

円柱群による波の回折計算

梅田 眞三郎* 筧 源 亮**

A Calculation of Wave Diffraction on Multiple Cylinders

Shinzaburo UMEMA and Motoaki YANO

ABSTRACT

In recent years, large offshore structures have been constructed. The characteristics of the wave diffraction are very important for obtaining the intensity and distribution of wave energy on the structure.

The diffraction of linear plane water waves dealing with the multiple fixed vertical cylinders having large diameter is described in this paper. Under the consideration concerning with the separation distance of the cylinders, an approximate series solution is proposed for the analysis of the diffraction of wave.

Using this theoretical approximate series solution, the diffraction coefficient, the height of water surface and the difference of phase of the wave are analyzed.

1. ま え が き

国土利用の多様化から洋上石油備蓄基地や洋上発電プラントなどの海面を利用する設備の建設や沿岸部における種々の構造物の構築あるいは臨海埋立地の計画などが進んでいる。これらの施設の設置に伴う波の変形問題に関して種々の研究が行われている。構造物の外力としての波力に関する研究¹⁾、反射および回折等の波の変形特性の解析に関する研究^{2), 3)}などがその例である。

筆者らは、前報^{4), 5)}にて構造物による波の変形問題のうち大型円柱構造物による波の回折問題に関して実用的な理論式を比較的簡単に導き、円柱径の違いによる波の変形や相互干渉を明確にしてきた。さらにこれらの解析結果の検証と回折特性を明確にするために超音波を用いた回折実験⁶⁾を行った。

本論文では、波長と円柱径の大きさが同程度の場合の2本の大型円柱構造物による波の回折問題に、線型の回折理論を適用して導いた理論解を基にして3本以上の円柱群による波の回折理論式を導き、その計算例より円柱による波の変形や回折特性を明らかにする。

2. 理 論 式

円柱が水底まで達している場合の円柱群への入・反射波をポテンシャル理論で考える。2本の円柱の場合に関して各円柱への入・反射波を順次考え、境界条件を適用してポテンシャル解を導いた⁴⁾。そのときに直接偏微分を行うに際して大口径円柱であるために円柱の中心間隔が比較的大きくなることから近似を導入し、得られた解を理論近似級数解と名づけた。この解を基にして円柱群による波の回折理論解を導く。その誘導にあたっては、説明を簡略化するために円柱列の例をもって以下に説明する。

今、円柱の個数を M とし、 M が奇数の場合を考える。図-1のような座標系をとり、座標原点の円柱を Γ_0 とし、 y の正の方向に $\Gamma_{-1}, \Gamma_{-2}, \dots$ の円柱が、 y の負の方向に $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ の円柱があるとする。どの円柱も円柱半径 z_0 と円柱間隔 p が同じであるとする。したがって座標系は x 軸に関して対称である。円柱 Γ_0 を除く y の正の領域にある円柱と負の領域にある円柱の数 M_e は、 $(M-1)/2$ 個である。

* 土木工学科

** 神戸大学工学部

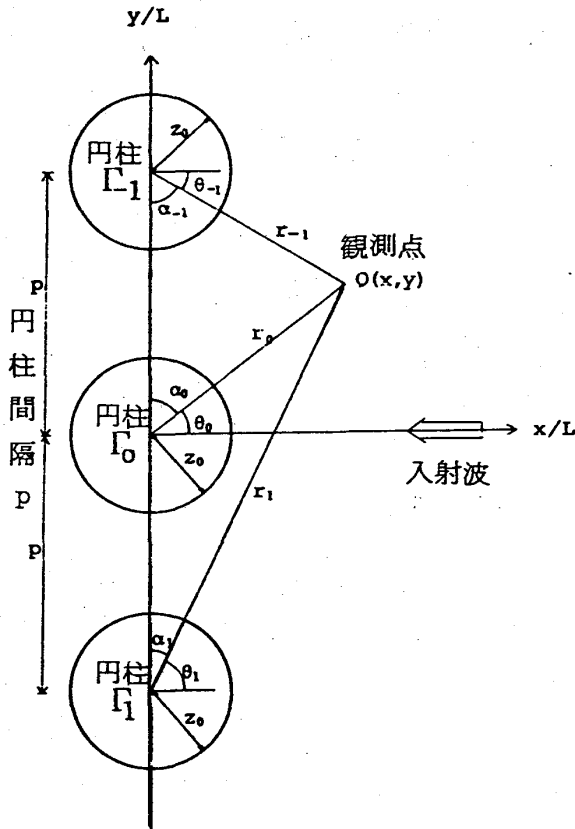


図-1 座標系

まず、第1次入・反射波に関しての円柱 Γ_m ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm Me$) でのポテンシャル ϕ_m^1 は、二本の場合と同様にして求めると次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \psi_m^1 &= \phi_0^m + \phi_1^m \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr_m) e^{in\theta_m} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(kz_0)}{H_n'(kz_0)} H_n(kr_m) e^{in\theta_m} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_m) e^{in\theta_m} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(Z_0)}{H_n'(Z_0)} H_n(R_m) e^{in\theta_m} \end{aligned}$$

次に第2次入、反射波以後に関しては、

$$\psi_m^k = \left\{ \sum_{m=-Me}^{Me} \phi_{k-1}^m \right\} - \phi_{k-1}^m + \phi_k^m \quad (k=2, 3, \dots) \dots \dots (2)$$

の一般式で表わされる。

ここで次のような関数 F_n を2本の対象となる円柱位置の関係によって設定する。まず円柱 Γ_m より上にある円柱 Γ_{m-1} ($l=1, 2, \dots$) との関係では、図-2にしたがって関数 F_n は次のように表わされる。

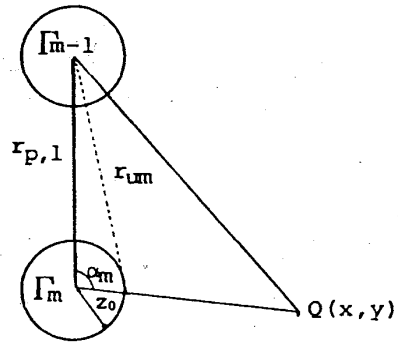


図-2 円柱 Γ_m が円柱 Γ_{m-1} より下にある場合

$$\begin{aligned} F_n(Z_0, R_{p,l}, R_{um}, d_m) \\ = \frac{H_n'(R_{um})}{H_n'(Z_0)} \cdot \frac{Z_0 - R_{p,l} \cos d_m}{R_{um}} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで表されている大文字 Z_0 や $R_{p,l}$ などは、図-2の小文字で示される距離 z_0 や $r_{p,l}$ などに波数 k を乗じたものである。また距離と角度などの関係には次のものがある。

$$\left. \begin{aligned} Z_0 \sin d_m &= R_{um} \sin d'_{m-1} \\ \theta'_{m-1} &= \pi/2 - d'_{m-1} \\ R_{um} &= \sqrt{Z_0^2 + R_{p,l}^2 - 2Z_0 R_{p,l} \cos d_m} \\ R_{p,l} &= l \times R_p = l \times k p \end{aligned} \right\} (4)$$

それに対して、円柱 Γ_m より下にある円柱 Γ_{m+l} との関係では、図-3にしたがって

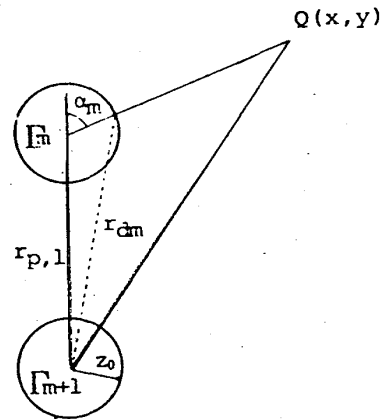


図-3 円柱 Γ_m が円柱 Γ_{m+1} より上にある場合

$$\begin{aligned} F_n(Z_0, R_{p,l}, R_{dm}, \pi-d_m) \\ = \frac{H_n'(R_{dm})}{H_n'(Z_0)} \cdot \frac{Z_0 - R_{p,l} \cos(\pi-d_m)}{R_{dm}} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_0 \sin(\pi-d_m) &= R_{dm} \sin d'_{m+1} \\ \theta'_{m+1} &= \pi/2 - d'_{m+1} \\ R_{dm} &= \sqrt{Z_0^2 + R_{p,l}^2 - 2Z_0 R_{p,l} \cos(\pi-d_m)} \end{aligned} \right\} (6)$$

となる。さらに、ここで関数 F_n を簡略にして次のよう
におく。

$$f_n(R_{um,i}) = F_n(Z_0, R_{p,l}, R_{um,i}, \alpha_m) \quad (7)$$

$$f_n(R_{dm,l}) = F_n(Z_0, R_{p,l}, R_{dm,l}, \pi - \alpha_m) \quad (8)$$

ここに、 $l = 1, 2, \dots$ である。

以上のような関数 f_n と次式で定義する関数 E_n

$$E_n(Z_0, R_l) = \frac{J_n'(Z_0)}{H_n'(Z_0)} H_n(R_l) \quad (l=1, 2) \quad (9)$$

を用いると、入・反射波の各ポテンシャル ϕ_j^m ($j=1, 2, \dots$) は次のように表わされる。

$$\phi_1^m = -E_n(R_0, R_m) e^{in\theta_m} \quad (10)$$

$$\phi_2^m = E_n(R_0, R_m) \left\{ \sum_{j=1}^{Mu} f_n(R_{um,j}) e^{in\theta'_{m-j}} + \sum_{j=1}^{Md} f_n(R_{dm,j}) e^{in\theta'_{m+j}} \right\} \quad (11)$$

ここに Mu は、円柱 Γ_m より上にある円柱の個数、 Md は、
円柱 Γ_m より下にある円柱の個数で、

$$M_u + M_{d+1} + 1 = M \quad (12)$$

である。

次に、 ϕ_3^m 以後のポテンシャル ϕ_{k+1}^m を求めるにあ
たって、円柱番号 m_1 と m_2 ($m_1 > m_2$) で表わされる
円柱において、

$$m_0 = m_1 - m_2 \quad (13)$$

$$E_x[\phi_2^{m_1}]_{m_1 \rightarrow m_2} = f_n(R_{um,m_0}) E_n(R_0, R_{m_1})$$

$$\cdot \left\{ \sum_{j=1}^{Mu} f_n(R_{um,j}) e^{in\theta'_{m_1-j}} + \sum_{j=1}^{Md} f_n(R_{dm,j}) e^{in\theta'_{m_1+j}} \right\} \quad (14)$$

$$E_x[\phi_2^{m_2}]_{m_2 \rightarrow m_1} = f_n(R_{dm,m_0}) E_n(R_0, R_{m_2})$$

$$\cdot \left\{ \sum_{j=1}^{Mu} f_n(R_{um,j}) e^{in\theta'_{m_2-j}} + \sum_{j=1}^{Md} f_n(R_{dm,j}) e^{in\theta'_{m_2+j}} \right\} \quad (15)$$

とおく。ここでの $E_x[\phi_2^{m_1}]_{m_1 \rightarrow m_2}$ など示される式
は、二つの円柱への入・反射における関係式を定義する
ものである。たとえば $E_x[\phi_2^{m_1}]_{m_1 \rightarrow m_2}$ は、円柱
 Γ_{m_1} において (11) 式の形で定義された第 2 次の反射波
のポテンシャル ϕ_2^m が円柱 Γ_{m_2} に第 3 次の入射波とし
て関係した場合、 ϕ_2^m の式に円柱 Γ_{m_1} と Γ_{m_2} との関係
から導かれる関数 f_n を乗じた形で定義されるものであ
る。

このように、円柱 Γ_m での第 2 次の反射波のポテンシ
ヤルを基本として他の円柱との関係から導かれる関数
 f_n を求め、順次高次の入・反射波のポテンシャルを求
めていくと、円柱 Γ_m での一般式 ϕ_{k+1}^m は次のように表
わされる。

$$\phi_{k+1}^m = (-1)^k \left\{ \sum_{j=1}^{Mu} E_x[\phi_k^m]_{m \rightarrow m-j} + \sum_{j=1}^{Md} E_x[\phi_k^m]_{m \rightarrow m+j} \right\} \quad (k \geq 2) \quad (16)$$

この式を (2) 式に代入することによってポテンシャル
 ϕ_{k+1}^m を求めることができ、 M 個の円柱がある場合の速度
ポテンシャル ϕ をポテンシャル ψ の重ね合わせとして算
定することができる。もちろん以上の式は、円柱の個数
や 2 本の円柱との相互位置関係に注意すれば任意配列の
円柱群による波の回折に関するポテンシャル解でもある。

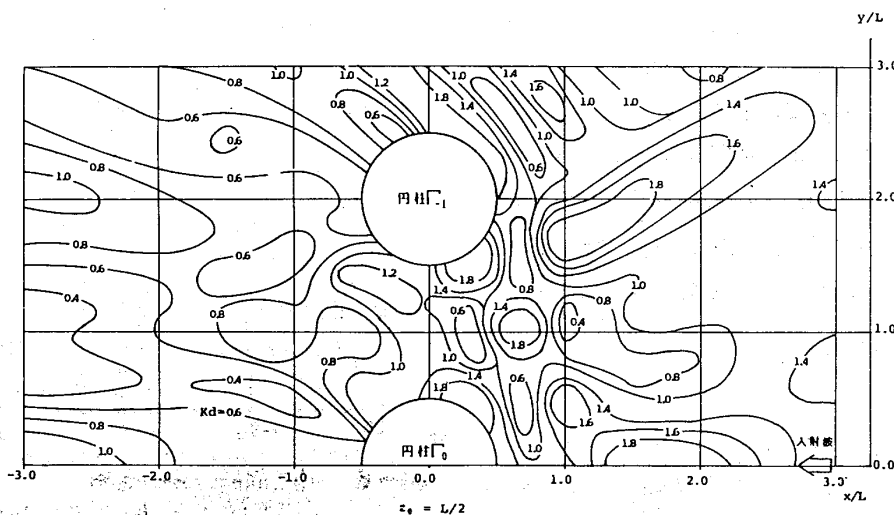


図-4 回折係数の分布 (円柱径 $z_0 = L/2$ の三本の円柱の場合)

3. 計算例

前章で導いた円柱群による波の回折に関する理論近似級数解にしたがって実際に計算を行ってみた。速度ポテンシャル ϕ からその絶対値である回折係数や位相波面などを求め、円柱による波の変形や回折特性を調べた。なお計算座標点間隔は、 x 方向については1波長まで0.1波長間隔で、1波長以上は0.5波長間隔で4波長まで求めた。 y 方向については、0.2波長間隔で3波長まで求めた。また計算座標点は、今回円柱の配列が x 軸に関して対称であるので y の正の領域のみ求めた。

前報⁴⁾の2本の円柱の場合の結果と比較するために、まず3本の円柱列の場合の一計算例を示す。どの円柱半径 z_0 も $L/2$ とし、それぞれの円柱間隔 p を $2.0L$ と同一にとって計算を行い、回折係数、水面変動および位相波面などを求めた。

まず図-4に示すような円柱前面と背後の領域⁴⁾において回折係数の分布を求めた。2本の円柱の場合には、円柱周辺1波長程度まで単一円柱の場合の結果と似かよったところが多かったが、3本の円柱の場合の結果は多少その様相が異なっている。すなわち円柱前面および背後の回折係数の値が、2本の場合の結果に比べて大きくなっている。さらに円柱から1波長以上離れた領域では、他の円柱による影響を強く受けて回折係数の分布やその値が2本の場合の結果と異なっているところが多くなっている。

このような回折係数から円柱による波の相互干渉をみてきたが、入射波高 η_1 に対する水面変動 η との比によっても、円柱による波の相互干渉特性を調べてみた。

η/η_1 の実部の変動状況を図-5に示す。この場合、3本の円柱の場合の結果を単一円柱と2本の円柱との結果とで比較するために、それぞれ一点鎖線、破線および実線で水面変動を表わし、その変動状況を比較した。ただし座標軸の位置が三ケースとも異なるので、単一円柱の場合にはその円柱の中心が、2本の円柱の場合には上方の円柱の中心が、3本の円柱の場合には円柱 L_1 の中心が図-5の $(x/L, y/L) = (0.0, 1.0)$ にあると考えて、その円柱の中心およびそれより上下1波長離れた x 軸方向の水面変動を図に示した。

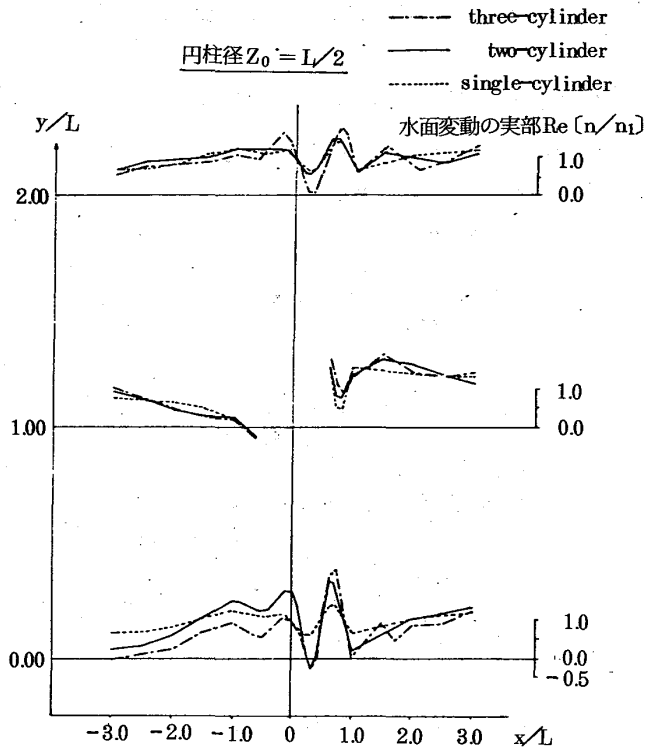


図-5 入射波に対する水面変動

回折係数の分布で考察を示したと同様に、水面変動状況からも円柱による波の相互干渉が明らかになっている。円柱にはさまれた領域の水面変動を表わしている $y/L = 0.0$ 上では、2本および3本の円柱の場合の結果が、単一円柱の結果と比べると全域にわたって変動差があり、円柱による波の相互干渉の程度が顕著になっていることがわかる。それに対して円柱の中心 $y/L = 1.0$ 上での水面変動に関しては、三つのケースの差があまり目立たない。これは他の円柱による影響が少なく、むしろその円柱自身による波の変形が卓越していることによるものと想像される。

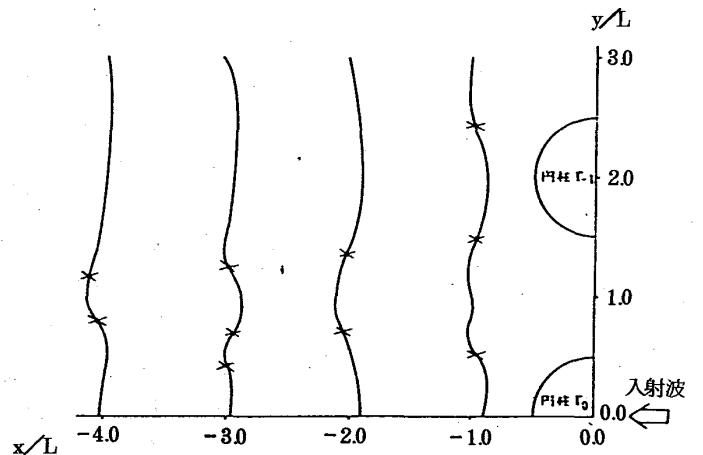


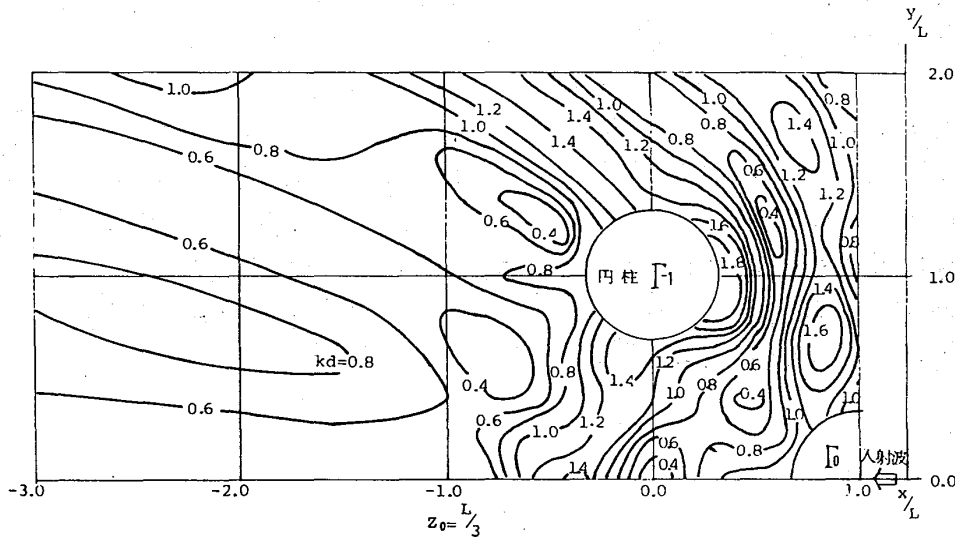
図-6 円柱背後の波の峯線 (円柱径 $z_0 = L/2$ の三本の円柱の場合)

さらに円柱による波の回折を明らかにするために、図一六に位相角 $\arg[\eta/\eta_i]$ によって円柱背後の領域における波の峰線の y 軸方向の変化を示した。峰線の y 軸方向の変化が、円柱に挟まれた $y/L=1.0$ 上付近の領域において著しい。この結果から、隣接する円柱による影響が顕著に現われるのが円柱背後1波長程度で、他の円柱による影響は円柱より2波長以上離れた付近にみられることが想像される。6)

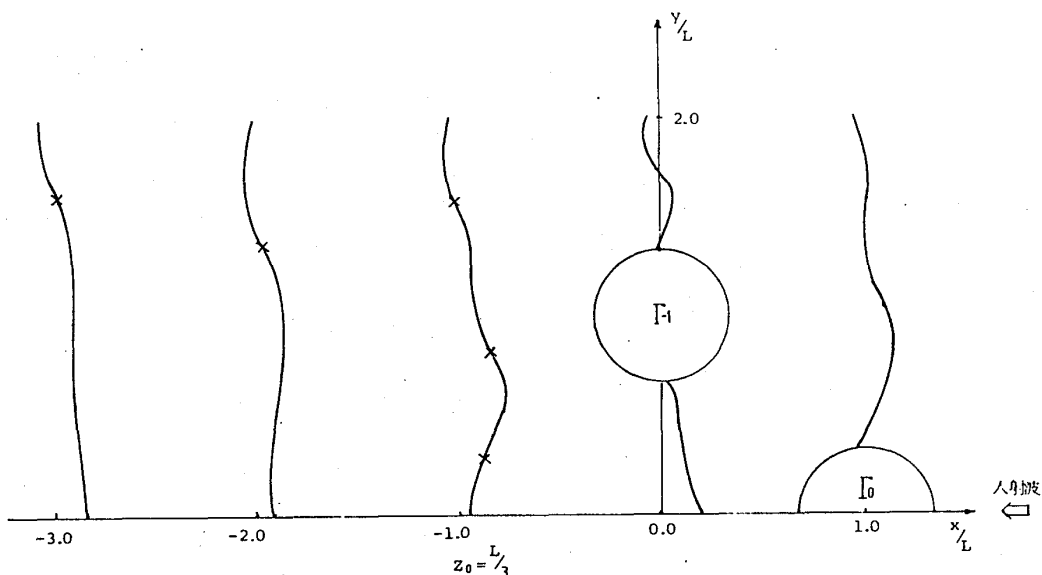
超音波による回折実験を行った結果、その音波波面が横方向において急激に変化しているところに回折の映像があらわれていた。そこで図一六に計算による峰線の y 方向での最急勾配点と思われるところに \times 印を示した。この \times 印の連なる方向が回折の方向を表わしていると思われる。中央の円柱の3波長から4波長背後では、他の2円柱の影響を受けてそれぞれの回折の方向が変化して

いるように思われる。

次に3本の円柱列のうち中央の円柱位置を変えた場合の回折計算を行った。その計算例の一つとして、中央の円柱を x の正の方向へ1波長ずらし、円柱間隔も狭ばめ円柱半径を $L/3$ とした場合の結果を図に示した。その回折係数の分布を示したのが図一七である。 $y/L=0.0$ 上の中央の円柱と他の円柱とに挟まれた領域では、回折係数の変動が激しく円柱による波の相互干渉が顕著である。前述の円柱半径が $L/2$ の場合には、円柱の外線間隔 l_0 と円柱の直径 D との比 l_0/D を求めると、その値は1.0であった。一方、図一七における中央の円柱と左上方の円柱との l_0/D の値は1.12となっている。このためか図一四に示す円柱間に挟まれた領域における回折係数の分布と図一七における中央円柱と左上方の円柱に挟まれた領域の回折係数の分布がよく似かよっている。



図一七 回折係数の分布 (円柱径 $z_0 = L/3$ の三本の円柱の場合)



図一八 円柱背後の波の峰線 (円柱径 $z_0 = L/3$ の三本の円柱の場合)

この円柱半径が $L/3$ の場合についても図-6と同様に円柱背後の峰線の変化を求めた結果、図-8のようになった。 $x/L = -1.0$ 上では円柱の影響を受けて位相差が大きく、峰線の変化が激しい。図-6に示したように計算による峰線の y 方向での最急勾配点と思われるところに×印を示した。中央円柱の1波長背後では最急勾配点は今ひとつはっきりとしないが、 $x/L = -1.0$ 上の中央の×印と $x/L = -2.0$ 及び -3.0 上の×印を連ねた方向が中央円柱による回折の方向と思われる。

4. 結論

波長と円柱径の大きさが同程度の場合の2本の大型円柱構造物による波の回折に関する理論近似級数解を円柱群による波の回折解へと発展させ、その計算例を示した。従来の円柱群による回折解は、Bessel関数の加法定理を適用して導かれているため解の収束性に問題点を有していた。しかし、そのポテンシャルの級数の形を変えることによって得られた今回の解は、ポテンシャル解の一般式を簡略な形で導くことができ、収束性等になんら問題がない⁴⁾。しかもその解による計算結果から円柱群による波の変形、相互干渉及び回折特性を十分把握することができた。確かに今回の解は、線形波回折理論における近似解にすぎず、適用限界としては円柱の外線間隔

l_0 と円柱の直径との比 l_0/D が1.0より小さな極端な構造物による波の相互干渉を起こすような場合が存在する。しかし実用的な面で種々の特徴を有しており、今後線形から非線形回折へと発展が期待できる。

参考文献

- 1) T. Sarpkaya and M. Isaacson: Mechanics of wave forces on offshore structures, Van Nostrand Reinhold, 1981.
- 2) 合田良実・吉村知司・伊藤喜行: 島堤による波の反射および回折に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第10巻, 第2号, 1971.
- 3) 井島武士・周宗仁・湯村やす: 任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱, 土木学会論文報告集, 第225号, 1974.
- 4) 梅田眞三郎・篁源亮・野村勝美・藤井克典: 二本の大型円柱構造物による波の回折に関する研究, 福山大学工学部紀要, 第4号, 1982.
- 5) 梅田眞三郎・篁源亮: 円柱群による波の回折に関する研究, 土木学会論文報告集, 第329号, 1983.
- 6) 篁源亮・梅田眞三郎・大萩力: 超音波可視による波の回折に関する研究, 流れの可視化学会誌, Vol. 2, No. 6, 1982.