

円孔を有する固定正方形板の弾塑性せん断座屈

上野谷 実*・中村 雅樹*

Elasto-plastic Shear Buckling of Clamped Square Plates with Circular Holes

Minoru UENOYA and Masaki NAKAMURA

ABSTRACT

Elasto-plastic shear buckling strength and post-buckling behavior of square plates with circular holes are investigated experimentally. The plates are subjected to uniform in-plane shearing deformations and clamped along plate edges. The circular holes are centrally located. Ratios of the hole diameter to the plate length, d/l , are 0.3, 0.5 and 0.7.

Elastic stresses along the plate edges and the hole edges show reasonable agreement with the results from finite element analysis except corners of the plates. For elasto-plastic buckling load, comparison of test with analysis shows good agreement. Experimental ultimate loads of the plates with the ratio $d/l = 0, 0.3, 0.5$ and 0.7 are 1.64, 1.62, 1.79 and 1.87 times of the elasto-plastic buckling load, respectively.

Key words: shear buckling, perforated plate, elasto-plastic, experiment

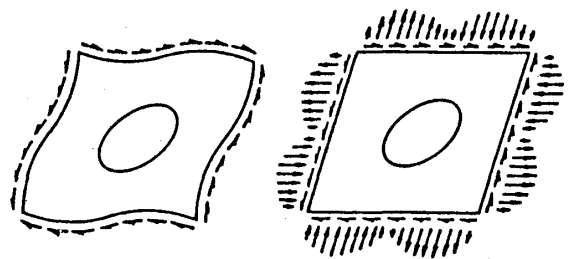
キーワード：せん断座屈，有孔板，弾塑性，実験

1. まえがき

土木，建築，船舶，航空機などの構造物において，鋼板は重要な構造部材である。この構造部材の板にパイプ貫通孔，配線孔，通行穴，強度の低下が許されれば重量軽減あるいはコスト低減のための穴など，開孔を設けた有孔板が存在する。土木構造物では鋼箱桁のダイヤフラムやプレートガーダーの横桁ウェブなど特に鋼橋によく見られ，せん断や曲げ荷重を受ける場合が多い。有孔板は孔のない板と比較すると力学的強度の低下が著しい。このため設計にはその応力状態，耐荷力や力学的挙動を正確に把握する必要がある。

有孔板のせん断座屈強度に関する解析を扱ったものにはKroll¹⁾，Rockyら²⁾，Grosskruthら³⁾などの報告があり，実験によるものはGrosskruth³⁾，森・的場⁴⁾，吉識ら⁵⁾などによる報告がある。しかし，これらの報告は弾性領域と塑性領域において行われているだけである。これらの中間に位置する弾塑性領域における座屈強度を扱った報告は数少なく，UenoYA・Redwood^{6,7)}の報告だけである。

有孔板は荷重が作用すると孔のために応力集中を生じ，



(a) uniform shear stress (b) uniform shear deformation

Fig.1 Perforated plate subjected to shear

面外剛性が減少し座屈強度の低下も著しい。板の座屈強度は主に荷重条件と周辺の境界条件によって決まるが，有孔板はこれらに加えて孔の形や大きさとその位置および孔縁補強の有無や度合などが影響する。

さらに板周辺の境界条件について限定して考えると面外変形ならびに面内変形に対する境界条件が座屈強度の

2.2 ひずみと変位の測定方法

供試体の板が座屈するまでの面外および面内への曲げ挙動や板の応力分布及び降伏状態を調べるため、Fig.3に示す位置に電気抵抗線の三軸ひずみゲージおよび単軸ひずみゲージを接着した。

板の変形に伴う変位の測定は、板の面外方向変位（以下「面外たわみ」と呼ぶ）を座屈時に板のたわみが最大になると予想される位置として、無孔板は板の中央に、また有孔板は载荷軸上の孔縁をダイヤルゲージによって測定した。また、板の面内方向変位（以下「面内変位」と呼ぶ）については対角線上の4隅の点の相対変位量をダイヤルゲージによって測定した。ダイヤルゲージは全て最小目盛が $1/100\text{mm}$ である。

2.3 载荷方法

荷重载荷装置はマルイ制作所製の許容圧縮荷重100 tonの電子式万能圧縮試験機を使用した。供試体への荷重载荷にあたっては偏心载荷とならないように载荷フレームを設置する。ならし荷重として、有孔板は最も早く降伏すると予想される孔縁のひずみが降伏ひずみの約 $1/2$ 、無孔板では予想座屈荷重の $1/3 \sim 1/4$ を载荷し、応力の発生状態を見ながら载荷フレームの位置調整を行った後に本载荷による実験を行った。

荷重増分は、荷重-ひずみ曲線（ $P-\epsilon$ 曲線）および面内、面外変位曲線などをグラフにプロットしながら行った。これらの曲線がほぼ荷重に比例して増加している場合は一定の増分で载荷していき、曲線の傾きが小さくなり始めるか、あるいは表裏の荷重-ひずみ曲線の一方

がもう一方の曲線と異なる増加を始めた場合には小さく取った。また、 $d/l=0.7$ のように孔の大きい場合には座屈荷重が低いため、さらに小さく取った。

弾塑性領域においては、荷重を一定に保っても面外方向や面内方向の変形が進行するので、これらの変形の増加が十分小さくなってからダイヤルゲージによる変位やひずみの読み取りを行った。

各荷重段階ごとの多量のひずみ測定データの処理は実験の効率化と正確性を図るために、万能デジタルひずみ測定器とスキャンボックスをパソコンによってコントロールしながら行った。そしてその測定データは各荷重段階ごとにパソコンのフロッピーディスクに収録し、プリンターで出力した。また、実験は各荷重段階ごとに出力したひずみ値から必要な値を読み取ってグラフにプロットし、供試体の変形状態を確認しながら行った。

3. 弾性応力解析

本研究では、正方形鋼板の平面弾性応力解析を有限要素法で行った。用いた要素は要素内応力一定の三角形一次要素で、Fig.4に示すような要素分割である。解析は一樣せん断変形を周辺に与え、対称性を利用して正方形板の $1/4$ について行った。応力解析を行った板の種類は正方形板の辺長 l と円孔の直径 d の比で表わすと、無孔板（ $d/l=0$ ）と有孔板の $d/l=0.3, 0.5, 0.7$ の4種類である。

解析によって得られる結果は、せん断応力 τ_{xy} 、垂直応力 σ_x, σ_y 、節点変位及び節点反力などがある。これらの解析によって得られる結果は荷重によって値が変化するため、式(1)、(2)で定義される平均せん断応力 $\bar{\tau}$ で各応力成分を除し、無次元応力として表示する。

$$Q = \frac{P}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots (1)$$

$$\bar{\tau} = \frac{Q}{A} \dots\dots\dots (2)$$

ここに P : 対角線方向の荷重
 Q : 板周辺方向の合せん断力
 A : 正方形板の断面積 (tl)

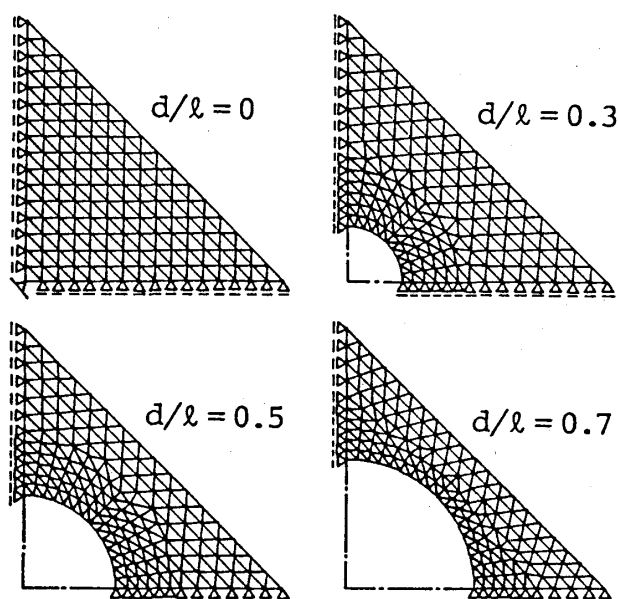


Fig.4 Finite element mesh

4. 解析および実験結果

4.1 弾性応力

実験では円孔縁を除いて板の中立面のひずみを直接測定することはできないので表面のひずみを測定する。供試体の板は必ず初期たわみを有するため荷重とともに面外の曲げが生ずる。したがって板の表面には面内応力と曲げによる応力が生ずる。実験値による面内応力は、板の表と裏の表面のひずみから計算した応力の平均をとることによって曲げによる応力を除去する。

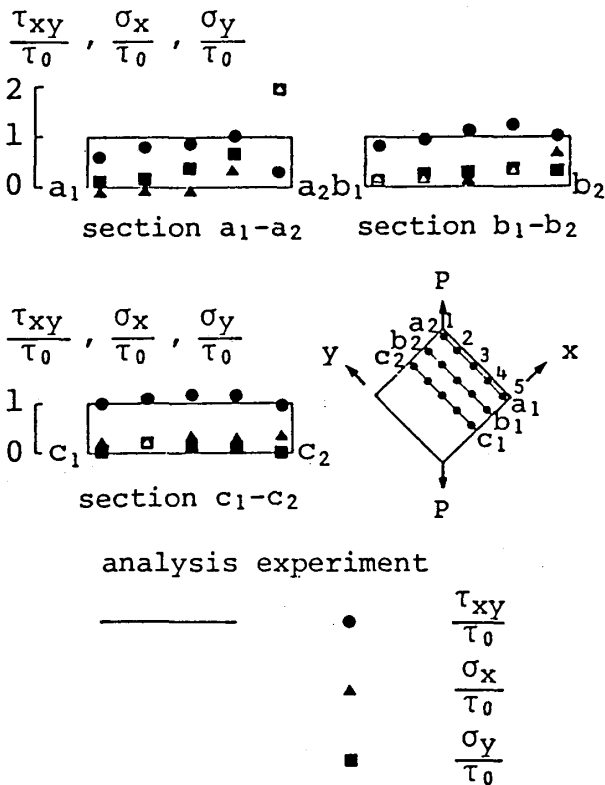


Fig.5 Stresses of unperforated plate

上記のようにして測定した面内応力をFig.5に無孔板の周辺断面 $a_1 - a_2$, 中間断面 $b_1 - b_2$, 中央断面 $c_1 - c_2$ について, Fig.6 には円孔板の周辺断面 $a_1 - a_2$ について示している。ただし, 周辺断面の解析値および実験値は板周辺から $20\text{mm}(=0.05\ell)$ の位置である。

Fig.5 に示した無孔板の場合, 孔の影響が全く無ので理論上の面内応力状態は板内のいたるところで, せん断応力が $\tau_{xy}/\tau_0 = 1$, 垂直応力は $\sigma_x/\tau_0 = \sigma_y/\tau_0 = 0$ の純せん断応力状態である。これに対して実験値は, 断面 $b_1 - b_2$ の測点2及び断面 $c_1 - c_2$ の測点3においてせん断応力 τ_{xy}/τ_0 の値が解析値より少し大きくなっている。これらの測点では面外への曲げの影響を最も受け易いため, その影響が現れたものと考えられる。また断面 $a_1 - a_2$ の測点1は荷重点に最も近いため荷重の影響を受けて垂直応力 σ_x/τ_0 , σ_y/τ_0 はせん断応力のおよそ2倍もの大きな値を示し, せん断応力 τ_{xy}/τ_0 はせん断応力の $1/3$ 倍の値を示すが, 他の測点及び断面では多少の増減があるものの, 全体的には解析値に近い値を示す。

Fig.6 の円孔板の周辺における応力分布をみると, $d/\ell = 0.3, 0.5$ については測点1あるいは測点5を除くと全体的に解析値と近似した値を示す。この荷重点付近の測点1や非荷重点の測点5の垂直応力 σ_x/τ_0 及び σ_y/τ_0 の実験値が解析値と異なる値を示しているのは, 載

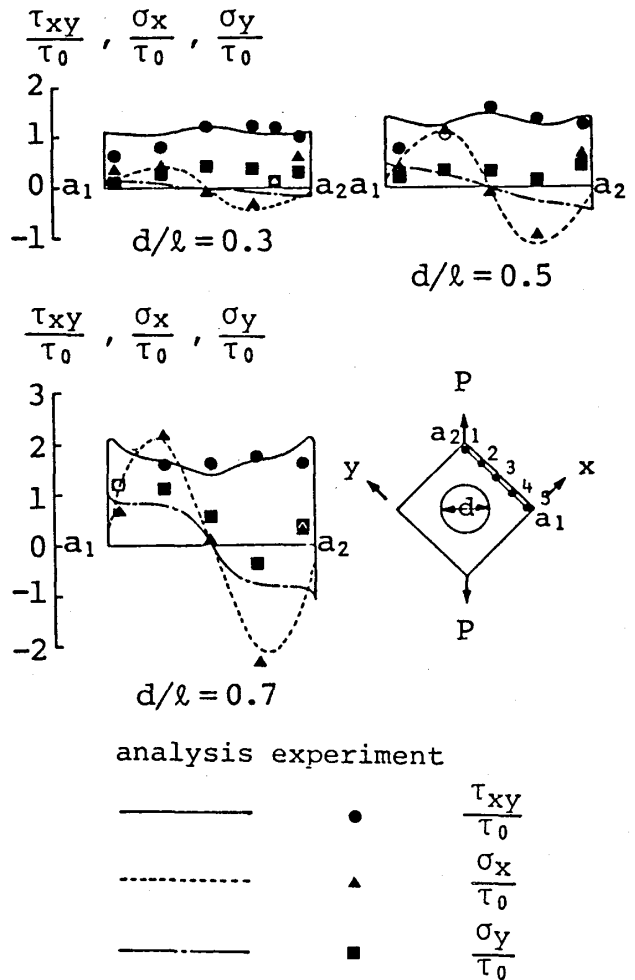


Fig.6 Stresses of perforated plate

荷フレームの隅角部をヒンジ機構にしているために, 載荷フレームの剛性が低下してヒンジ部分がわずかではあるが変形するためと考えられる。この変形に伴って付加的応力として荷重点付近では引張応力が生じ, 逆に非荷重点では圧縮応力を生ずる。また, 載荷フレームの変形によって, 実際の板のせん断変形が小さくなるためせん断応力が低下するものと考えられる。

本実験に用いた載荷フレームは荷重点および非荷重点近傍の応力の乱れを生ずるが, これは隅角部の局所的な現象であり, 板の座屈強度にはほとんど影響しないものと考えられる。

Fig.7に孔縁における接線方向の垂直応力 σ_θ/τ_0 を示す。これより, $d/\ell = 0.3$ の載荷軸では実験値が解析値より3~5%ほど大きくなっているだけで解析値に良く近似しているが, $d/\ell = 0.5, 0.7$ の載荷軸及び非載荷軸と $d/\ell = 0.3$ の非載荷軸では15~28%大きくなっている。また, 全体的に実験値が解析値より大きい

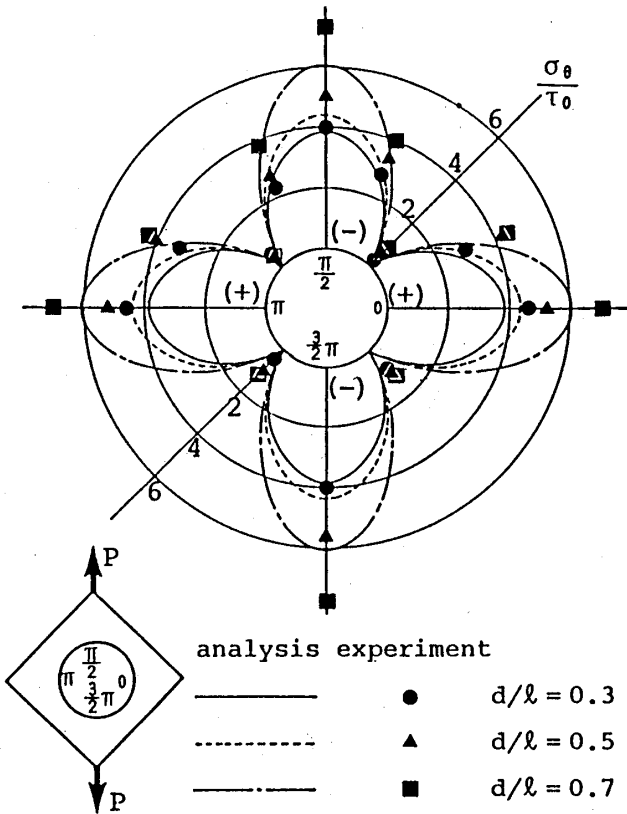


Fig. 7 Circumferential stresses at hole edge

孔の大きい $d/l=0.7$ より孔の小さい $d/l=0.3, 0.5$ の方が良く近似し、孔が大きくなるほど孔縁の応力集中は増加する傾向を示している。この傾向は、荷重フレームが完全な剛体でないため、変形荷重より応力集中の大きい応力荷重の挙動を示したものと思われる。したがって、荷重フレームが完全な剛体であれば変形荷重の解析値に限りなく近づくものと思われる。

4.2 座屈挙動

表1に供試体を荷重フレームに固定したあとに測定した最大初期たわみ δ_{omax} と板厚 t の比 δ_{omax}/t を示す。この表から最大初期たわみはすべて板厚の1/4以下である

Table 1 Maximum initial deflection δ_{omax} (mm)

d/l	δ_{omax}	δ_{omax}/t
0.0	0.29	0.09
0.3	0.35	0.11
0.5	0.38	0.12
0.7	0.45	0.15

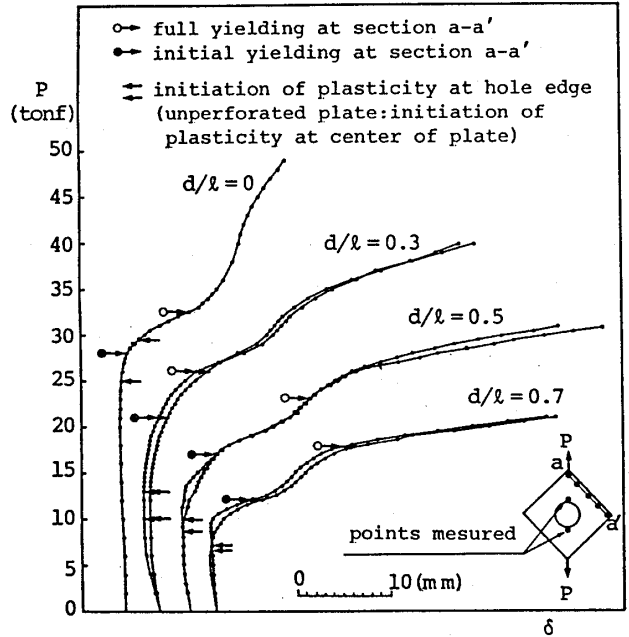


Fig. 8 Load vs lateral deflection

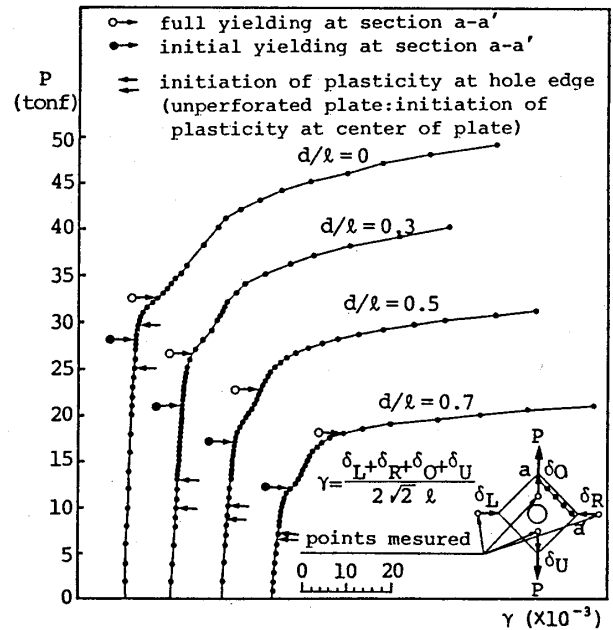


Fig. 9 Load vs in-plane deformation

ことから座屈強度への影響はほとんどないものと考えられる。また、測定した初期たわみの分布は供試体の板中央付近あるいは孔縁の周辺が最大であった。

座屈挙動を表わすものとして、Fig. 8に荷重 P と面外たわみ δ を表す $P-\delta$ 曲線を、またFig. 9に荷重 P と面内のせん断変形 γ の関係を示す $P-\gamma$ 曲線を示す。

$P-\gamma$ 曲線における面内のせん断変形 γ は実験によって測定した対角線方向の変位 $\delta_L, \delta_R, \delta_O, \delta_U$ から式

(3)によって算出したものである。

$$r = \frac{\delta_L + \delta_R + \delta_o + \delta_U}{2\sqrt{2}l} \dots\dots\dots (3)$$

これらを見ると弾性座屈³⁾に見られるような塑性域の拡がりによって生じる曲線の変化がおよそ 10 ton~40 ton で同じように現れるが、変化は面内剛度を表す P-r 曲線の方がやや遅く現われる。しかし、この曲線の変化は弾性座屈における後座屈で現れた塑性域の拡がりによって生じるものである。この変化の中に存在する変曲点は大変形によって生ずる軸力の作用によって現れるもので、弾性座屈における座屈荷重を意味する変曲点とは異なる。座屈によって生じる変形量は降伏による変形量に対してかなり小さい。これに対して弾塑性座屈は、座屈によって変形を生じる荷重と塑性域の拡がりによって変形を生じる荷重が接近しているため、座屈による変形に塑性域の拡がりによって生じる変形が加わる。その後は引張方向へ大変形による面外方向の曲げを拘束する軸力が加わり塑性域の貫通にもかかわらず一時的に全体の剛性が増加するような傾向を示す。これは、塑性域の拡がりによって生じる変形量が弾性座屈の供試体の場合と弾塑性座屈の供試体の場合とではかなり異なっていることから考えられる。それゆえに、ここに現れる変曲点は座屈によって生じるものではないので、座屈荷重に変曲点荷重をとることは妥当でない。また、無孔板の P-δ 曲線を見るとまだ耐荷力が残っているように見えるが、P-r 曲線の傾きから見れば崩壊寸前である。このことから、板の耐荷力を正確に把握するには P-δ 曲線と共に板の面内剛性の低下を明確に示す P-r 曲線の必要性が高くなると考えられる。

弾塑性座屈は座屈による変形に降伏による変形が加わるため弾性座屈のような変曲点が生じにくく、また P-δ 曲線を用いた方法では多少の測定誤差によってもかな

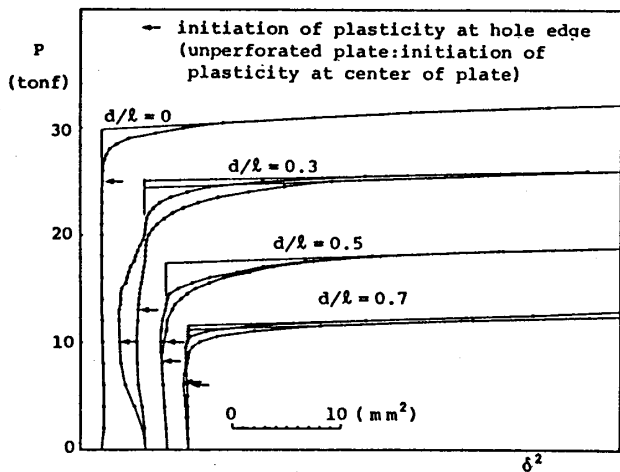


Fig.10 Load vs square of deflection

りの差を生じやすいため、座屈荷重は Fig. 10 に示す荷重 P と面外たわみ δ の 2 乗をプロットする P-δ² 曲線によって決定した。この方法は吉識⁵⁾によって、座屈後は荷重と面外たわみを 2 乗した数値に線形関係があるという理論的な裏付けがなされており「δ²法」と呼ばれているものである。すなわち、P-δ² 曲線における直線部分の延長線と荷重軸との交点をもって座屈荷重を定義する方法である。

また従来、弾塑性座屈は塑性座屈と同様に塑性域が拡がると後座屈強度はほとんど無いと考えられていたようである。しかし今回行った実験の結果では、弾塑性座屈においてもかなりの後座屈強度があるという結果が得られた。

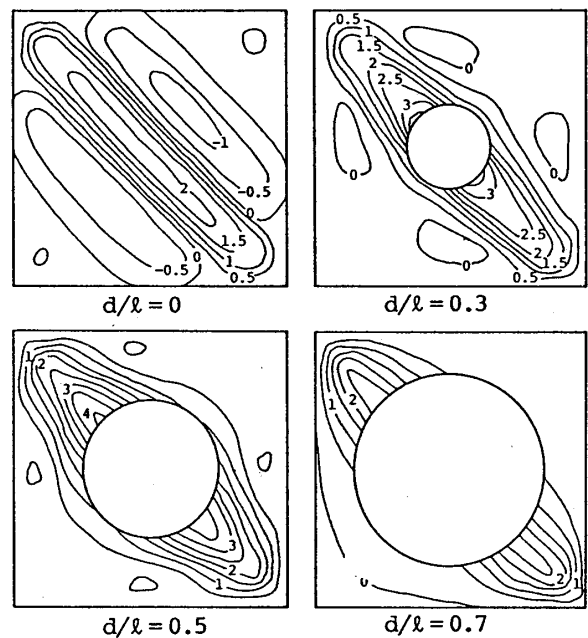


Fig.11 Deflection after unload

荷重除荷後の板のたわみを Fig. 11 にたわみの等高線図として示す。これより除荷後のたわみは載荷軸に沿った大きな帯状のたわみとなっている。d/l=0.7 を除く全ての板は主たわみに沿って逆方向のたわみが生じている。特に無孔板の逆方向のたわみは載荷点付近にまで及んでいる。d/l=0.3, 0.5 の有孔板の逆方向のたわみは、孔が大きくなるにつれて小さくなっている。また無孔板のたわみは波状となって板全体に生じ、非載荷点方向に減衰するが、有孔板のたわみは孔が大きくなるにつれて載荷軸上に集中していく傾向がある。

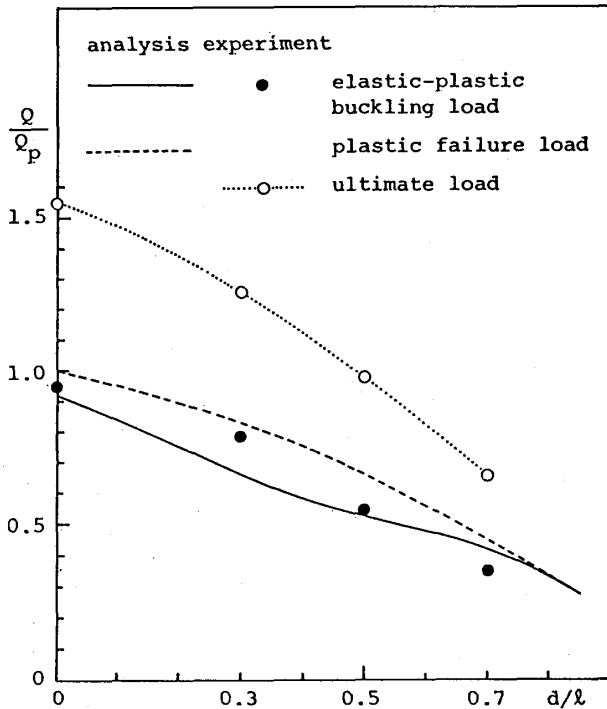


Fig.12 Hole size vs buckling and ultimate load

Table 2 Elasto-plastic buckling load

hole size d/l	0.0	0.3	0.5	0.7
analysis P_b (ton)	29.35	21.04	16.93	13.46
experiment P_{ex} (ton)	29.90	24.70	17.30	11.25
P_b/P_{bo}	1.00	0.72	0.58	0.46
P_{ex}/P_{exo}	1.00	0.83	0.58	0.38
P_{ex}/P_b	1.02	1.17	1.02	0.84
P_e/P_{bo}	1.02	0.84	0.59	0.38

4.3 座屈強度

Fig.12に孔の大きさと座屈強度及び終局強度の関係を示す。表2に弾塑性座屈強度を示し、実験によって得られた座屈強度を一樣せん断変形载荷の座屈解析と比較する。表中の解析値は、文献(10)の弾塑性座屈曲線から得た値である。無孔板の塑性崩壊せん断力 Q_{p0} はひずみ硬化を考慮しない場合、式(4)によって与えられる。以後の強度は塑性崩壊せん断力 Q_p で除した無次元量として表わす。

$$Q_p = \frac{\sigma_Y l t}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots (4)$$

- σ_Y : 降伏応力
- l : 板の辺の長さ
- t : 板の厚さ

これらの図表から弾塑性座屈強度は $d/l=0, 0.5$ の場合、実験値が解析値に対して2%ほど大きいだけで良く近似している。 $d/l=0.7$ の場合、実験値が解析値に対して16%程度小さくなっており $d/l=0.3$ の場合は17%大きい値を示す。

4.4 終局強度

実験によって得られた板の終局強度を文献(10)の塑性崩壊強度と比較し、座屈強度及び孔の大きさとの関係を検討する。

本実験における終局強度は最終荷重とする。解析における無孔板の終局強度はひずみ硬化を考慮しない塑性崩壊荷重 P_{p0} として式(5)によって与えられる。

$$P_{p0} = \sqrt{2} Q_{p0} \dots\dots\dots (5)$$

Q_{p0} : 無孔板の塑性崩壊せん断力

Table 3 Ultimate load

hole size d/l		0.0	0.3	0.5	0.7
analysis	P_p (ton)	31.59	26.44	21.01	14.18
experiment	P_{ue} (ton)	49.00	40.00	31.00	21.00
P_p/P_{p0}		1.00	0.84	0.67	0.45
P_{ue}/P_{p0}		1.00	0.82	0.63	0.43
P_{ue}/P_p		1.55	1.51	1.48	1.48
P_{ue}/P_{p0}		1.55	1.26	0.98	0.66
P_{ue}/P_{ex}		1.64	1.62	1.79	1.87
P_p/P_{ex}		1.06	1.07	1.21	1.26
P_p/P_b		1.06	1.26	1.24	1.05

* P_{p0} : plastic failure load of unperforated plate without strain hardening.

表3に塑性崩壊強度及び実験による終局強度を示し、Fig.12と表3から、かなりの後座屈強度が認められ、全ての板において解析値である塑性崩壊強度より48%~55%大きくなっている。これはひずみ硬化などによって終局強度が増加したものと考えられる。また、無孔板に対する終局強度の比を見ると、 $d/l=0.3, 0.5, 0.7$ の円孔板について各々18, 37, 57%低下し、孔の大きさにほぼ反比例して低下する。

終局強度の実験による弾塑性座屈強度に対する比をみると、 $d/l=0, 0.3, 0.5, 0.7$ について各々64, 62, 79, 87%大きく、孔が大きくなると差が増している。また、解析による塑性崩壊強度は弾塑性座屈のため座屈強度より5~26%大きいだけである。

5. まとめ

本研究では、円孔を有する正方形鋼板が面外方向、面

内方向ともに固定され、せん断荷重を受ける場合の弾塑性せん断座屈実験を行い、座屈挙動、座屈強度を既存の一樣せん断変形荷の座屈解析値と比較検討した。また、有限要素法による平面応力解析を行い、弾性応力分布について検討した結果、本実験の範囲内で次のようなことが明らかになった。

(1) 実験による板周辺の弾性応力分布と解析値は荷重フレームの隅角部付近を除いてよく近似する。孔縁の応力は荷重フレームが完全な剛体でないため解析値よりやや大きい値を示す傾向がある。

(2) 座屈荷重は局部的塑性のために座屈による変曲点が明確に現れないので、座屈荷重は $P-\delta^2$ 曲線で決定する必要がある。

(3) 弾塑性座屈強度は解析値に対して無孔板で2%、有孔板で2~17%におさまっており、全体的に良く近似する。

(4) 幅厚比 $l/t = 129$ の本実験の場合、終局強度はひずみ硬化による強度の増加がみられ、弾塑性座屈強度より62~87%大きくなる。

参考文献

- (1) W. D. Kroll: Instability in shear of simply supported square plates with reinforced holes, Research paper R.P. 2037, Journal of Research of National Bureau of Standards. Vol. 43, 1949, 11.
- (2) K. L. Rokey, R. G. Anderson and Y. K. Cheung: The behavior of square shear webs having a circular hole, Thin Walled Steel Structures, pp. 148~172, 1968.
- (3) J. F. Grosskurth, Jr., Richard N. White, and R. Gallagher: Shear buckling of square perforated plates, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 102, No. EM6, pp. 1025~1041, December, 1976.
- (4) 森 正浩・的場正明: 有孔矩形板のせん断座屈に関する実験的研究, 西部造船学会報告, 第33号, pp. 269~284, 1986, 11.
- (5) 吉識雅夫・藤田 譲・川村明宣・花井宏範: 有孔板の座屈強度について(その1), 造船学会論文集, 第122号, pp. 137~145, 1967, 11.
- (6) M. Uenoya and R. G. Redwood: Elasto-Plastic Shear Buckling of Square Plates with Circular Holes, Computers and Structures, Vol. 8, No. 2, pp. 291~300, Jan., 1978.
- (7) M. Uenoya and R. G. Redwood: Buckling of Webs with Openings, Computers and Structures, Vol. 9, No. 2, pp. 191~199, Feb., 1978.
- (8) 上野谷 実・中村雅樹・小早川好包: 円孔を有する固定正方形板の弾性せん断座屈及び後座屈強度, 福山大学紀要, 第7号, 1985, 3.
- (9) 上野谷 実・大村 裕: 円孔を有する固定正方形板の弾性せん断座屈: 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986, 3.
- (10) 上野谷 実: 一樣せん断変形を受ける円孔板の弾塑性座屈解析, 福山大学工学部紀要, 第8号, 1986, 3.