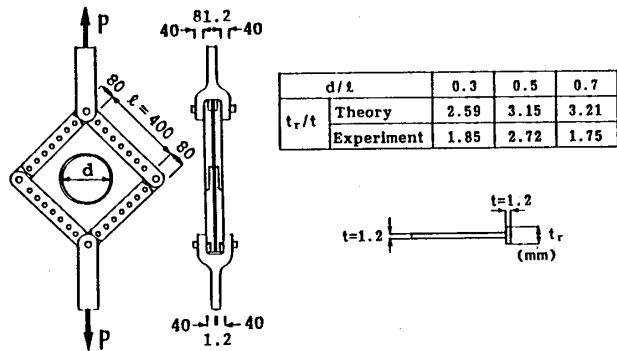


Fig. 5 Test frame and reinforcement at hole edge

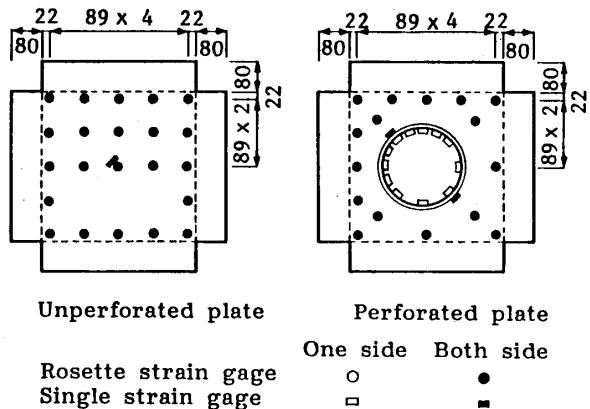


Fig. 6 Location of strain gages

置に接着した。

板の面外たわみは、座屈時に板のたわみが最大になると予想される位置、すなわち、無孔板は板の中央、有孔板は載荷軸上の孔縁をダイヤルゲージ (最小目盛 1/100 mm) によって測定した。Fig. 7 に実験前の初期たわみの分布を示す。測定した初期たわみは、供試体の板中央附近あるいは孔縁の周辺が最大となる分布をしていた。薄い鋼板に溶接を行ったため  $d/\ell = 0.3$  は溶接による変形がかなり生じた。また、板の面内方向変位は、対角線方向の変位をダイヤルゲージによって測定した。

#### 3. 3 載荷実験

載荷は、予想初期座屈荷重を越えないように、無孔板では予想初期座屈荷重のおよそ 1/2、有孔板では最も早く降伏すると予想される孔縁のひずみが降伏ひずみの 1/4 から 1/3 のならし荷重を載荷した後、載荷実験を行った。初期座屈を起こすと予想される荷重付近の荷重増分は小さくとり、 $d/\ell = 0.7$  では特に小さくとった。その後の荷重増分は、局部的塑性域の発生あるいは座屈挙動に変化の兆候が現われはじめてから変化が小さくなるまでの領域では小さくとり、その他の領域では大きくとった。弾塑性域において、荷重を一定に保っても面外

たわみおよび面内方向変位の増加がみられる場合、これらの変位の増加が微小になってから変位やひずみの読み取りを行った。

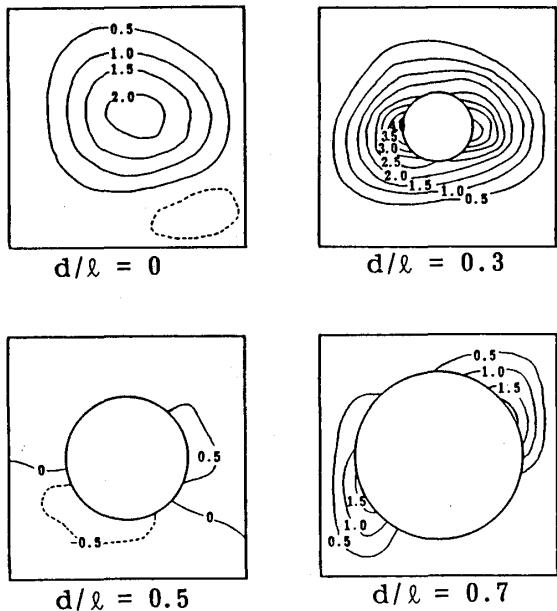


Fig. 7 Initial deflection

#### 4. 周辺および孔縁の弾性応力

Fig. 8に無孔板の周辺から20mmの周辺断面  $a_1-a_2$ 、板中間断面  $b_1-b_2$  および板中央断面  $c_1-c_2$  における応力分布を示す。ここでは便宜上各断面の  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  側から順に測点1～5とする。一様せん断変形を受ける有孔板の場合、周辺境界は変位が拘束されるため、せん断応力は等分布ではなく、また境界上で法線方向の垂直応力も生

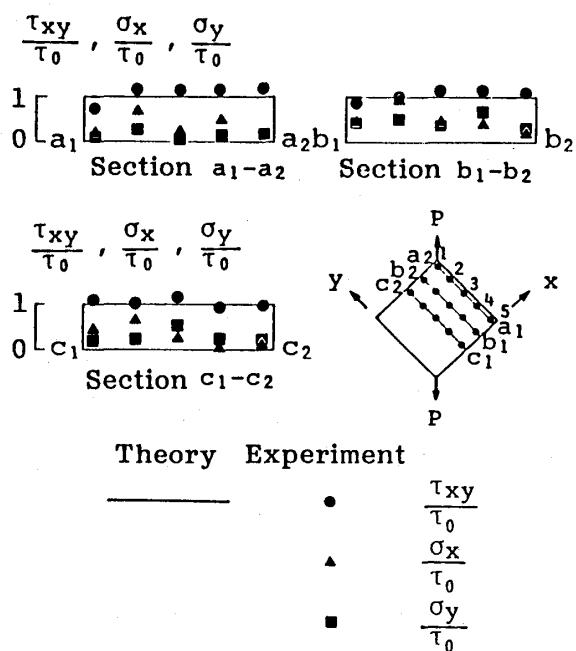


Fig. 8 Stresses of unperforated plate

じる。理論解析のこれらの応力による合力は実験における対角線方向の荷重  $P$  に相当する。この対角線方向力  $P$  の周辺方向成分として周辺せん断力  $Q$  は次式で定義できる。

$$Q = \frac{P}{\sqrt{2}} \quad \dots \dots \dots (1)$$

解析値および実験値は次式の平均せん断応力  $\tau_0$  によって各応力成分を除し、無次元応力として表示する。

$$\tau_0 = \frac{Q}{t\ell} \quad \dots \dots \dots (2)$$

面内応力の実験値は板の表面と裏面の応力を平均して曲げによる影響を除いて板中央面の値として示す。

無孔板の場合、理論的な純せん断の面内応力状態は、孔が無いので、板のいたる所で  $\tau_{xy}/\tau_0 = 1$ 、 $\sigma_x/\tau_0 = \sigma_y/\tau_0 = 0$  である。周辺断面と中間断面において、実験によるせん断応力  $\tau_{xy}/\tau_0$  が解析値より少し大きな値を示している。全体的には解析値によく近似する。垂直応力  $\sigma_x/\tau_0$ 、 $\sigma_y/\tau_0$  は、中間断面と中央断面においてやや大きな値を示しているが、せん断応力よりは小さく全体的には純せん断に近い値を示す。したがって本載荷装置は純せん断に近い応力状態を得ることのできる載荷方法である。

Fig. 9に有孔板の周辺断面における応力分布を示す。有孔板の応力は、 $d/\ell = 0.7$  の垂直応力  $\sigma_z/\tau_0$  を除いて各

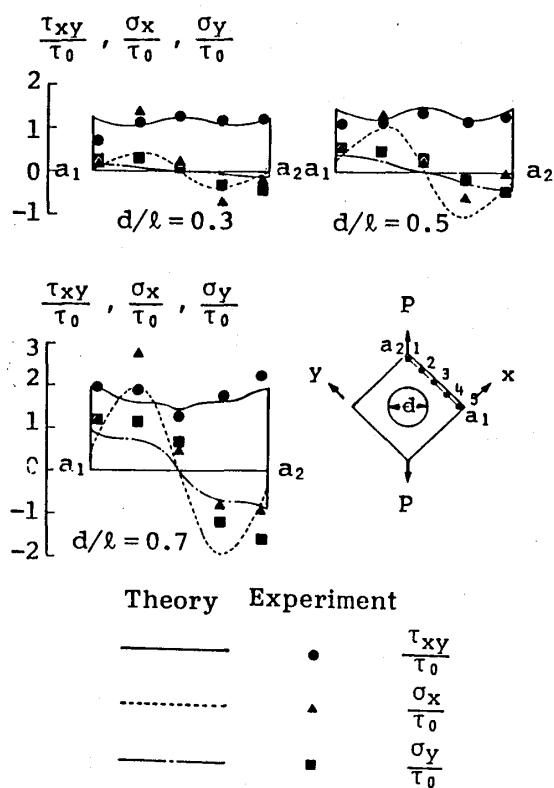


Fig. 9 Stresses of perforated plate at plate edge

有孔板とともに解析値によく近似した値を示す。Fig.10に有孔板の孔縁における接線方向の垂直応力  $\sigma_\theta / \tau_0$  を示す。実験値はばらつきが大きいが、全体的に解析値より大きい傾向を示す。これは板厚 1.2 mm という薄い板に同じ厚さのリング補強の溶接による初期たわみが Fig. 7 で示したように大きく生じたため、負荷の始めから曲げによる応力が面内応力に付加されて実験の応力にはばらつきが生じたと思われる。

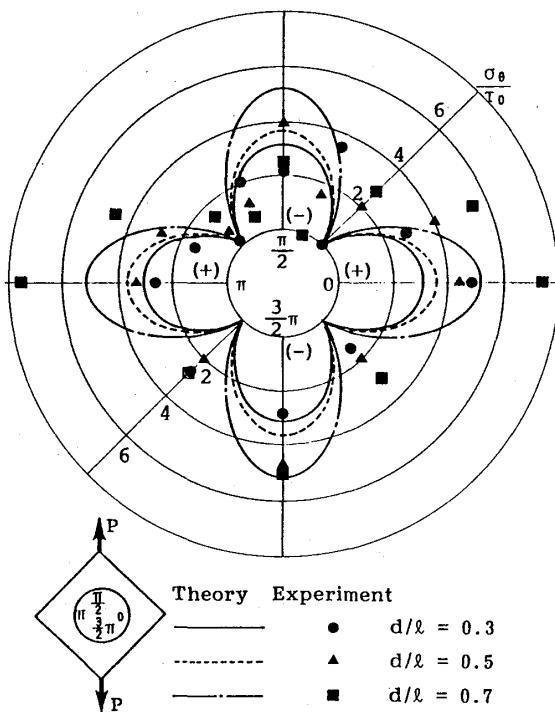


Fig. 10 Circumferential stresses at hole edge

## 5. 初期座屈強度

Fig.11に初期座屈を生じる近傍の荷重  $P$  と面外たわみ  $\delta$  の関係を表わす  $P - \delta$  曲線を示す。図中に矢印で示す実験による初期座屈荷重は実験値を最小 2 乗近似した 3 次曲線の変曲点における荷重である。Table 1 に供試体を載荷フレームに固定した後に測定した最大初期たわみ  $\delta_{\text{omax}}$  と板厚  $t$  の比  $\delta_{\text{omax}} / t$  を示す。本実験の場合、

Table 1 Initial deflection

$d/\ell$	$\delta_{\text{omax}}(\text{mm})$	$\delta_{\text{omax}}/t$
0.0	2.06	1.72
0.3	4.15	3.39
0.5	0.65, -0.59	0.54, -0.49
0.7	1.96	1.63

$d/\ell = 0.5$  以外は補強リングの溶接による大きな初期たわみのため変曲点が不明確になっている。また、 $d/\ell = 0.5$  の場合、初期たわみが逆対称型のため 2 曲線の変曲点荷重に差異が生じる結果となった。

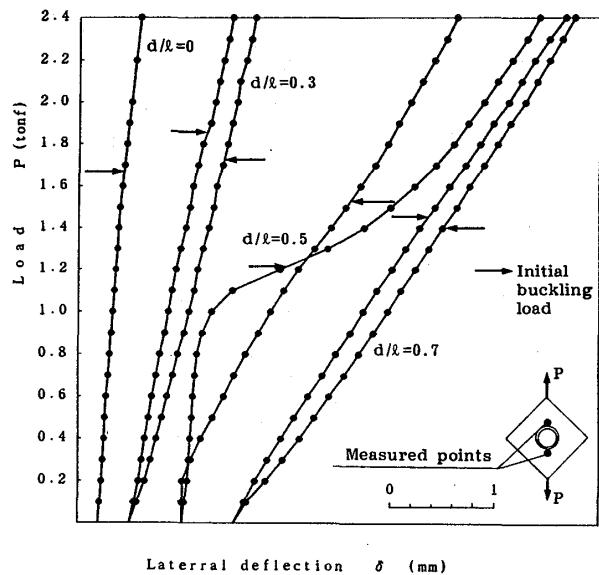


Fig. 11 Load vs lateral deflection

Fig.12に荷重  $P$  とたわみ  $\delta$  を 2 乗した  $P - \delta^2$  曲線を示す。座屈荷重の決定にこの  $P - \delta^2$  曲線を用いる方法があるが、本実験の場合この図において座屈後も曲線が直線とならず徐々に曲がっており座屈荷重決定は個人誤差が大きくなり困難である。

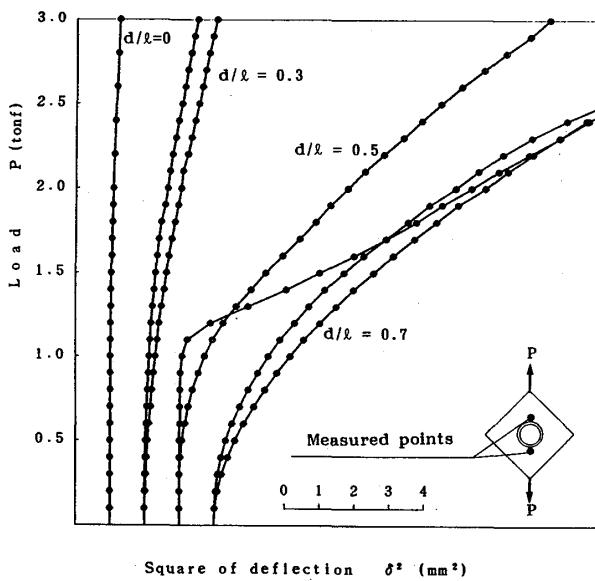


Fig. 12 Load vs square of lateral deflection

Table 2 および Fig.13 に解析による座屈強度曲線と実験結果を示す。有孔板の弾性座屈強度を無孔板の弾性座屈強度と同じになるように孔縁補強したので弾性域にお

ける座屈曲線は無孔板の座屈曲線だけである。弾塑性域では各有孔板の弾塑性座屈曲線が現れる。実験結果は供試体の幅厚比パラメータ  $\lambda = (\ell/t)\sqrt{\sigma_y/E} = 12.08$  の位置にプロットしている。完全な弾性座屈領域の供試体であるが、本図

Table 2 Elastic buckling strength

Hole size $d/\ell$	Experiment		Theory		$P_{ce}/P_{ct}$
	$P_{ce}$ (tonf)	$Q/Q_p$	$P_{ct}$ (tonf)	$Q/Q_p$	
0.0	1.685	0.156	1.705	0.158	0.988
0.3	1.787	0.166	1.705	0.158	1.054
0.5	1.371	0.127	1.705	0.158	0.804
0.7	1.438	0.133	1.705	0.158	0.843

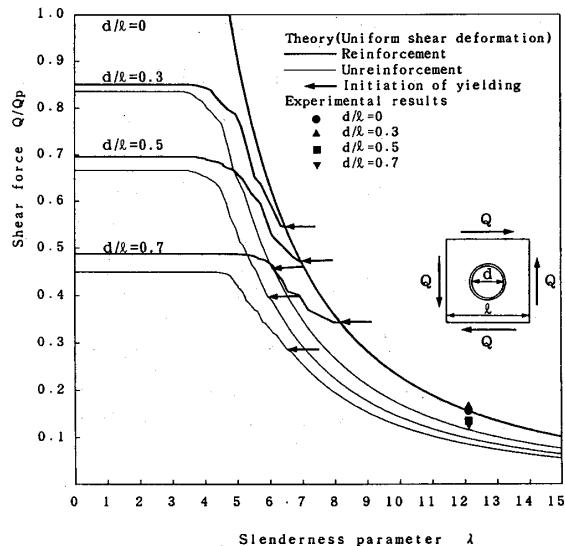


Fig. 13 Elasto-plastic buckling of square plate with reinforced circular holes

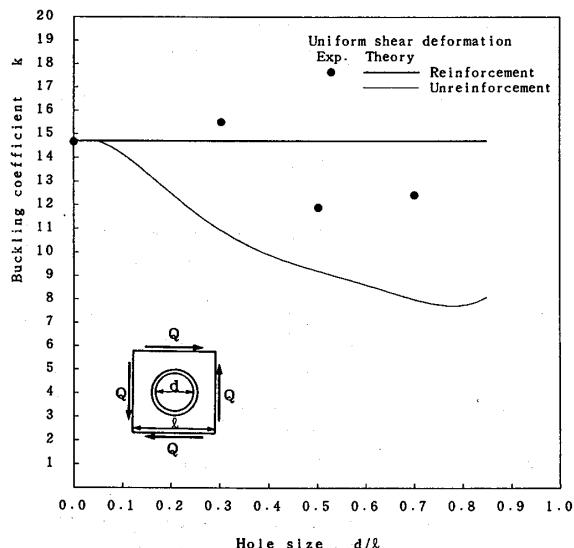


Fig. 14 Variation of elastic buckling coefficients with circular hole size with reinforcement

では解析と実験結果の関係がわかりにくいのでFig.14に弹性座屈係数と孔の大きさの関係を示す。解析による弹性座屈強度は座屈係数で表わせば本実験の場合周辺固定支持だから無孔板から有孔板まですべて  $k = 14.71$  である。これに対して実験値は無孔板と  $d/\ell = 0.3$  は解析といい近似をするが、 $d/\ell = 0.5$  と 0.7 は解析値よりそれぞれ 20, 16% 小さい。これは供試体の板厚が 1.2 mm と薄いために補強リングの溶接が非常に難しく、Fig. 5 で示したように溶接後のリング厚は解析よりかなり薄くなつたため実験の座屈強度が解析よりかなり小さくなったものと思われる。

## 6. 後座屈強度

後座屈挙動に関して、Fig.15に  $P - \delta$  曲線、Fig.16には荷重  $P$  と面内せん断変形の関係を示す  $P - r_0$  曲線を示す。 $P - \delta$  曲線、 $P - r_0$  曲線においてそれぞれの傾きが面外剛度および面内剛度を表わす。面内の平均せん断ひずみ  $r_0$  は、実験によって測定した対角線方向変位  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  から次式によって計算できる。

$$r_0 = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4}{\sqrt{2} \ell} \quad \dots \dots \dots (3)$$

ただし、 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  は図中に示す方向が正である。

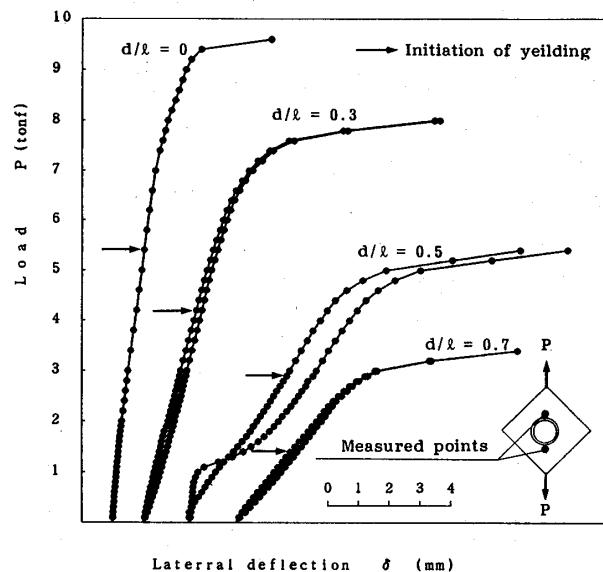


Fig. 15 Load vs lateral deflection

$P - \delta$  曲線および  $P - r_0$  曲線において、弹性座屈荷重付近では  $d/\ell = 0.5$  を除いて目立った変化はみられない。無孔板および有孔板で塑性崩壊荷重に近づくと急に剛性の低下する変化が全ての板に見られる。これは板に塑性域が拡大したためと思われる。無孔板は面外たわみの最大となる板中央部に曲げによる塑性が生じ、有孔板は面外たわみに加えて孔縁の応力集中によって塑性が生

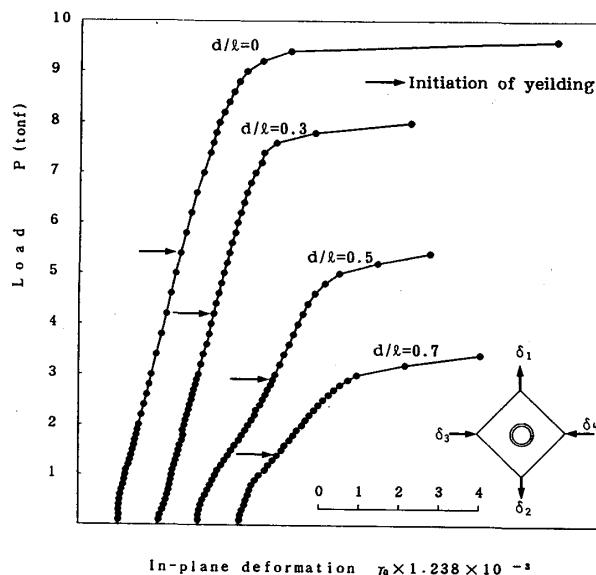


Fig. 16 Load vs average shear strain

じる。しかし、塑性が発生してもその影響はすぐに曲線へ現れず、かなり荷重が増加して曲線に塑性の影響による変化が起きる。終局強度に近づくと、塑性域貫通のため  $P - \delta$  曲線、 $P - \gamma_0$  曲線ともに急激に傾きが小さくなり塑性崩壊する。

Fig.17(a)に解析によって得られた固定支持板の初期座屈時のたわみを等高線で示す。また Fig.17(b)に実験において終局強度に達した後、除荷した状態の面外たわみを示す。終局荷重後も変形を進行させて大変形をさせたので、実験における面外たわみは解析のたわみ形状より載荷軸方向へ細長く伸びた状態になっている。このため無孔板は張力場のように主たわみに沿って逆のたわみが生じ、座屈波の数が解析結果より多い。実験中の観察によれば初期座屈荷重付近では解析結果と同じような座屈波数であったがその後崩壊荷重に近付くにつれて座屈波数の増加がみられた。したがってこれらの違いは大変形によるものと考えられる。

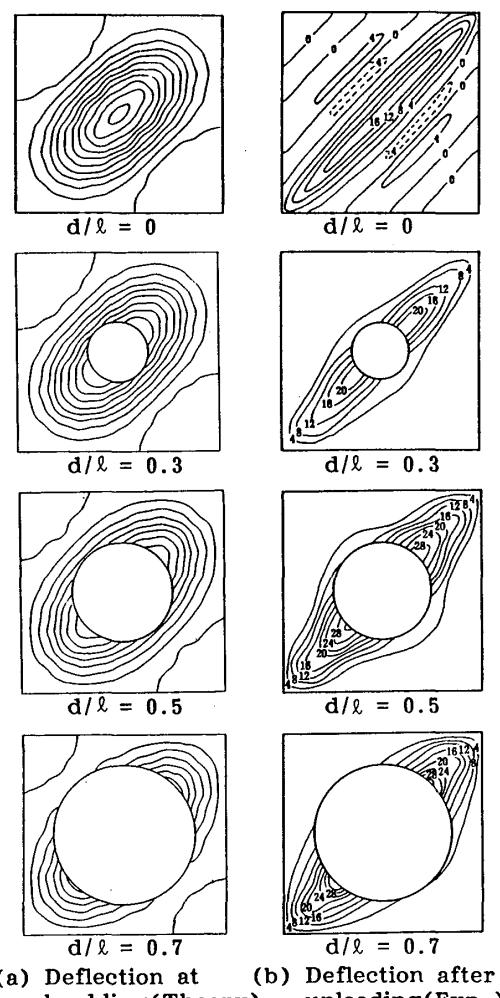


Fig. 17 Deflection (mm)

Table 3 および Fig.18 に孔の大きさと終局強度および初期座屈強度との関係を示す。実験による終局強度は、Fig.15、Fig.16 における最後の荷重とした。これらの結果、無孔板は解析の塑性崩壊強度に対して 11% 小さい。有孔板は  $d/\ell = 0.3, 0.5, 0.7$  に対して解析値よりそれぞれ 13, 28, 36% 小さい。これは初期座屈後も增加

Table 3 Ultimate strength and Post-buckling strength

Hole size $d/\ell$	Ultimate strength				Post-buckling strength				
	Experiment		Theory		$\frac{P_{ue}}{P_{ut}}$	$\frac{P_{ue}}{P_{ct}}$	$\frac{P_{ut}}{P_{ct}}$	$\frac{P_{ue}}{P_{ce}}$	$\frac{P_{ue}}{P_{ueo}}$
	$P_{ue}$ (tonf)	$\frac{Q}{Q_p}$	$P_{ut}$ (tonf)	$\frac{Q}{Q_p}$					
0.0	9.6	0.888	10.813	1.00	0.888	5.63	6.34	5.70	1.00
0.3	8.0	0.740	9.202	0.851	0.869	4.69	5.40	4.45	0.83
0.5	5.4	0.499	7.526	0.696	0.718	3.17	4.41	3.94	0.56
0.7	3.4	0.314	5.277	0.488	0.644	1.99	3.10	2.36	0.35

した面外たわみによる曲げの応力が面内応力に加わり、塑性崩壊強度が低下したためと思われる。無孔板に対する有孔板の終局強度の比は、 $d/\ell = 0.3, 0.5, 0.7$  に対してそれぞれ 17%, 44%, 65% 低下しており、孔が大きくなると急激に終局強度が低下する。この低下の割合は解析の塑性崩壊強度の低下よりわずかに大きい。有孔板の補強厚は孔による弾性座屈強度の低下を補うようにしたので弾性座屈に対しては有効であったが、終局強度に対してはほとんど効果がない。実験による初期座屈強度に対する終局強度の比をみると、無孔板が 5.7 倍であるのに対して  $d/\ell = 0.3, 0.5, 0.7$  の有孔板においてそれぞれ 4.5, 3.9, 2.4 倍であり、孔が大きくなるほど後座屈強度は減少する。しかし、この値は本実験の幅厚比  $\ell/t = 333$  に対するもので、他の板にそのまま適用することはできない。

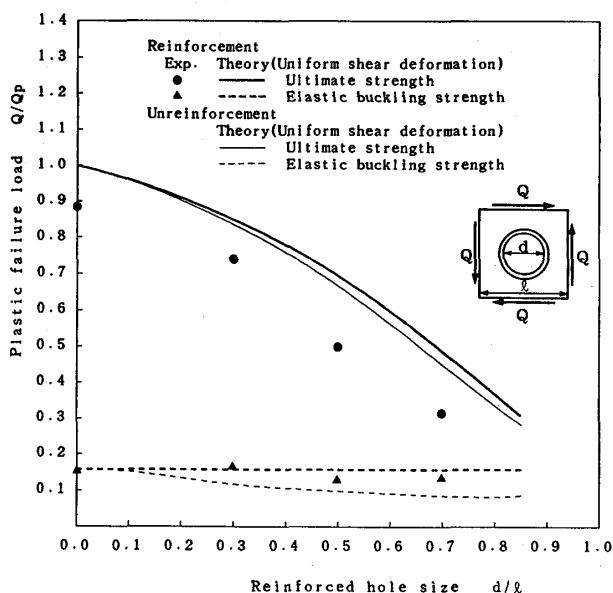


Fig. 18 Elastic buckling strength and ultimate strength

## 7. あとがき

中央に無孔板の座屈強度になるようにリング補強された円孔を有する固定正方形鋼板が一様せん断変形を受けるときの弾性座屈実験を行い Rayleigh-Ritz 法による座屈解析結果と比較した。幅厚比  $\ell/t = 333$  の有孔鋼板の実験結果に対して次のようなことが明らかになった。

- (1) 実験における板周辺の弾性応力分布は載荷フレームの隅角部付近を除いて解析結果とよく近似する。実験における孔縁の応力はリング補強の溶接によって生じた初期たわみの影響を受けてばらつきがみられたが、補強厚が薄かったため全体的に解析結果より大きい傾向を示す。
- (2) 初期座屈強度は無孔板と  $d/\ell = 0.3$  において実

験結果と解析結果が非常によい近似をする。 $d/\ell = 0.5$  と  $0.7$  の有孔板では溶接による補強リング厚が薄かったため実験による座屈強度が解析よりかなり小さくなつた。

- (3) リング補強は有孔板の応力集中と弾性座屈強度の低下防止に対して非常に効果がある。
- (4) 幅厚比  $\ell/t = 333$  の本実験における終局強度は初期座屈強度の 5.7 ~ 2.4 倍であるが、座屈後のたわみの影響によって解析の塑性崩壊強度より 11 ~ 36 % 小さく、孔が大きいほど低下が著しい。
- (5) 実験結果のばらつきを考慮すれば本解析結果はリング補強された有孔板の弾性座屈解析としてほぼ妥当であるが、さらにはばらつきを少なくした実験による検討が必要と思われる。

## 【参考文献】

- (1) Grosskurth, Jr, J.F., White, R.N. and Gallagher, R.H. : Shear buckling of square perforated plates, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.102, No.EM6, pp.1025-1040, Dec., 1976.
- (2) Rockey, K.C. : The buckling and post-buckling behaviour of shear panels which have a central circular cutout, International Conference on Thin-Walled Structures, Institution of Structural Engineers, University of Strathclyde, pp.658-672, 1979.
- (3) 日本造船学会船体構造委員会：開孔板の座屈と補強効果について、日本造船学会誌、No.605、pp.550 - 560、1979.
- (4) 上野谷 実、大村 裕：一様せん断変形を受ける円孔を有する正方形板の弾塑性座屈強度、土木学会論文集、第386号／1-8、1987.