

## ロボット・マニピュレータの運動に関する 基礎的検討

小林正明\* 清水 光\*\* 菅沼春幸\*

### Fundamental Studies on Robot Manipulator Motion

Masaaki KOBAYASHI, Hikaru SHIMIZU  
and Haruyuki SUGANUMA

#### ABSTRACT

This paper studies some basic problems of the five link manipulator motion. At first, by using A matrix we compute the position and the configuration of manipulator. Secondly, the computation method of joint variables from the position of end effector is shown by the flow chart. The tracking accuracy for motion trajectory is also discussed with respect to the acceleration of manipulator. Finally, the effective inertias, the coupling inertias and the gravity loadings, which are required for the trajectory control of manipulator, are computed based on the manipulator dynamics equation.

キーワード：5リンクマニピュレータ，軌道制御，動特性方程式

#### 1. まえがき

ロボットは、1920年カレル・チャペックの発表した諷刺劇「ロッサム万能ロボット会社R.U.R.」で初めて登場した。これは、チェコ語で奴隷労働を意味するrobotaから創られた言葉で、これよりロボットという言葉が、使われ初めた。

ロボットの明確な定義はないが、本報告ではロボットの定義を「ロボットは感覚や知能を用いて作業ができ、人間や動物に似た外見や機能をもつ機械である。」<sup>(1)</sup>として話を進めて行く。

近年、産業の発展や生活水準の向上により、ロボット・マニピュレータが、色々な分野で利用されるようになってきた。これらのマニピュレータは、一般的に回転関節によって結びついた一連のリンクから成っていると考えることができ、また、マニピュレータの手先の位置・姿勢は、並進と回転を表す同次変換を用いることにより得

ることができる。

本報告では、まず、マニピュレータの手先の位置・姿勢を並進と回転を同次に表す同次変換行列を用いた運動学方程式より求めた。次に、手先の位置・姿勢より各関節変数を求める逆変換問題は、一般的にはかなり面倒な問題であるが、ここでは、回転関節を持つ5リンク・マニピュレータについて考察した。また、マニピュレータの動作軌道の追従性や移動時間、各関節変数の変動特性などについて比較し検討した。最後に、マニピュレータを制御するのに必要となるリンクの有効慣性、相互慣性、重力負荷について求めた。

#### 2. 運動学方程式

マニピュレータには、関節の種類や数によって色々なタイプに分かれるが、ここでは、回転関節を持つマニピュレータについて考察する。

\* 電子・電気工学科

\*\* 情報処理工学科

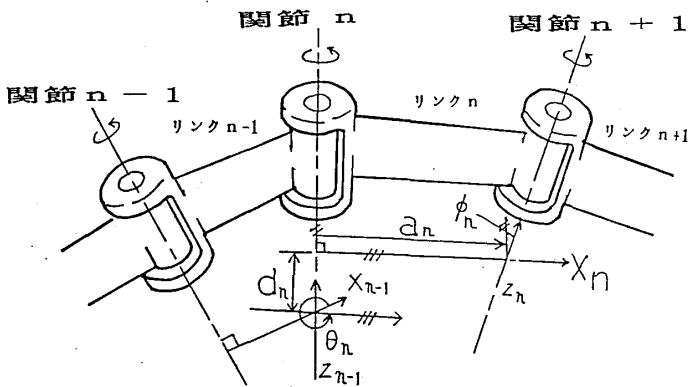


Fig.1 Link Parameters  $\theta, d, a$  and  $\phi$

マニピュレータの手先の位置・姿勢を、各リンクに1つずつ固定された座標系間の相対的な位置・姿勢を表す同次変換行列を用いて求めた。Fig.1よりn-1リンクから見たnリンクを表す同次変換行列 $A_n$ は次のようになる。

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \cos \alpha_n & \sin \theta_n \sin \alpha_n & a_n \cos \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \cos \alpha_n & -\cos \theta_n \sin \alpha_n & a_n \sin \theta_n \\ 0 & \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

この同次変換行列を用いてFig.2に示す5リンク・マニピュレータ(三菱電機RM-501 ムーブマスターII)の手先の位置・姿勢は、手先効果器を表す同次変換行列をE、長さsをeとして、次式より求めることができる。

$$T_s = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 E \quad (2.2)$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} C_{234} C_1 C_5 - S_{234} S_5 & -C_{234} C_1 S_5 - S_{234} C_5 & -S_{234} C_1 & C_1 (C_2 + C_3 a_2 - S_{234} e) \\ C_{234} S_1 C_5 + C_1 C_5 & -C_{234} S_1 S_5 + C_1 S_5 & -S_{234} S_1 & S_1 (C_2 + C_3 a_2 - S_{234} e) \\ S_{234} C_5 & -S_{234} S_5 & C_{234} & S_2 a_2 + S_3 a_1 + C_{234} e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

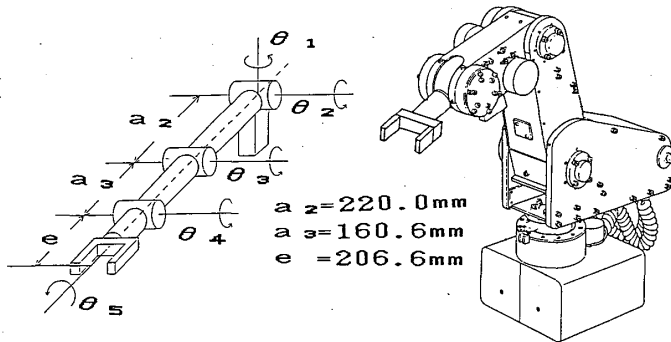


Fig.2 The Revolute Joint Five Link Manipulator (MITSUBISHI RM-501 MOVEMASTER II)

ここで、 $S_i = \sin \theta_i$ ,  $C_i = \cos \theta_i$ ,  $S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$ ,  $C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ ,  $S_{ijk} = \sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$ ,  $C_{ijk} = \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$ とする。

### 3. 各関節変数の計算

本章は、マニピュレータの手先の位置・姿勢より各関節変数を求める方法について述べる。

同次変換行列を用いて各関節変数を求めるには、手先の位置・姿勢 $T_s$ に左からAの逆行列を順次乗じることによって得られる方程式より求めることができる。しかし、この方法を用いると各関節の動作角度と正弦や余弦の周期の関係より一意的な解を得ることが困難である。そこで、手先の位置・姿勢を入力とし、各関節変数を出力とした時の入力容易さを考え、次に示すような方法により各関節変数を求めた。

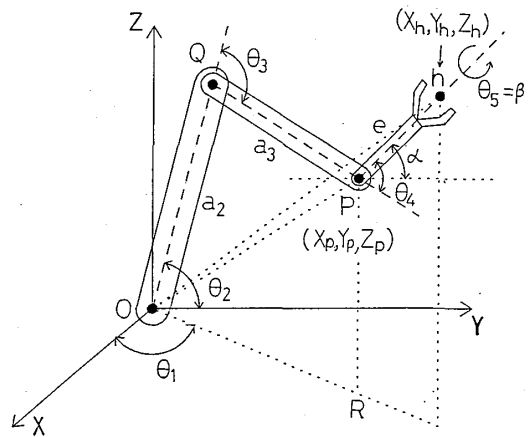


Fig.3 Coordinates and Joint Variables of Five Link Manipulator

まず、Fig.3に示すように手先の位置を $(X_h, Y_h, Z_h)$ 、姿勢を $(\alpha, \beta)$ として、手先の位置より $\theta_1$ を求め、次に、求めた $\theta_1$ より関節5の位置 $(X_p, Y_p, Z_p)$ を求め、 $\triangle OQP$ の各辺の長さより $\theta_3$ を求め、次に、 $\triangle OPR$ と $\triangle OQP$ より $\theta_2$ を求め、 $\theta_4$ は、 $\theta_3$ と $\theta_2$ 、そして水平面に対する手先の角度 $\alpha$ より求めることができる。最後に、 $\theta_5$ は手先の回転角度 $\beta$ として求めることができる。この方法をFig.4の流れ図に示した。この流れ図の「不定」は、解が一意的に求められないことを表わしている。しかし、動作軌道を考える時は、その前後の値より求めることができる。

### 4. 軌道制御

本章では、Fig.5に示されるような離散的に指定された位置・姿勢をなめらかに結ぶ軌道について考察した。Fig.5の $P_2, P_4$ をそれぞれ通過して動作する場合、マニピュレータは、 $P_2, P_4$ 点で速度が零になり、動作の全工程における時間が長くなる。それに対し、Fig.5に示す破線の軌道をマニピュレータが動作する場合、速度は連続的に変化する。

この軌道を考える上でマニピュレータが静止状態から

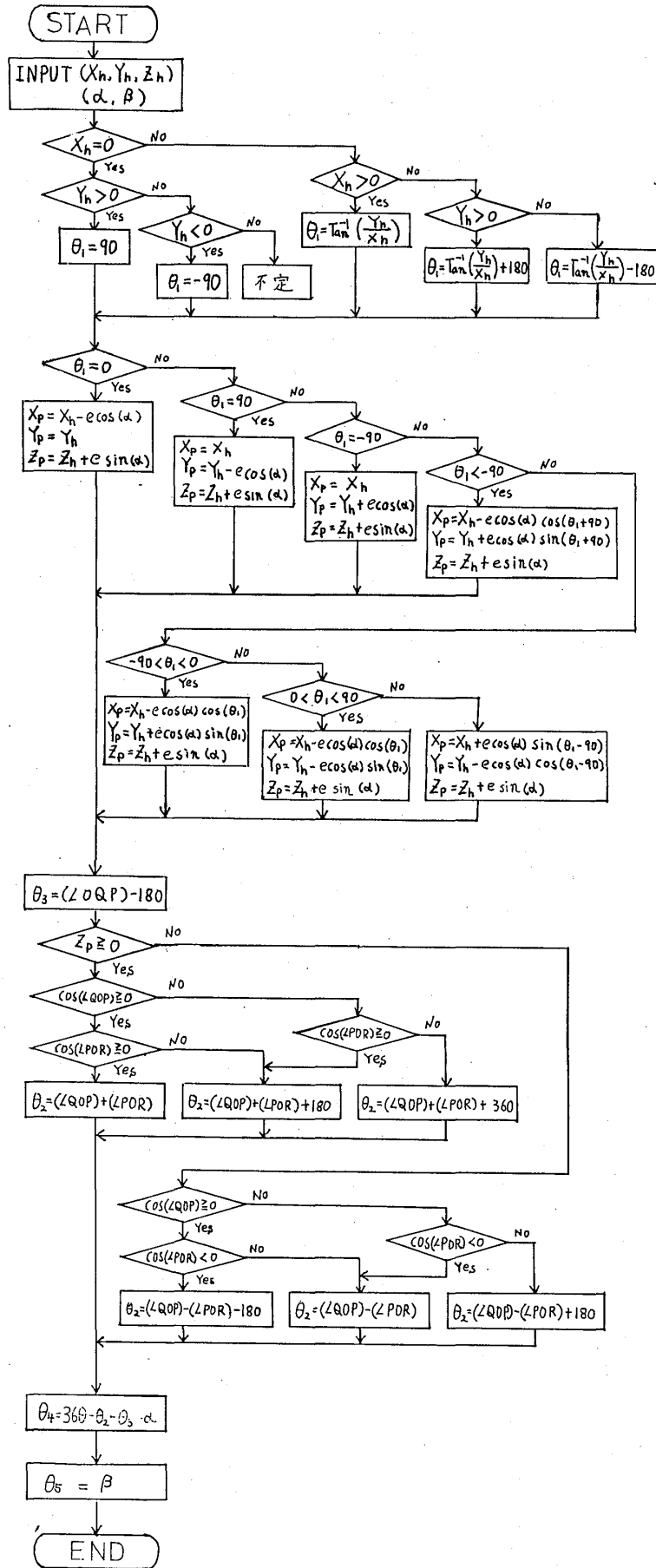


Fig.4 Flow Diagram Computing The Joint Variables from The Position and The Configuration of Manipulator

最大速度に達するまでの時間を  $T_{acc}$ ,  $P_2$  から  $P_3$  までの動作時間を  $T$  とすると図 6 より, 一般化変数  $q$  の位置, 速度は次式

$$q = \left( \Delta P_3 \frac{T_{acc}}{T} + \Delta P_2 \right) (2-h) h^2 - 2 \Delta P_2 h + P_2 + \Delta P_2 \quad (4.1)$$

$$\dot{q} = \left( \Delta P_3 \frac{T_{acc}}{T} + \Delta P_2 \right) (1.5-h) 2h^2 - \Delta P_2 \frac{1}{T_{acc}} \quad (4.2)$$

より求めることができる。ただし

$$\Delta P_3 = P_3 - P_2 \quad (4.3)$$

$$\Delta P_2 = P'_2 - P_2 \quad (4.4)$$

$$h = \frac{t + T_{acc}}{2 T_{acc}} \quad (4.5)$$

である。

Fig. 5 に示した  $P_1$  から  $P_3$  までの動作軌道を  $T_{acc} = T/2$ ,  $T_{acc} = T/5$  について (4.1) 式より求めた。その結果を Fig. 7 に示す。この図より, 求めた軌道と  $P_2$ ,  $P_3$  点の最小接近距離は,  $P_2 P_3$  間の距離を 100 (mm) とした場合,  $T_{acc} = T/2$  は, 13.26 (mm),  $T_{acc} = T/5$  は, 5.30 (mm) となった。これらの結果より, マニピュレータの加速度の大きい方が軌道の追従性の良いことがわかる。

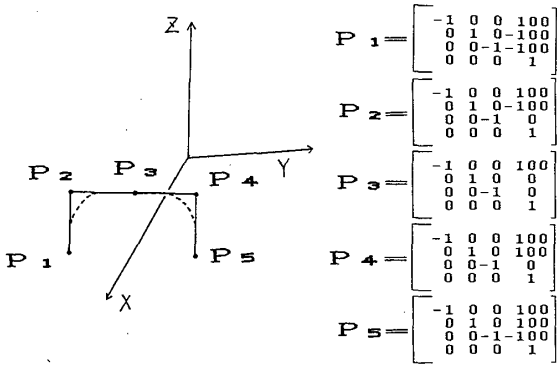


Fig. 5 Motion, Position and Configuration of End Effector

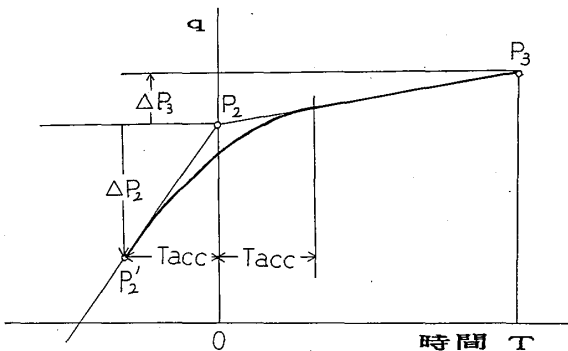


Fig. 6 Path Transition

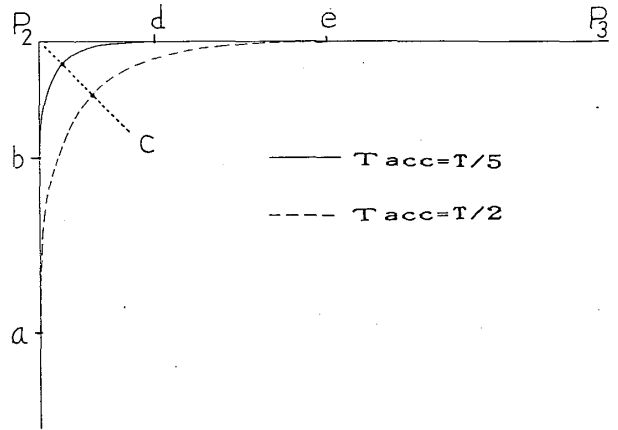


Fig. 7 Motion Trajectory

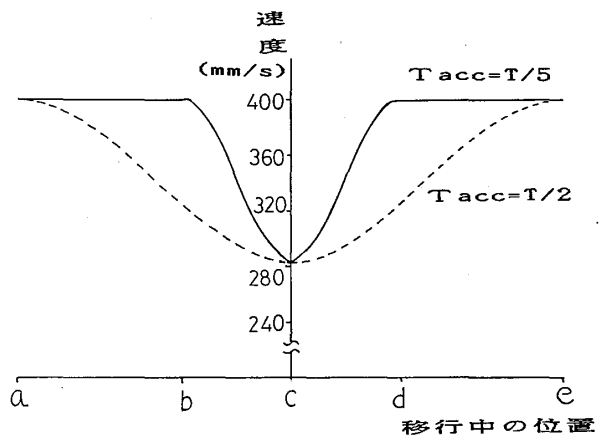


Fig. 8 Computation Results of Transition Velocity

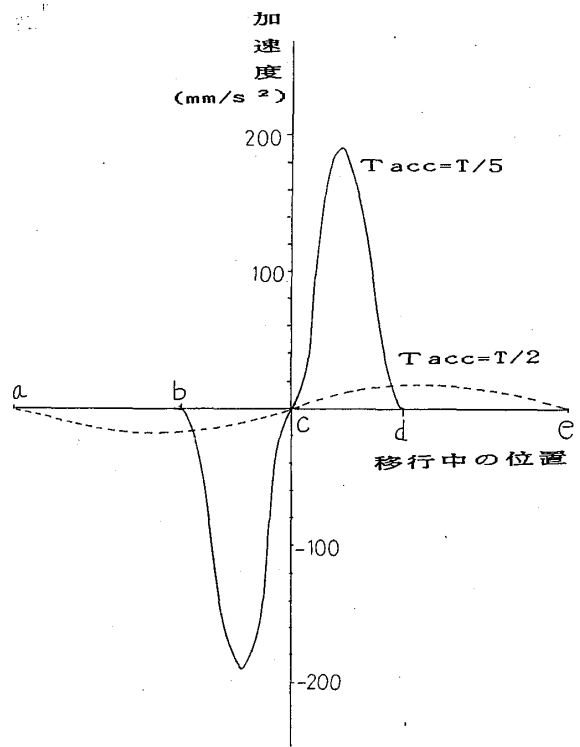


Fig. 9 Computation Results of Transition Acceleration

次に、動作軌道の移行速度と加速度について求めた結果を Fig.8 と Fig.9 に示す。Fig.8 より  $T_{acc}=T/2$ ,  $T_{acc}=T/5$  共に速度の最小値 282.84 (mm/S) で  $P_2$  点の近傍を通過している。また、Fig.9 より  $T_{acc}=T/2$  の方が加速度変化の小さいことがわかる。そして、 $P_1$  から  $P_3$  までの全移行距離は、 $T_{acc}=T/2$  で、185.58 (mm),  $T_{acc}=T/5$  では、149.22 (mm) と求まる。マニピュレータは、 $P_1$  点で静止状態から動作するので全移行時間は、 $T_{acc}=T/2$  で、0.63 (sec.),  $T_{acc}=T/5$  では、0.55 (sec.) となる。しかし、マニピュレータが  $P_2$  点で速度が零となる軌道を通る場合、 $P_1$  から  $P_3$  までの移行時間は、 $T_{acc}=T/2$  で、0.88 (sec.),  $T_{acc}=T/5$  では、0.65 (sec.) となり、いずれも Fig.7 に示した軌道に移行した方が、動作時間が短いことが確かめられた。最後に、求めた動作軌道の位置・姿勢より、第3章で述べた方法により動作軌道移行中の各関節変数を求めた。(Fig.10~Fig.13) これらの図より、 $T_{acc}=T/2$  の場合と  $T_{acc}=T/5$  の場合とで関節角度の差は小さいことがわかった。ただし、加速度のより小さい  $T_{acc}=T/2$  の場合の方が、関節角度の変化はより滑らかである。

## 5. 動特性方程式

ここでは、マニピュレータを制御するのに必要な動力学についてラグランジュの運動方程式を用いて考察した。

ラグランジアン  $L$  は、システムの運動エネルギー  $K$  と位置エネルギー  $P$  の差として

$$L = K - P \quad (5.1)$$

で定義される。それは、運動及び位置エネルギーを表した座標より次の様に与えられる。

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (5.2)$$

ここで、 $q_i$  は運動及び位置エネルギーを表わした座標、 $\dot{q}_i$  は速度、 $F_i$  は対応する力又はトルクである。

この方程式を  $n$  関節マニピュレータに適用すること

$$F_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + I_{ai} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \quad (5.3)$$

を得る。ただし

$$D_{ij} = \sum_{P=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left( \frac{\partial T_P}{\partial \dot{q}_j} J_P \frac{\partial T_P^T}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (5.4)$$

$$D_{ijk} = \sum_{P=\max(i,j,k)}^n \text{Trace} \left( \frac{\partial^2 T_P}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} J_P \frac{\partial T_P^T}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (5.5)$$

$$D_i = \sum_{P=i}^n -m_P g^T \frac{\partial T_P}{\partial \dot{q}_i} P_{r_P} \quad (5.6)$$

ここで、Trace はトレース演算子、 $J_P$  はリンク  $P$  の慣性

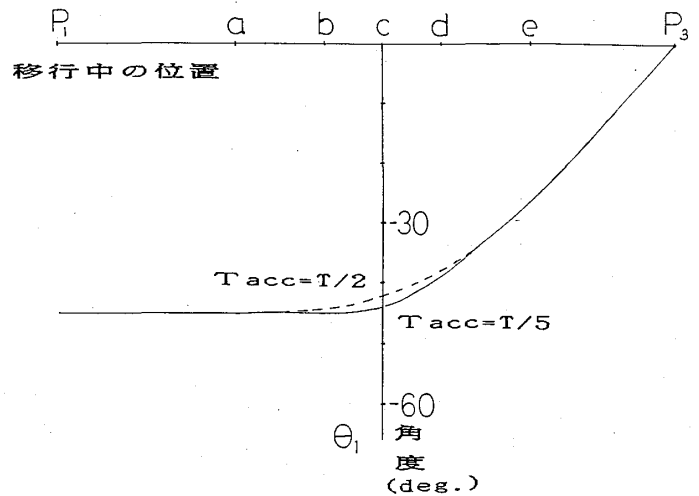


Fig.10 Computation Results of  $\theta_1$

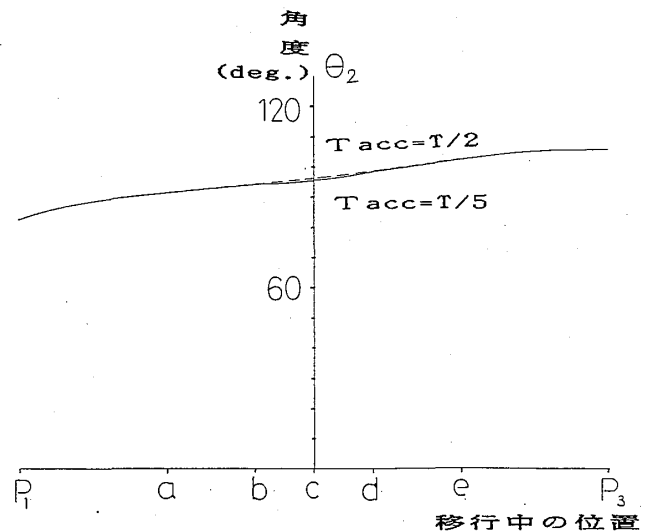
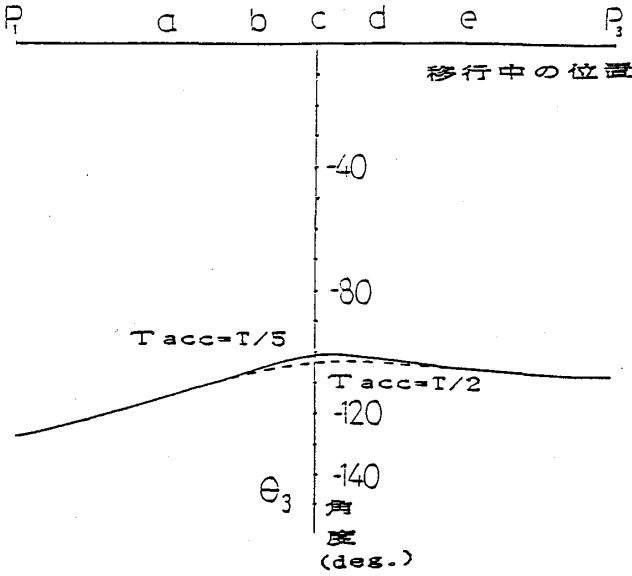
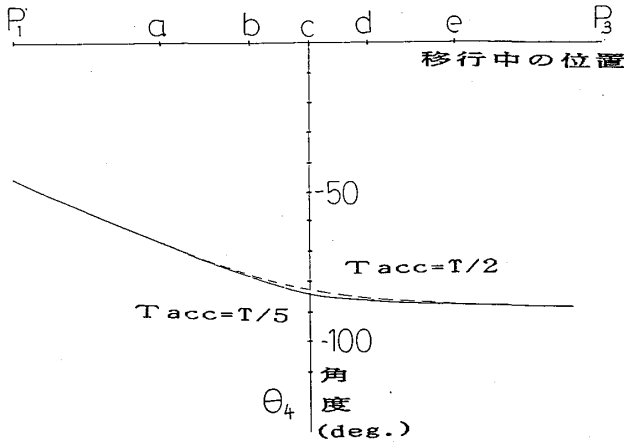


Fig.11 Computation Results of  $\theta_2$

行列、 $m_p$  はリンク  $P$  の質量、 $g$  は重力加速度ベクトル、 $P_{r_P}$  は  $P$  番目の座標システムに関してリンク  $P$  の質量中心を表すベクトルである。 $D_{ii}$  は関節  $i$  の有効慣性、 $D_{ij}$  は関節  $i$  と  $j$  の間の相互慣性、 $D_{ijk}$  は関節  $j$  の速度によって関節  $i$  に生じる求心力、 $D_{ijk}$  は関節  $i$  及び  $k$  における速度によって生じるコリオリ力をそれぞれ表す。最後に  $D_i$  は関節  $i$  における重力負荷を表す。慣性と重力は、サーボの安定性と位置決め精度に影響するので特に重要である。しかし、求心力とコリオリ力は、高速で動作しているときのみ重要となるが、ここでは、高速時にこれらの力がひき起こす誤差は考慮に入れないものとする。そこで、ここでは有効慣性  $D_{ii}$ 、相互慣性  $D_{ij}$ 、重力負荷  $D_i$  を Fig.2 の回転リンク・マニピュレータについて算出した。

まず、最初にマニピュレータの有効慣性  $D_{ii}$  は

Fig.12 Computation Results of  $\theta_3$ Fig.13 Computation Results of  $\theta_4$ 

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= m_1 k_{1xx}^2 \\
 &+ m_2 \{ S_2^2 K_{2xx}^2 + C_2^2 K_{2yy}^2 + (C_2 a_2)^2 + 2\bar{X}_2 C_2^2 a_2 - 2\bar{Y}_2 C_2 S_2 a_2 \} \\
 &+ m_3 \{ S_3^2 K_{3xx}^2 + C_3^2 K_{3yy}^2 + (C_3 a_2 + C_{23} a_3)^2 + 2\bar{X}_3 (C_2 C_{23} a_2 + C_{23}^2 a_3) \\
 &- 2\bar{Y}_3 (C_2 S_{23} a_2 + C_{23} S_{23} a_3) \} \\
 &+ m_4 \{ S_{234}^2 K_{4xx}^2 + C_{234}^2 K_{4yy}^2 + (C_2 a_2 + C_{23} a_3)^2 + 2\bar{X}_4 (C_2 C_{234} a_2 \\
 &+ C_{23} C_{234} a_3) - 2\bar{Z}_4 (C_2 S_{234} a_2 + C_{23} S_{234} a_3) \} \\
 &+ m_5 \{ (S_{234} C_5)^2 K_{5xx}^2 + (S_{234} S_5)^2 K_{5yy}^2 + C_{234}^2 K_{5zz}^2 + (C_2 a_2 + C_{23} a_3)^2 \\
 &+ 2\bar{X}_5 (C_2 C_5 C_{234} a_2 + C_5 C_{23} C_{234} a_3) - 2\bar{Y}_5 (C_2 S_5 C_{234} a_2 + S_5 C_{23} C_{234} a_3) \\
 &- 2\bar{Z}_5 (C_2 S_{234} a_2 + C_{23} S_{234} a_3) \} \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{22} &= m_2 (K_{2xx}^2 + a_2^2 + 2\bar{X}_2 a_2) \\
 &+ m_3 \{ K_{3xx}^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 C_3 + 2\bar{X}_3 (C_3 a_2 + a_3) - 2\bar{Y}_3 (S_3 a_2) \} \\
 &+ m_4 \{ K_{4yy}^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 C_3 + 2\bar{X}_4 (C_3 a_2 + C_4 a_3) \\
 &+ 2\bar{Z}_4 (S_{234} a_2 + S_{2334} a_3) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ m_5 \{ S_5^2 K_{5xx}^2 + C_5^2 K_{5yy}^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 C_3 + 2\bar{X}_5 (C_{23} C_5 a_2 + C_4 C_5 a_3) \\
 &- 2\bar{Y}_5 (C_{23} S_5 a_2 + C_4 S_5 a_3) - 2\bar{Z}_5 (S_{34} a_2 + S_4 a_3) \} \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{33} &= m_3 (K_{3xx}^2 + a_2^2 + 2\bar{X}_3 a_2) \\
 &+ m_4 \{ K_{4yy}^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\bar{X}_4 C_4 a_3 - 2\bar{Z}_4 S_4 a_3 \} \\
 &+ m_5 \{ S_5^2 K_{5xx}^2 + C_5^2 K_{5yy}^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\bar{X}_5 C_4 C_5 a_3 - 2\bar{Y}_5 C_4 S_5 a_3 \\
 &- 2\bar{Z}_5 S_4 a_3 \} \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

$$D_{44} = m_4 K_{4yy}^2 + m_5 (S_5^2 K_{5xx}^2 + C_5^2 K_{5yy}^2) \quad (5.10)$$

$$D_{55} = m_5 K_{5xx}^2 \quad (5.11)$$

と求まる。

次に、相互慣性について述べる。今、リンク3の先端に質量が集中しているため最初の3関節間に慣性の相互干渉がある。ここでは、リンクの質量分布の影響を無視し、さらに全ての質量がリンク3の先端に集中しているものとする。以上よりマニピュレータの相互慣性 $D_{ij}$ は

$$D_{12} = 0 \quad (5.12)$$

$$D_{13} = 0 \quad (5.13)$$

$$D_{23} = (m_1 + m_2 + m_3) (C_3 a_2 a_3 + a_3^2) \quad (5.14)$$

と求まる。

最後に、重力負荷について述べる。マニピュレータが垂直に立っていれば重力ベクトルは、 $g = [0 \ 0 \ -g \ 0]$ である。これより重力負荷 $D_i$ は

$$\begin{aligned}
 D_2 &= g \{ m_2 (C_2 \bar{X}_2 - S_2 \bar{Y}_2) + m_3 (C_{23} \bar{X}_3 - S_{23} \bar{Y}_3) + m_4 (C_{234} \bar{X}_4 - S_{234} \bar{Z}_4) \\
 &+ m_5 (C_{234} C_5 \bar{X}_5 - C_{234} S_5 \bar{Y}_5 - S_{234} \bar{Z}_5) + C_2 a_2 (m_2 + m_3 + m_4 + m_5) \\
 &+ C_{23} a_3 (m_3 + m_4 + m_5) \} \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_3 &= g \{ m_3 (C_{23} \bar{X}_3 - S_{23} \bar{Y}_3) + m_4 (C_{234} \bar{X}_4 - S_{234} \bar{Z}_4) + m_5 (C_{234} C_5 \bar{X}_5 \\
 &- C_{234} S_5 \bar{Y}_5 - S_{234} \bar{Z}_5) + (C_2 C_3 a_3 - S_2 C_3 a_3) (m_3 + m_4 + m_5) \} \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_4 &= g \{ m_4 (C_{234} \bar{X}_4 - S_{234} \bar{Z}_4) + m_5 (C_{234} C_5 \bar{X}_5 - C_{234} S_5 \bar{Y}_5 - S_{234} \bar{Z}_5) \} \\
 &\quad (5.17)
 \end{aligned}$$

$$D_5 = -g \{ m_5 (S_{234} S_5 \bar{X}_5 + S_{234} C_5 \bar{Y}_5) \} \quad (5.18)$$

と求まる。なお、関節1は重力負荷に関係しない。ここで、 $a_i$ はリンク $i$ の長さ、 $K_{ixx}$ 、 $K_{iyy}$ 、 $K_{izz}$ はリンク $i$ の慣性、 $m_i$ はリンク $i$ の質量、 $\bar{X}_i$ 、 $\bar{Y}_i$ 、 $\bar{Z}_i$ はリンク $i$ の一次モーメントをそれぞれ示している。

以上より回転5リンク・マニピュレータの各補償を求めることが出来た。これらの計算は、マニピュレータの制御精度を向上させる場合に大変重要となる。

## 6. むすび

マニピュレータ動作の基礎的な検討として、手先効果器を含めた手先の位置・姿勢を同次変換行列を用いて求めた。また、手先の位置・姿勢より各関節変数を求める方法について考察した。次に、マニピュレータの動作軌道の追従性は、計算結果より加速度に依存していることが確かめられた。また、軌道の移行時間は、 $P_2$ 点で速度が零となる軌道よりも、第4章で求めた軌道の方が短時間で $P_1$ から $P_2$ 点へ移行するのがわかった。そして、回転関節を持つ5リンク・マニピュレータについて、リンクの有効慣性、相互慣性、重力負荷を求めた。今後、リンクの質量やリンクの慣性などの数値を代入し、具体的に補償値を算出して行く必要があると思われる。

最後に、本研究を進めるにあたり、計算を手伝っていただいた同研究室の藤川誠治君と山口信哉君に感謝の意を表します。

## 参考文献

- (1) 中野栄一：ロボット工学入門，オーム社，P.15 (1983)
- (2) R.P.Paul：Robot Manipulators, MIT Press (1981)  
(吉川恒夫訳：ロボットマニピュレータ，コロナ社 (1984))