福山大学工学部紀要
第3号 1981年3月

時間関数とテイラー展開

菅沼春幸*・小谷 勲*

Taylor Series Expressions regarding Time Functions

Haruyuki SUGANUMA and Isao KOTANI

ABSTRACT

Time functions or wave forms which are generalized physical variables in a dynamical linear system are discussed on a basis of Taylor series expressions. A wave form is developed as a Taylor series formula which coefficients are decided by the differential equations and initial conditions of the system. Also, formula of both Fourier and Laplace transforms are deduced from the Taylor series of a complex function.

---

* 電子電気工学科

1. まえがき

物理系の工学的現象を解析する場合，加えられる入力に対してこの系の状態がどのように対応して変化するかすなわち入力変数と状態変数についての数式モデルが作られる。

任意の入力量 u が時間 t とともに変化するとき，すなわち入力変数が時間関数 u(t)の場合，任意の状態量 x も時間関数 $x(t)$ となる。また，これらの量は時刻（時間座標）と物理量の大きさの２つの量で表わされるから，２次元の量（２次元ベクトル）である。

系の解析の目的が，特定の状態量を出力あるいは観測値として，入力と出力の対応を模索することである場合，この対応を表わすのに，周知のように時間領域と周波数領域が用いられる。時間領域では変数を実数対応させるのに対し，周波数領域では変数は複素数対応の形式で表現され，数学的操作は鮮かであるが，物理的意義は難解である。

本文は以上のような時間対応の量を普遍的な時間関数あるいは波形とし，これをテイラー展開の見地によりその物理的意義を検討するものである。

2. 波形とテイラー展開

簡単な例として，直線運動をするある質点の変位量 x が時間 t の関数であるとき，t＝o における質点の位置を $(x)_{t=0}=x_0$ とすれば，質点の速度を v として t 時間後の質点の位置 $(x)_{t=t}=x_t=x(t)$ は次式で表わされる。

$$x(t)=x_0+\int_0^t v\,dt$$

ここで v は t の関数であるから $(v)_{t=0}=v_0$ とすれば，t 時間後の質点の速度は，その加速度を α として

$$v(t)=v_0+\int_0^t \alpha\,dt$$

とすることができる。同様に，加速度 α，加加速度 β，…などについても次のように表わすことができる。

$$\alpha(t)=\alpha_0+\int_0^t \beta\,dt$$

$$\beta(t)=\beta_0+\int_0^t \gamma\,dt$$

…………

以上の式を順次に $x(t)$ の式に代入すると，以下のようになる。

$$\begin{aligned}x(t)&=x_0+\int_0^t\left(v_0+\int_0^t\alpha\,dt\right)dt\\&=x_0+\int_0^t v_0\,dt+\int_0^t\int_0^t\alpha\,dt\,dt\\&=x_0+v_0t+\int_0^t\int_0^t\alpha_0\,dtdt+\int_0^t\int_0^t\int_0^t\beta\,dtdtdt\\&=x_0+v_0t+\frac{\alpha_0}{2!}t^2+\frac{\beta_0}{3!}t^3+\cdots\cdots\end{aligned}$$

一方，v_0，α_0，β_0，……については

$$v_0=v(0)=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=(x')_{t=0}=x_0'$$

$$\alpha_0=\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0}=(x'')_{t=0}=x_0''$$

$$\beta_0=\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0}=\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{t=0}=(x''')_{t=0}=x_0'''$$

…………

であるから，$x(t)$ は次のようになる。

$$x(t)=x_0+\frac{x_0'}{1!}t+\frac{x_0''}{2!}t^2+\cdots\cdots+\frac{x_0^{(n)}}{n!}t^n+\cdots\cdots \quad (1)$$

(1)式は明らかに $x(t)$ のテイラー展開である。

以上の例では波形として変位量 $x(t)$ をとったが，一般的に f が物理量を表わすと同時に時間 t の関数を意味するとき，すなわち $f(t)$ が波形として t のべき級数

$$\begin{aligned}f(t)&=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots\cdots+a_nt^n+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)\\&=a_0+a_1\int_0^t dt+2!a_2\int_0^t\int_0^t dtdt+\cdots\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}n!a_n\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t\underbrace{dtdtdt\cdots\cdots\cdots dt}_{n\text{ケ}}\end{aligned}$$

のように表わされるならば，各係数は次のような意味をもつと考えることができる。

$$\left.\begin{aligned}a_0&=f(0)\\a_n&=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right)_{t=0}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

現象量を空間座標と無関係に時間 t だけの関数とみるとき，現象を記述する微分方程式と波形との関係を以上のようなテイラー展開の見地から検討すると次のようになる。

(1)　$v(t)=v_0$（一定）のとき

方程式：$\frac{d}{dt}x(t)=v_0+\cdots+\frac{d^n}{dt^n}x(t)=0$　（$n\geqq 2$）

初期値：$x_0,\ x_0'=v_0,\ x_0''=x_0'''=\cdots=0$

$\therefore x(t)=x_0+v_0 t$

(2)　$\alpha(t)=\alpha_0$（一定）のとき

方程式：$\frac{d^2}{dt^2}x(t)=\alpha_0\cdots\frac{d^n}{dt^n}\alpha(t)=0$　（$n\geqq 3$）

初期値：$x_0,\ x_0',\ x_0''=\alpha_0,\ x_0'''=x_0^{(4)}=\cdots=0$

$\therefore x(t)=x_0+x_0't+\frac{\alpha_0}{2!}t^2$

(3)　$v(t)=kx(t)$のとき

方程式：$\frac{d}{dt}x(t)=kx(t)+\cdots+\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}x=k\frac{d^n}{dt^n}x$

初期値：$x_0'=kx_0,\ x_0''=kx_0'=k^2x_0\cdots x_0^{(n+1)}=k^{n+1}x_0$

$\therefore x(t)=x_0\left(1+kt+\frac{k^2}{2!}t^2+\cdots\right)$

$=x_0e^{kt}$

(4)　$\alpha(t)=kx(t)$のとき

方程式：$\frac{d^2}{dt^2}x(t)=kx(t)\cdots\frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}}x=k\frac{d^n}{dt^n}x$

初期値：$x_0''=kx_0\quad x_0^{(4)}=kx_0''=k^2x_0\quad x_0^{(2n)}=k^nx_0$

$x_0'''=kx_0'\quad x_0^{(5)}=kx_0'''=k^2x_0'\quad x_0^{(2n+1)}=k^nx'$

$\therefore x(t)=x_0\left(1+\frac{k}{2!}t^2+\cdots+\frac{k^n}{2n!}t^{2n}+\cdots\right)$
$+\frac{x_0'}{\sqrt{k}}\left(\sqrt{k}t+\cdots+\frac{\sqrt{k}\,k^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}+\cdots\right)$

$=x_0\frac{e^{\sqrt{k}t}+e^{-\sqrt{k}t}}{2}+\frac{x_0'}{\sqrt{k}}\cdot\frac{e^{\sqrt{k}t}-e^{-\sqrt{k}t}}{2}$

(5)　$v(t)=kx(t)+c$　（$c=v_0$）のとき

方程式：$\frac{dx}{dt}=kx+c\cdots\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}x=k\frac{d^n}{dt^n}x$

初期値：$x_0'=kx_0+c$

$x_0''=kx_0'=k(kx_0+c)$

$x_0^{(n+1)}=kx_0^{(n)}=k^n(kx_0+c)$

$\therefore x(t)=x_0+(kx_0+c)t+\cdots+\frac{k^{n-1}(kx_0+c)}{n!}t^n+\cdots$

$=x_0\left(1+kt+\cdots+\frac{k^n}{n!}t^n+\cdots\right)$

$+c\left(t+\frac{k}{2!}t^2+\cdots+\frac{k^{n-1}}{n!}t^n+\cdots\right)$

$=x_0e^{kt}+\frac{c}{k}e^{kt}-\frac{c}{k}$

(6)　$\alpha(t)=mv(t)+kx(t)+c$　（$c=\alpha_0$）のとき

方程式：$\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{dx}{dt}+kx+c$

初期値：$x_0''=mx_0'+kx_0+c$

$x_0'''=mx_0''+kx_0'=(m^2+k)x_0'+m(kx_0+c)$

$x_0^{(4)}=mx_0'''+kx_0''=(m^3+2mk)x_0'$
$+(m^2+k)(kx_0+c)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$x_0^{(n+2)}=mx_0^{(n+1)}+kx_0^{(n)}=(\cdots\cdots\cdots)x_0'$
$+(\cdots\cdots)(kx_0+c)$

$\therefore x(t)=x_0+x_0't+\frac{mx_0'+kx_0+c}{2!}t^2$
$+\frac{mx_0''+kx_0'}{3!}t^3+\cdots$

$=\frac{1}{2M_k}\left\{-\left(\frac{m}{2}-M_k\right)\left(x_0+\frac{c}{k}\right)+x_0'\right\}e^{\left(\frac{m}{2}+M_k\right)t}$

$+\frac{1}{2M_k}\left\{\left(\frac{m}{2}+M_k\right)\left(x_0+\frac{c}{k}\right)-x_0'\right\}e^{\left(\frac{m}{2}-M_k\right)t}-\frac{c}{k}$

ただし　$M_k=\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+k}$

3.　波形の複素関数表現

周知のように，波形はフーリエ級数に展開することによって，その周波数特性が明かにされる。本節では複素関数のテイラー展開の見地から波形のフーリエ変換あるいはラプラス変換の意義を考究する。

波形$x(t)$が周期関数（$\omega_0 T=2\pi$）で表わされる量の場合は，時間tを角座標で表わすと，tに代って角座標φを採用し

$$\varphi=\omega_0 t$$

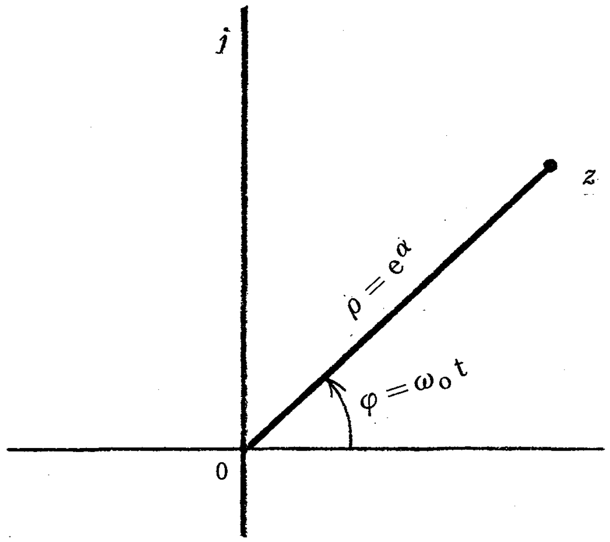
$$z=e^{\alpha+j\omega_0 t}=\rho e^{j\varphi}$$

のように複素数zを導入することができる。

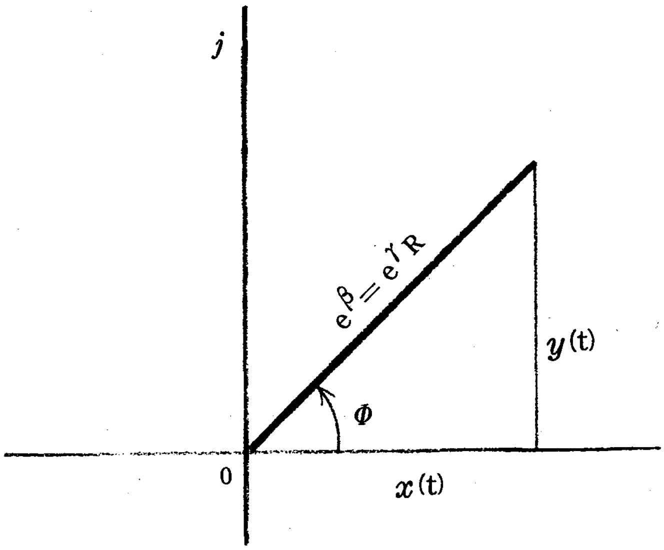
さらに$x(\mathrm{t})$と同一周期をもつ任意の周期関数を$y(\mathrm{t})$として，次のような複素関数$f(z)$を導入しよう。

$$x(\mathrm{t})+j\,y(\mathrm{t})=f(z)$$
$$=e^{\beta(\rho,\varphi,\ y)+j\Phi(\rho,\ \varphi,\ y)}$$
$$=e^{\gamma(\rho,y)}\mathrm{R}(\rho,\ \varphi,\ y)\,e^{j\Phi}$$

ここで，$e^{\gamma}\mathrm{R}$は$|f(z)|$であり，$x(\mathrm{t})$と$y(\mathrm{t})$で定まるがe^{γ}はzのφに無関係な関数とする。以上の関係を図1に示す。



z 平 面



$f(z)$ 平 面

図1

$f(z)$の共役複素量を$\overline{f(z)}$とすれば，$x(\mathrm{t})$は次のように表わされる。

$$\overline{f(z)}=x(\mathrm{t})-j\,y(\mathrm{t})=e^{\gamma}\mathrm{R}\,e^{-j\Phi}$$
$$x(\mathrm{t})=\frac{f(z)+\overline{f(z)}}{2}=e^{\gamma}\mathrm{R}\,\frac{e^{j\Phi}+e^{-j\Phi}}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

周知のように$f(z)$は次のようにテイラー展開で表わされる。

$$f(z)=\mathrm{A}_{o}+\mathrm{A}_1 z+\mathrm{A}_2 z^2+\cdots=\sum_{n=o}^{\infty}\mathrm{A}_n z^n$$
$$\mathrm{A}_{o}=f(o)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\gamma}\mathrm{R}e^{j\Phi}\,d\varphi$$
$$\mathrm{A}_{n}=\frac{f^{(n)}(o)}{n!}=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi r^{n}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\gamma}\mathrm{R}e^{j(\Phi-n\varphi)}\,d\varphi$$

ただし，rはA_nに関するz平面上の積分路Cの半径である。したがってCのrをzの大きさρと同じにすれば，$f(z)$は次のようになる。

$$\mathrm{A}_n z^n=\mathrm{B}_n e^{\gamma}e^{jn\varphi}$$
$$f(z)=\sum_{n=o}^{\infty}\mathrm{B}_n e^{\gamma+jn\varphi}$$

ここに $\mathrm{B}_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{R}e^{j(\Phi-n\varphi)}d\varphi$

同様にして，$\overline{f(z)}$は定義により

$$\overline{f(z)}=\sum_{n=o}^{\infty}\overline{\mathrm{B}_n}\,e^{\gamma-jn\varphi}$$
$$\overline{\mathrm{B}_n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{R}e^{-j(\Phi-n\varphi)}\,d\varphi$$

となるから，(4)式により

$$x(\mathrm{t})=\frac{1}{2}\sum_{n=o}^{\infty}(\mathrm{B}_n e^{\gamma+jn\varphi}+\overline{\mathrm{B}_n}e^{\gamma-jn\varphi})\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

のようになる。(5)式の両辺に$e^{-jn\varphi}$あるいは$e^{jn\varphi}$を乗じ，φについて，0〜2π（あるいは$-\pi$〜π・・・周回）積分すると次のようにB_n，$\overline{\mathrm{B}_n}$が求められる。

$$\mathrm{B}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(\mathrm{t})e^{-(\gamma+jn\varphi)}d\varphi\quad(n\neq o)$$
$$\overline{\mathrm{B}_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(\mathrm{t})\,e^{-(\gamma-jn\varphi)}\,d\varphi\quad(n\neq o)$$
$$\mathrm{B}_o+\overline{\mathrm{B}_o}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(\mathrm{t})\,e^{-\gamma}\,d\varphi$$

nを負領域の整数に拡張すれば，$\overline{B_n}=B_{-n}$となる。従って

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\gamma+jn\varphi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)e^{-(\gamma+jn\varphi)}d\varphi$$

γはρとyだけの関数であるから

$$\gamma=\gamma_0 t$$

とすれば，$\varphi=\omega_0 t$ であるから

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=\frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n(\gamma_0+jn\omega_0)e^{(\gamma_0+jn\omega_0)t}\\X_n(\gamma_0+jn\omega_0)&=\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0}x(t)e^{-(\gamma_0+jn\omega_0)t}dt\end{aligned}\right\}$$

…………… (6)

となる。(6)式は，$\gamma_0=0$になるように$y(t)$を選べば，複素数表現のフーリエ級数に他ならない。

$x(t)$が非周期関数のときは，(6)式で

$$\omega_0\to 0\ (T\to\infty),\quad n\omega_0=\omega\quad \omega_0=d\omega$$

$$t<0\text{において}x(t)=0$$

とすれば，次のようにラプラス変換が得られる。

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\gamma_0+j\omega)e^{(\gamma_0+j\omega)t}d\omega\\X(\gamma_0+j\omega)&=\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-(\gamma_0+j\omega)t}dt\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

(7)式の$x(t)$の右辺について，$\omega t=\varphi$，$\gamma_0 t=\gamma$とすれば（$d\omega=d\varphi/t$）

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(\frac{\gamma+j\varphi}{t}\right)e^{\gamma+j\varphi}\frac{d\varphi}{t}$$

となる。更に$e^{\gamma+j\varphi}=\zeta$とおけば（$je^{\gamma+j\varphi}d\varphi=d\zeta$）

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Sigma}X\left(\frac{\log\zeta}{t}\right)\frac{d\zeta}{t}$$

となり，ここで$\zeta=e^{zt}$，$z=\gamma_0+j\omega$とすれば

（$\gamma_0>0$として）

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=\frac{1}{2\pi j}\int_{z=\gamma_0-j\infty}^{z=\gamma_0+j\infty}X(z)e^{zt}dz\\X(z)&=\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-zt}dt\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$

とすることができる。

なお，(7)式から(8)式への過程で，積分範囲あるいは積分路の変換はもっとも重要な点であるが，これらは(6)式の誘導過程から逆に帰納したものである。すなわち，$X(z)$ではω_0（一定）→0としてtの積分範囲が0～T/2（∞）であり，$x(t)$ではT（一定）→0としてωの積分範囲が$-\omega_0$（$-\infty$）～ω_0（∞）であるが，$\varphi=\omega t$の観点からは，$\omega_0\to 0$あるいは$T\to 0$何れの場合もφの積分範囲は$-\pi$～πであるとした。

積分路については次の演算からも推定できる。すなわち，(8)式の$X(z)$について部分積分法を施す

$$X(z)=\frac{-1}{z}\left[x(t)e^{-zt}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{z}\int_0^{\infty}x'(t)e^{-zt}dt$$

$$=\frac{x(0)}{z}+\frac{-1}{z^2}\left[x'(t)e^{-zt}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{z^2}\int_0^{\infty}x''(t)e^{-zt}dt$$

$$=\frac{x(0)}{z}+\frac{x'(0)}{z^2}+\frac{x''(0)}{z^3}+\cdots$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\sum_{\nu=0}^{\infty}x^{(\nu)}(0)\int_{z=\gamma_0-j\infty}^{z=\gamma_0+j\infty}\frac{e^{zt}}{z^{\nu+1}}dz$$

となる。この式と(1)式を比較すれば

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma_0-j\infty}^{\gamma_0+j\infty}\frac{e^{zt}}{z^{\nu+1}}dz=\frac{t^{\nu}}{\nu!}$$

でなければならない。

4. むすび

本稿では先づ，波形を時間領域で検討する手段の1つとして，波形がテイラー展開の形で表現されるとすれば，その係数は系の特性を示す微分方程式と初期条件に対して単純な対応にあることを明らかにした。

次に周波数特性を求めるためのフーリエ変換について考究した。すなわち波形$x(t)$の周期と同期する任意の関数$y(t)$を用いて同期的複素関数$f(z)$を導入し，そのテイラー展開式からフーリエとラプラス変換を導き出した。特に$y(t)$の選定によって

$\gamma=0$……………………フーリエ変換

$\gamma=\gamma_0 t$…………ラプラス変換

ができるという考え方，積分領域については，tあるいはωを別々に指定するのではなく，$\omega t=\varphi$を中心とする考え方などによって，これらの変換の内容を従来とは別の視野から明らかにした。

数学的表現，記述はきわめて厳正さを欠くものであるが，以上のような点で筆者らの意図が判ぜられるならば幸いである。