

円孔を有する固定正方形板の弾性せん断 座屈および後座屈強度

上野谷 実*・中村 雅樹*・小早川 好包**

Elastic Shear Buckling and Post Buckling Strength of Fixed Square Plate with Circular Holes

Minoru UENOYA, Masaki NAKAMURA
and Yoshikane KOBAYAKAWA

ABSTRACT

Elastic shear buckling strength and post buckling behavior of thin square plates with circular holes are investigated experimentally. The plates are subjected to uniform in-plane shearing deformations and have clamped edges and centrally located the circular holes. Ratios of the hole diameter to the plate length, d/l , are 0.3, 0.5 and 0.7.

Elastic stresses along the plate edges and the hole edges show reasonable agreement with the results from finite element analysis except corners of the plates. For elastic initial buckling load, comparison of test with analysis shows excellent agreement. Experimental ultimate loads of the plates with the ratio $d/l = 0, 0.3, 0.5$ and 0.7 are 5.60, 6.96, 6.67, and 6.45 times of the initial buckling load, respectively.

1. まえがき

板の座屈強度は板の形状、荷重条件、周辺境界の支持条件によって異なる。また、板が孔を有する場合には孔の大きさや形状によるが、その影響は前述の要因以上である。更に周辺境界の支持条件において、単純支持あるいは固定支持といった面外方向変形に対する境界条件とともに面内方向変形に対する境界条件をも考慮に入れなければならない。たとえば図1に示すように、円孔を板の中央に有する正方形板がせん断荷重を受ける場合について、周辺上の変形状態を考える。図1(a)は周辺上でせん断応力が等分布に作用し、面内方向変形を拘束しない場合の変形状態（以下「等分布せん断応力変形」と呼ぶ）であり、図1(b)は面内方向変形が剛性の非常に大きなもので拘束され、周辺が直線を保つような変形状態（以下「一様せん断変形」と呼ぶ）である。

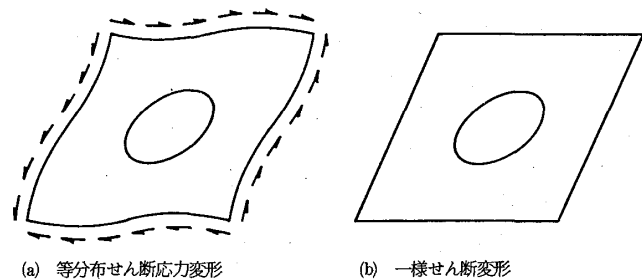


図1 有孔板のせん断変形

等分布せん断応力変形と一様せん断変形は、周辺における荷重条件あるいは変位といった力学的条件が明確なために解析も行い易い。文献(1)、(2)では円孔を有する正方形板の弾塑性座屈強度が有限要素法とRaleigh-Ritz法を組み合わせた解析方法によって明らかにされ

ており、文献(3)では一様せん断変形を受ける有孔板の弾塑性座屈強度が実験的に明らかにされている。Gross Kruth⁴⁾らは一様せん断変形を受ける有孔板の弾性座屈解析を行い、実験と比較してよい結果を得ている。しかし、実験結果は座屈強度と終局強度について述べられているだけで、有孔板の応力状態や初期座屈および後座屈強度における面外変形挙動などは明らかにされていない。

本報告は、一様せん断変形を受ける正方形板が板の中央に円孔を有する場合の弾性座屈実験を行い、孔の大きさと初期座屈強度と終局強度の関係および後座屈挙動や孔縁や周辺の応力状態を実験的に明らかにするとともに、既往の理論解析の結果と比較検討しようとするものである。

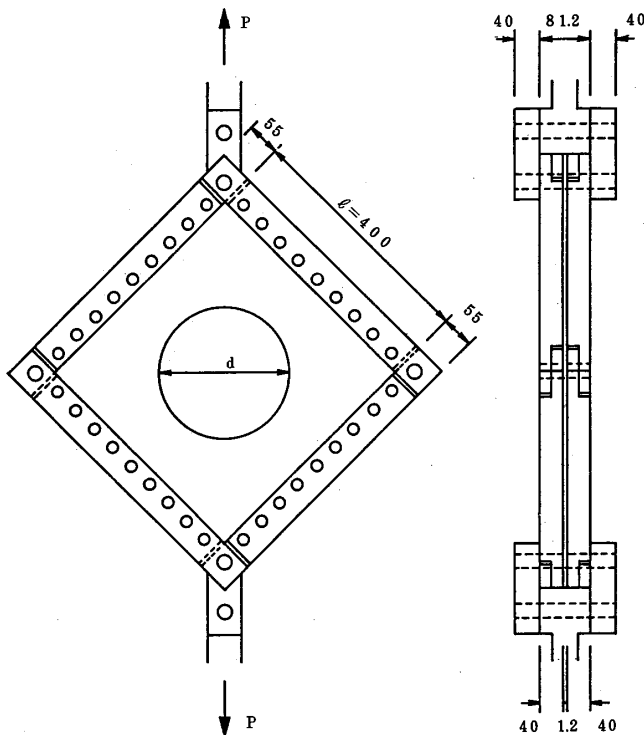


図2 荷重装置(単位:mm)

2. 実験方法

2-1 実験装置および供試体

実験装置は供試体の有孔板を固定するため、図2に示すように4隅をヒンジ機構にした非常に剛性の高い鋼鉄製の荷重フレームを用いた。荷重方法は直径18mmの高力ボルトで供試体を荷重フレームに固定し、試験機の引張荷重Pが連結器から荷重フレームを経て、板周辺にせん断荷重として作用する方法を用いた。

供試体は正方形板の辺長 l と円孔の直径 d の比で表わすと、無孔板 ($d/l = 0$) と有孔板 $d/l = 0.3, 0.5, 0.7$ の4種類である。また、供試体の寸法は平均板厚が $t = 1.2\text{mm}$ であり、正方形板の辺長は 510mm であるが、4隅のヒンジ部分を切除しているので実際にせん断変形を受ける部分は荷重フレーム内の一辺 400mm の正方形部分である。実験に用いた鋼板は構造用軟鋼SS41Pである。引張強度試験の結果は引張降伏応力 $\sigma_y = 2290\text{Kg}/\text{cm}^2$ であった。データ処理に用いる弾性係数 E 、ポアソン比 ν については、それぞれ一般に用いられる数値である $E = 2.1 \times 10^6\text{Kg}/\text{cm}^2$ 、 $\nu = 0.3$ とした。

2-2 ひずみと変位の測定方法

供試体の板が初期座屈を起こすまでの面内応力分布や板の降伏状態、さらに面外の曲げ挙動を調べるために電気抵抗線ひずみゲージ(ゲージ長 5mm)を図3に示す位置に接着した。ただし、有孔板については荷重軸上の孔縁に接着したひずみゲージが面外の曲げ挙動を調べるためのひずみゲージを兼ねる。

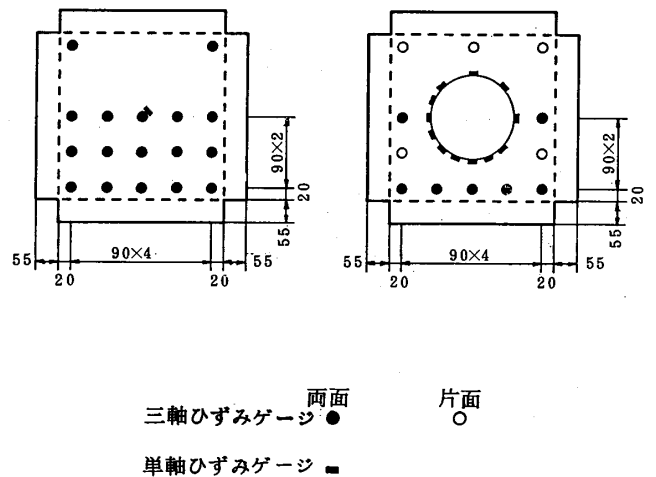


図3 ひずみゲージ接着位置(単位:mm)

板の面外方向変位(以下「面外たわみ」と呼ぶ)は、座屈時に板のたわみが最大になると予想される位置●すなわち、無孔板は板の中央、有孔板は荷重軸上の孔縁をダイヤルゲージ(最小目盛 $1/100\text{mm}$)によって測定した。また、板の面内方向変位(以下「面内変位」と呼ぶ)は、対角線上の相対変位量をダイヤルゲージによって測定した。

2-3 荷重実験

荷重は、荷重が偏心しないように実験装置を設置し、予想初期座屈荷重を超えないように、無孔板では予想初期座屈荷重のおよそ $1/2$ 、有孔板では最も早く降伏す

ると予想される孔縁のひずみが降伏ひずみの $1/4 \sim 1/3$ のならし荷重を載荷した後、載荷実験を行った。初期座屈を起こすと予想される荷重付近の荷重増分は小さくとり、 $d/\ell = 0.7$ では特に小さくとした。その後の荷重増分は、局部的塑性域の発生あるいは座屈挙動に変化の兆候が現われはじめてから変化が小さくなるまでの領域では小さくとり、その他の領域では大きくとった。弾塑性域において、荷重を一定に保っても面外たわみおよび面内変位の増加がみられる場合、これらの変位の増加が微少になってから変位やひずみの読み取りを行った。

3. 弾性応力解析

本研究では、円孔を有する正方形板の平面弾性応力解析を有限要素法で行った。用いた要素は要素内応力一定の三角形要素で、図4に示すような要素分割である。計算は一樣せん断変位を境界辺に与え、対称性を利用して正方形板の $1/4$ について行った。

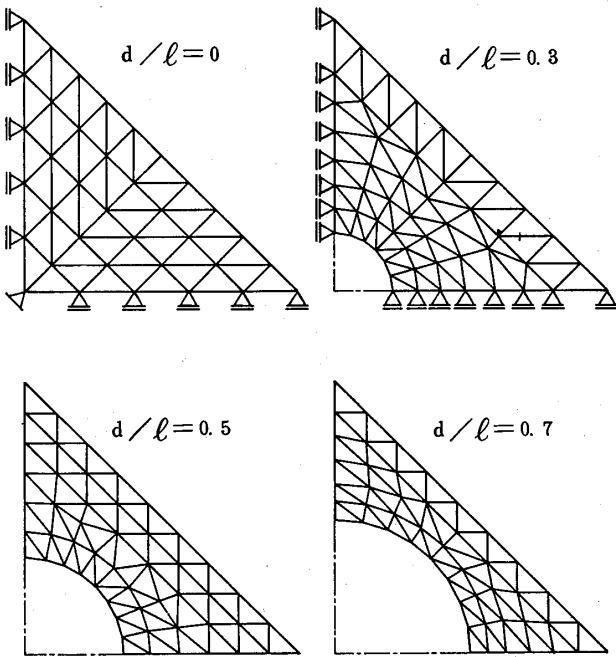


図4 解析に用いた供試体の有限要素分割

4. 解析結果および実験結果

4-1 弾性応力

図5に無孔板と有孔板の周辺近傍の断面 t_1-t_1' および板中間断面 t_2-t_2' 、板中央断面 t_3-t_3' における応力分布を示す。(ここでは便宜上各断面の t_1, t_2, t_3 側から順に測点1~5とする)。解析値および実験値は次式で定義される平均せん断応力 τ_0 によって各応力成分を除し、無次元応力として表示している。

$$Q = P / \sqrt{2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\tau_0 = Q / A \dots\dots\dots (2)$$

ここに、P：対角線方向の荷重

Q：荷重Pによって板の周辺に作用するせん断力

A：正方形板の断面積 ($= \ell \times t$)

無孔板の場合、孔の影響が全くないので理論的な面内応力状態は、板のいたるところで $\tau_{xy}/\tau_0 = 1, \sigma_x/\tau_0 = \sigma_y/\tau_0 = 0$ の純せん断応力状態である。断面 t_1-t_1' 、 t_2-t_2' の測点2および断面 t_3-t_3' の測点3において、実験によるせん断応力 τ_{xy}/τ_0 が解析値より少し大きな値を示しているが、これらの測点では面外の曲げの影響を最も受け易いため、その影響が現われたものと考えられる。しかし、全体的には解析値によく近似する。垂直応力 $\sigma_x/\tau_0, \sigma_y/\tau_0$ において、断面 t_1-t_1' の荷重点に最も近い測点1でせん断応力のおよそ2倍もの大きな値を示しているが、他の測点および断面 t_2-t_2' 、断面 t_3-t_3' では多少増減があるものの、全体的には解析値に近い値を示す。

有孔板における応力分布は、無孔板と同様に荷重点付近の測点1の垂直応力 σ_x/τ_0 あるいは σ_y/τ_0 の実験値が解析値と異なる値を示しており、 $d/\ell = 0.5$ の非荷重点付近の測点5においては解析値と逆符号の値を示して

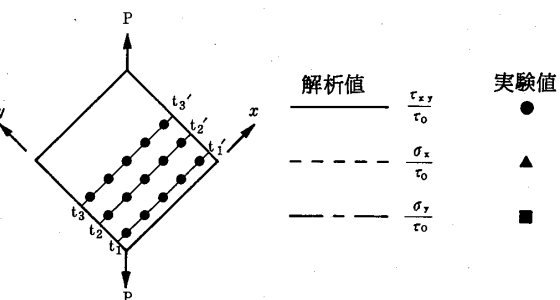
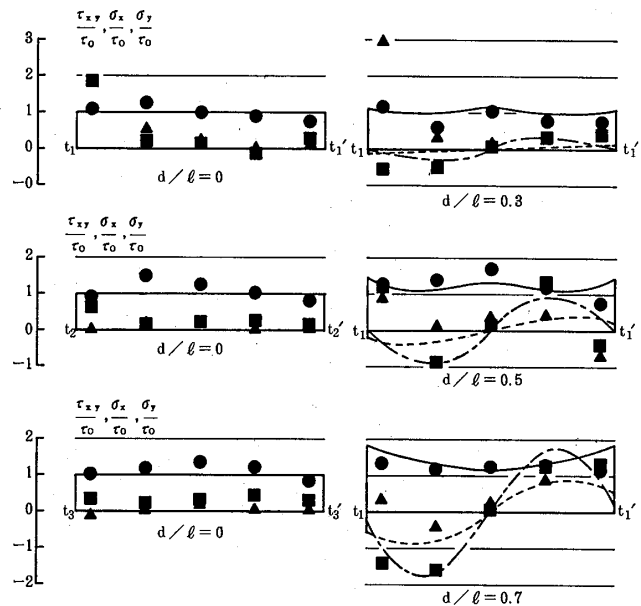


図5 周辺上の中央面における弾性応力分布

いる。せん断応力 $\tau_x, \tau_y / \tau_0$ は各有孔板ともに解析値に近似した値を示す。

荷重点付近の測点1あるいは非荷重点付近の測点5における垂直応力 $\sigma_x / \tau_0, \sigma_y / \tau_0$ が解析値と異なる値を示すのは、供試体を荷重フレームに固定するときわずかなずれが生じて、荷重を伝達するピンが出張っている片方の荷重フレームに接触するためと思われる。これは荷重が大きくなるにつれ、もう一方の荷重フレームにもピンが接触するようになると、ピンの力が等分に伝達され、このために生じている応力集中は低減する。

図6に有孔板の孔縁における接線方向の垂直応力 σ_θ / τ_0 を示す。 $d/\ell = 0.3, 0.5$ において、実験値は荷重軸上やその周辺で解析値に近似するか、あるいはやや大きな値を示すが、非荷重軸上やその周辺では解析値より30%以上大きく、 $d/\ell = 0.5$ では50%以上にもなっており、 $d/\ell = 0.7$ の解析値よりも大きな値を示している。このことについては面外への曲げであるたわみの影響を受けたためと考えられる。 $d/\ell = 0.7$ の場合には全体的に解析値に近似している。

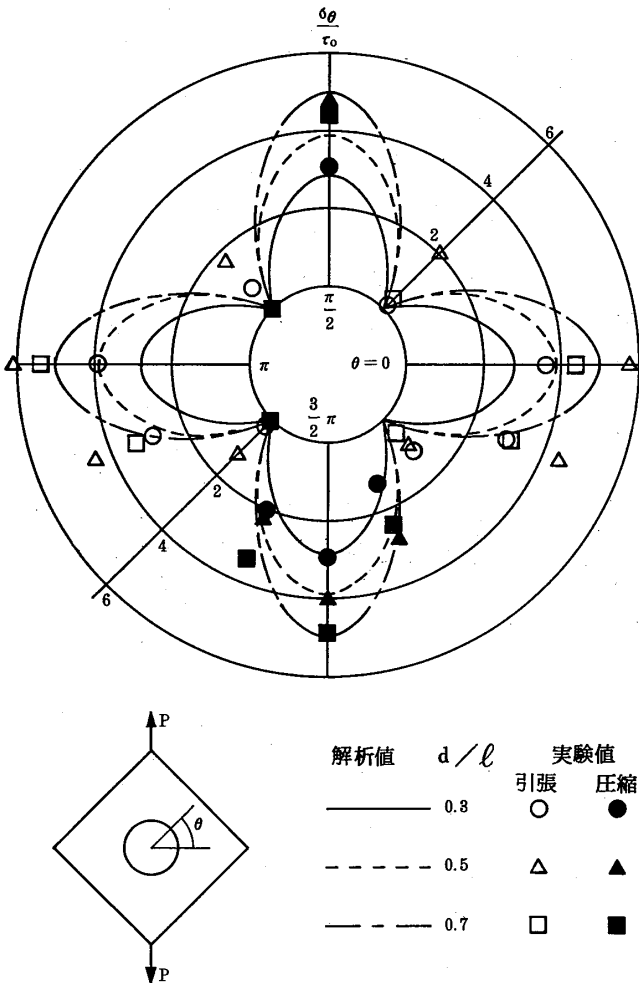


図6 孔縁の弾性応力分布

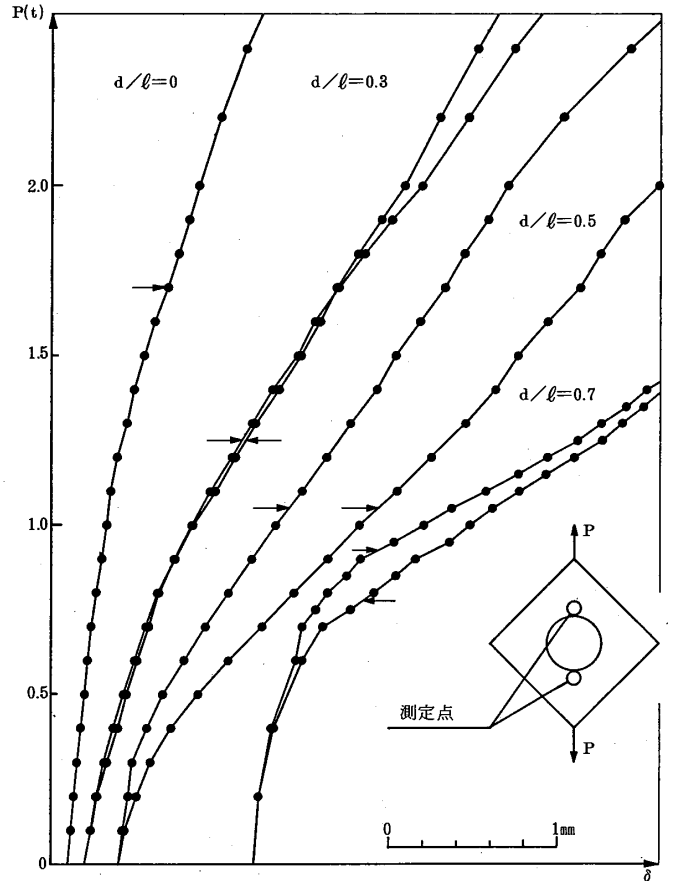


図7 荷重-たわみ曲線

表1 最大初期たわみ δ_{0max}

円孔径 d/ℓ	0	0.3	0.5	0.7
δ_{0max} (mm)	1.2	1.1	1.0	0.35
δ_{0max}/t	1.0	0.92	0.83	0.29

4-2 初期座屈挙動

図7に初期座屈を生じる近傍の荷重と面外たわみの関係を示す $P-\delta$ 曲線を示す。実験による初期座屈荷重は $P-\delta$ 曲線の変曲点における荷重とし、図中に矢印で示す。表1に供試体を荷重フレームに固定した後に測定した最大初期たわみ δ_{0max} と板厚 t の比 δ_{0max}/t を示す。測定した初期たわみは、供試体の板中央付近あるいは孔縁の周辺が最大となる分布をしていた。 $d/\ell = 0.7$ を除く供試体は全て板厚と同程度の最大初期たわみがあるが、座屈強度に与える影響はほとんどないものと考えられる。

座屈挙動についてみると、全ての供試体において変化が少ないように見えるが、細かく見ると必ず変曲点が存在する。変曲点は曲線の傾きが最小になる点であることから、板の面外剛性が最小になる荷重として力学的に重要な意味をもつ。 $d/\ell = 0.5$ では初期の荷重段階から

面外たわみが大きくなっており、初期たわみの影響を受けたものと思われる。d/ℓ=0.7の場合、測定値に若干のばらつきがあり、2曲線の変曲点荷重に差異が生じる結果となっているが、実験値を滑らかな曲線で表わせば、その差はさらに小さくなるものと思われる。

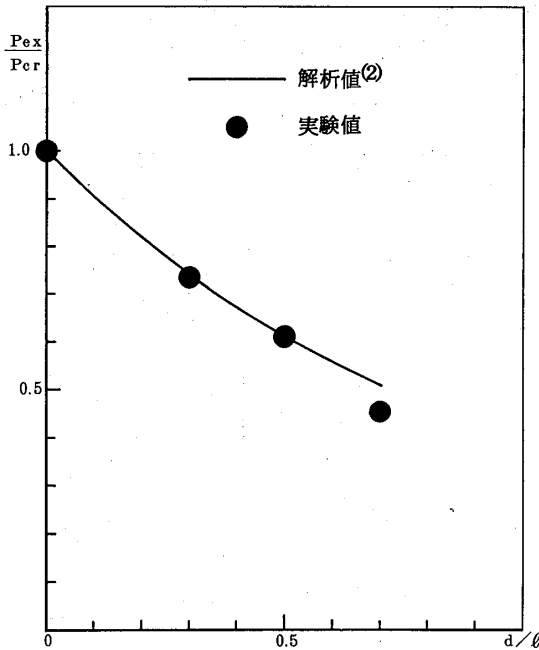


図8 孔の大きさと初期座屈強度の関係

表2 初期座屈強度

円孔径 d/ℓ	0	0.3	0.5	0.7
解析値 Pcr (kg)	1704	1259	1041	871
実験値 Pex (kg)	1700	1250	1050	775
Pex/Pcr	0.998	0.993	1.009	0.890
Pex/Pcro (Pcro=1704kg)	0.998	0.734	0.616	0.455

4-3 初期座屈強度

表2と図8に孔の大きさと初期座屈強度の関係を示す。実験による有孔板の初期座屈強度は、図7から得られる座屈荷重のうちで小さい荷重を実験値とし、無孔板の解析値Pcroは次式によって与えられる。

$$\tau_{cro} = \frac{14.71 \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\ell}\right)^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$P_{cro} = \sqrt{2} \cdot \tau_{cro} \cdot \ell \cdot t \dots\dots\dots (4)$$

これらの図表から、d/ℓ=0.7を除いて解析値と非常によく近似することがわかる。また、初期たわみが板厚程度であれば座屈強度に与える影響はないこともわかる。d/ℓ=0.7の実験値は解析値より11%小さい値

を示している。これは図7に示したP-δ曲線において、d/ℓ=0.7の曲線にのみ座屈荷重付近に乱れがあるため、座屈荷重に誤差が生じたと思われる。たとえば、このような誤差を少なくするために2つの座屈荷重の平均をとれば、実験による座屈荷重は850kgとなり、解析値より2%小さいだけで解析値とよい近似をみると見なすこともできる。

4-4 後座屈挙動

後座屈挙動に関して、図9にP-δ曲線、図10には荷重と面内変位の関係を示すP-γ曲線を示す。P-δ曲線、P-γ曲線は、それぞれの傾きが面外剛度、面内剛度を表わす。面内のせん断変形γは、実験によって測定した対角線方向変位δL、δR、δO、δUから次式によって算出した。

$$\gamma = \frac{\delta_L + \delta_R + \delta_O + \delta_U}{2\sqrt{2} \cdot \ell} \dots\dots\dots (5)$$

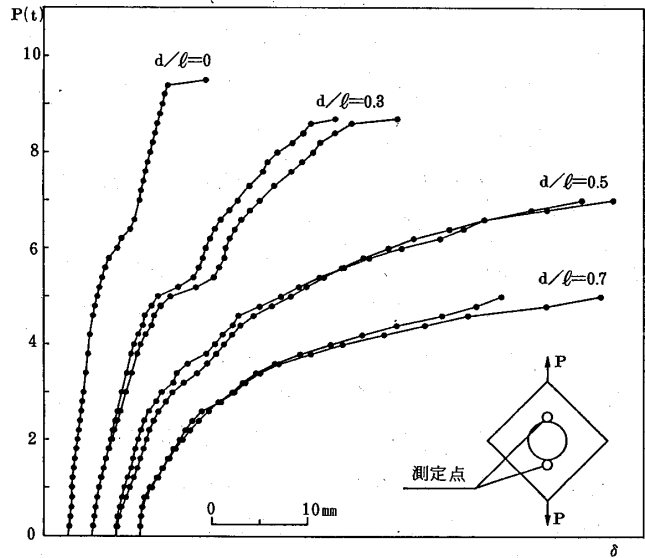


図9 荷重-たわみ曲線

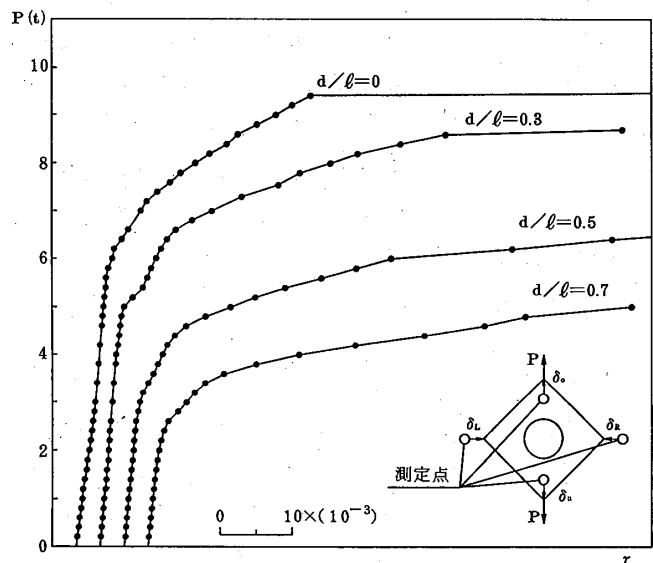


図10 荷重-面内変位曲線

P-δ曲線およびP-γ曲線において、およそ2.5 tから7 tの間で急に剛性の低下する変化が全ての板に見られる。これは、板に塑性域が生じたためと思われる。無孔板は面外たわみの最大となる板中央部に曲げによる塑性域が生じ、有孔板は面外たわみに加えて孔縁の応力集中によって塑性域が生じる。したがって、応力集中の著しい孔の大きい板ほど低い荷重で塑性域の発生によるものと思われる曲線の変化が起きている。曲線の変化以後において、 $d/\ell = 0.5$ や 0.7 のように孔が大きい場合、P-δ曲線およびP-γ曲線は、板の剛性が低下し、ほとんど水平に近い曲線の傾きとなっている。これに対して無孔板や $d/\ell = 0.3$ のように孔が小さくなると、P-γ曲線の面内剛性は徐々に低下しているにもかかわらず、P-δ曲線では面外剛性が一次的に増加するような挙動を示す。これは無孔板や $d/\ell = 0.3$ のように孔の小さい場合、面外変形が大きくなると載荷軸方向に軸力が働くようになり、この軸力が面外たわみの増加を抑える作用をするものと思われる。しかし、終局強度に近づくと、塑性域貫通のためP-δ曲線、P-γ曲線ともに急激に傾きが小さくなり塑性崩壊する。このようなことから、板の後座屈挙動を正確に把握するにはP-δ曲線とともにP-γ曲線も必要と思われる。

図11に座屈後の面外たわみの状態を等高線図として示す。面外たわみは載荷軸上に集中し、 $d/\ell = 0.7$ を除く全ての板に、主たわみと逆方向のたわみが主たわみに沿って生ずる。特に無孔板は載荷点付近にまで及んでいる。また、無孔板や $d/\ell = 0.3$ のように孔が小さい場合には面外たわみが波状となって板全体に生じ、非載荷点方向に減衰するが、面外たわみの相対変位量は孔が大きくなるにしたがって大きくなる。

4-5 終局強度

表3に塑性崩壊強度および実験による終局強度を示し、図12に孔の大きさと終局強度および初期座屈強度との関係を示す。実験による終局強度は図8、9によって決定した荷重とし、無孔板の解析値は、ひずみ硬化を考慮しない板全体の塑性崩壊強度として塑性崩壊せん断力 Q_p と塑性崩壊荷重 P_{uto} が次式によって与えられる。

$$Q_p = \frac{\delta \gamma}{\sqrt{3}} \cdot \ell \cdot t \dots\dots\dots(6)$$

$$P_{uto} = \sqrt{2} Q_p \dots\dots\dots(7)$$

これらの結果、無孔板は解析値の塑性崩壊強度に対して6%程度大きい値を示している。また、図8のP-δ曲線および図9のP-γ曲線の座屈挙動を考慮すると、無孔板は最終的に塑性崩壊をするものと考えられる。有孔板では解析値の塑性崩壊強度に対して23~28%大

きい値を示しており、ひずみ硬化による強度の増加などが考えられる。また、無孔板の終局強度に対する有孔板の終局強度の比をみると、 $d/\ell = 0.3, 0.5, 0.7$ に

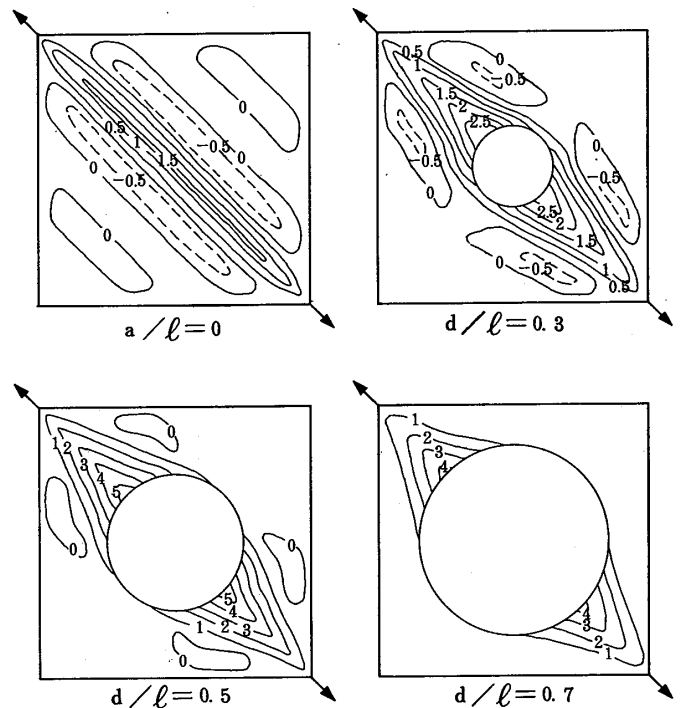


図11 座屈後の面外たわみ(単位:cm)

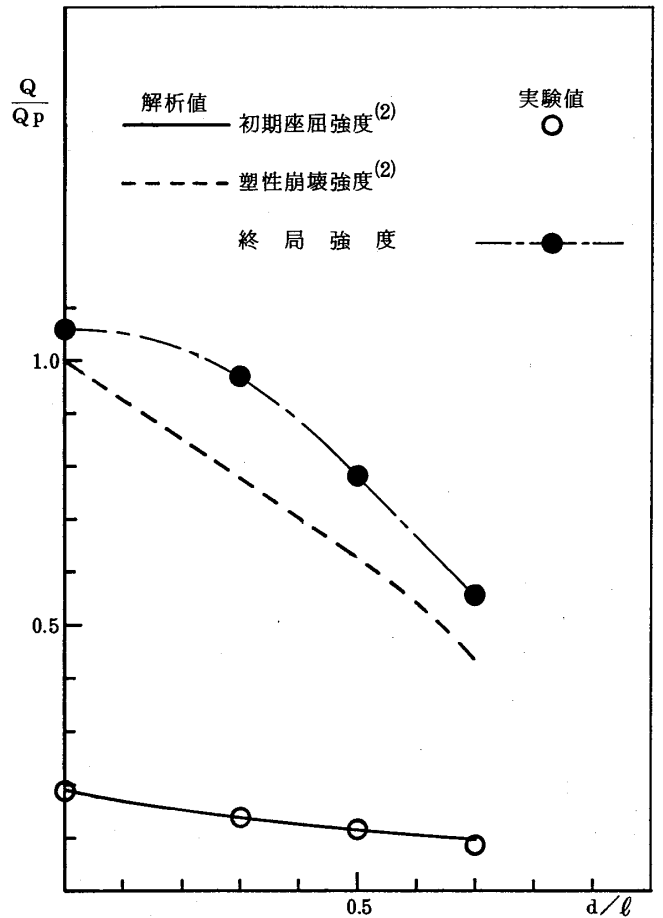


図12 孔の大きさと終局強度および初期座屈強度の関係

対してそれぞれ9%, 26%, 47%低下しており, 孔が大きくなると急激に強度が低下する。初期座屈強度と終局強度の比をみると, 無孔板がおよそ5.60倍であるのに対して $d/\ell = 0.3, 0.5, 0.7$ の有孔板においてはおよそ7.0~6.5倍であり, かなりの後座屈強度が認められるが, この値は幅厚比 ℓ/t によって異なるので, 他の板にそのまま適用することはできない。

表3 終局強度

円孔径 d/ℓ	0	0.3	0.5	0.7
解析値 Put (kg)	8971	6899	5679	3902
実験値 Pue (kg)	9520	8700	7000	5000
Pue/Put	1.06	1.26	1.23	1.28
Pue/Puto (Puto=8971kg)	1.00	0.91	0.74	0.53
Que/Qp (Que = Pue/ $\sqrt{2}$)	1.06	0.97	0.78	0.56
Pue/Pex	5.60	6.96	6.67	6.45

$d/\ell = 0.3$ において, 解析値の塑性崩壊強度に対して26%大きな値を示しており, 無孔板における解析値の塑性崩壊強度および終局強度に対して, それぞれ3%, 9%程度しか低下していない。これは, 有孔板に特有な座屈挙動を有するにもかかわらず, 無孔板に見られるような塑性崩壊に似た座屈挙動を有するためと考えられる。このことから, $d/\ell = 0.3$ のような特に孔の小さい場合は, 無孔板と同程度の終局強度を有するものとして扱えるように思われる。

5. まとめ

円孔を有する正方形鋼板が周辺を面外方向, 面内方向ともに固定され, せん断荷重を受ける場合の弾性座屈実験を行い, 孔の大きさ, 初期座屈強度, 終局強度のそれぞれの関係および後座屈挙動や孔縁, 周辺の応力状態を理論解析の結果と比較検討した。その結果, 本実験の範囲内で次のようなことが明らかになった。

- (1) 実験による板周辺の弾性応力は, 載荷フレームの隅角部付近を除いて解析値とよい近似を示す。本実験に用いた載荷装置は, 載荷フレームの隅角部において応力集中が生じる。孔縁の応力は, 非載荷軸上の応力が載荷軸上の応力よりも大きくなる傾向を示す。
- (2) 初期座屈強度は, $d/\ell = 0.7$ を除いて解析値と非常によく近似する。
- (3) 有孔板の後座屈挙動には, 孔縁の応力集中による局部的塑性域の拡がりの影響が面外剛性および面内剛性の変化として現われ, また大変形による軸力の影響は面外剛性を高める作用をする。なお, 後座屈挙動およ

び板の終局強度を考える場合には, 荷重-面外たわみ曲線より荷重-面内変位曲線が有用である。

- (4) 初期座屈強度に対する終局強度は, $d/\ell = 0.3, 0.3, 0.5, 0.7$ に対してそれぞれ5.60, 6.96, 6.67, 6.45倍である。
- (5) 終局強度は, 孔が大きくなると著しく低下する。無孔板の終局強度に対して, $d/\ell = 0.3, 0.5, 0.7$ の有孔板の終局強度はそれぞれ9, 26, 47%低下する。

〈参考文献〉

- (1) M. Uenoya and R. G. Redwood, "Buckling of webs with openings", Computers and Structures, Vol. 9, No. 2F, Feb. 1979.
- (2) 大村裕, 上野谷実, 向井博之「円孔を有する正方形板の座屈強度について」第31回土木学会中四国支部学術講演概要, 昭和54年。
- (3) 上野谷実「円孔を有する固定正方形板の弾塑性せん断座屈強度に関する実験的研究」福山大学工学部紀要, 第3号, 1981年。
- (4) J. F. Grosskurth, Jr., R. N. White and R. H. Gallagher, "Shear buckling of Square perforated Plates", J. Engng. Mechanics, ASCE, Vol. 102, EM6, Dec. 1976.