

## 有限要素法によるコンクリート構造物の応力解析について

西頭 常彦\*

### Stress Analysis of Solid Concrete Structures by the Finite Element Method

Tsunehiko Saito\*

In stress analyzing the massive concrete structures, for example, dam, abutment, vessel, etc., conventionally it has been employed the beam theory. However, it is not suitable to estimate safety or utility life of solid structures. In such a case, generally we be driven by an impuls to know the stress distribution upon actual phenomena. Those stresses can be clarified by three dimensional analysis. That analysis can be performed speedy by using the Finite element method and digital computer.

First of all, a concrete dam is divided into many tetrahedral elements. Deformation of each element is assumed to be a linear combination function (defined as the shape function). Then a potential energy  $\Pi$  is calculated and treated with the Variational Principles in order to obtain the amount of deformation and the stress intensity.

#### 1. はじめに

コンクリート構造物のなかで、とくにマッシュ  
グなもの、たとえば、ダム、橋台あるいは原子  
炉などでもその設計にさいして、これらをはり

\*土木工学科

構造としてモデル化し、その応力解析を行うこ  
とができる。また、そのような解析が必要な場  
合がある。しかし、構造設計のさいに最も重要  
である安全性の検討、あるいは耐用命数の推定  
においてはこれらをはり構造として取り扱うこ  
とには無理があると思われる。このような場合、

それは一つの近似解ではあるが、これらのマッシュな構造物を多くの四面体要素に分割することによって三次元の応力解析ができ、そして、その解の精度を上げることができる有限要素法が適切であると考えられる。

また、著者はすでに有限要素法を用いてコンクリートスラブの設計<sup>(1)</sup>を行ったが、このような比較的薄い構造であっても、荷重の方向が同時に複数となると、一般には二次元問題として取り扱うことはできない。このような場合には、四面体要素を用いた有限要素法が適切であると考えられる。

## 2. 四面体要素を用いたコンクリート構造物の応力解析

### 2.1 四面体要素分割

マッシュな構造物の三次元応力解析のために、R.J. Meloshは構造物をまず、長方形プリズム<sup>(2)</sup>に分割している。ここではマッシュな構造物の一例としてアーチダムについて、これを図-1のように分割し、そのなかの任意の五面体要素<sup>\*</sup>Nをとり出してこれを図-2とする。図-2に示したプリズムは3つの四面体要素に分割できる。

当初の段階としては、上記の3つの四面体要素のうち、たとえば、要素7, 8, 21, 11をとり出してこれを一般の形とし図-3のように表わす。そしてこれについて改めて1, 2, 3, 4の節点番号をつけて、その要素の

たわみの形を仮定し、剛性マトリックスを計算  
\*本解析の応用段階として、このプリズムについての剛性マトリックスを計算することができる。

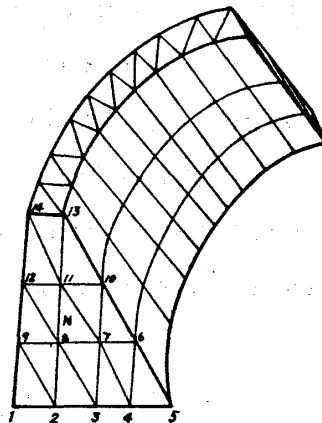


図-1 アーチダムの要素分割例

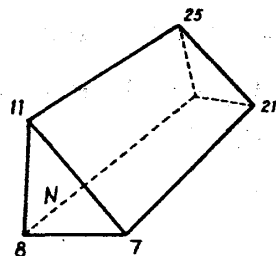


図-2 五面体要素

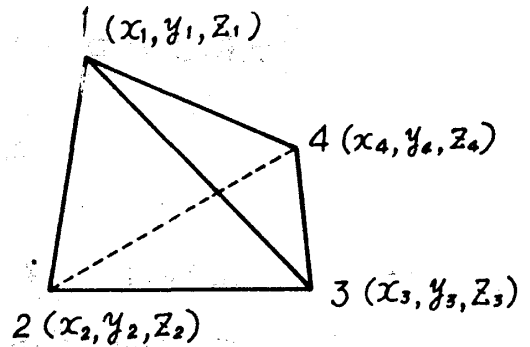


図-3 四面体要素

し、応力解析を行なうこととする。

### 2.2 四面体要素の形状関数

周知のように構造物のたわみの形が定まると、曲げモーメントおよびせん断力が求められ、応力解析ができる。はり理論では、はりの微小要素について力のつり合いを示す微分方程式を解くことによって、全体のたわみの形が求められる。本研究においては、分割された一つの四面体要素について、たわみの形、すなわち形状関数を仮定する。

この場合、たわみの形は、一次式よりも二次式で仮定した方が解の精度は良好であることは言うまでもないことであるが、ここでは、電子計算機(MELCOM-500)の容量と速度などを考慮して一次式で仮定することとする

著者は、すでに弾性床上的コンクリートスラブの応力解析を有限要素法によって行なった。この解析において剛性マトリックスを計算するさいの積分を容易にするために面積座標<sup>(3)</sup>を用いている。本解析においても、面積座標の考え方を拡張した体積座標を用いることとする。そしてこの座標の取り扱いについては文献(4)を参考にする。

すなわち、四面体要素内の任意の一点P(x, y, z)の座標をつぎの図-4に示すように体

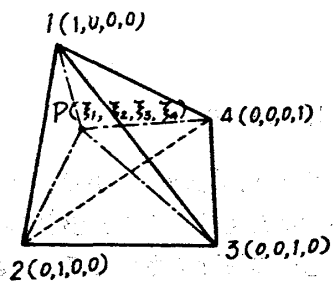


図-4 四面体要素の体積座標

積比 $\xi$ で表わすとつぎのようになる。

$$\xi_1 = \frac{\text{四面体 P 2 3 4}}{\text{四面体 1 2 3 4}} \dots\dots\dots (1)$$

$$\xi_2 = \frac{\text{四面体 P 1 3 4}}{\text{四面体 1 2 3 4}} \dots\dots\dots (2)$$

$$\xi_3 = \frac{\text{四面体 P 1 2 4}}{\text{四面体 1 2 3 4}} \dots\dots\dots (3)$$

$$\xi_4 = \frac{\text{四面体 P 1 2 3}}{\text{四面体 1 2 3 4}} \dots\dots\dots (4)$$

すなわち、P点の位置は4つの体積比 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ で決定され、その性質からつぎの式がかかる。

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1 \dots\dots\dots (5)$$

上記の $\xi$ は点Pを表わす体積座標と呼ばれ、この座標と同様に点Pを表わす直角座標との間には文献5)にならって、つぎのような関係式をかくことができる。

$$\xi_1 = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z \dots\dots (6)$$

$$\xi_2 = a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z \dots\dots (7)$$

$$\xi_3 = a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z \dots\dots (8)$$

$$\xi_4 = a_4 + b_4 x + c_4 y + d_4 z \dots\dots (9)$$

上の4つの式に、それぞれ頂点の座標を入れると、たとえば、 $\xi_1$ は頂点1では1、頂点2、3、4ではそれぞれ0の値をとり、直角座標は頂点1で $x_1, y_1, z_1$ の値をとるから、つぎのようにマトリックスで表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \dots\dots (10)$$

となり、したがって

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \dots\dots (11)$$

と表わすことができ、式(6)、(7)、(8)および(9)のなかの未定定数 $a_i, b_i, c_i, d_i$ は、四面体の頂点の座標を用いて表わすことができる。

そこで、図-4に示した四面体要素内の任意の一点P ( $x, y, z$ )の変位 $u, v, w$  (それぞれ $x, y, z$ 方向)を四面体の頂点の座標

と点Pの占める体積座標との積で表わし、これをつぎのように仮定する。

$$u = \sum_{i=1}^4 u_i \xi_i \dots\dots\dots (12)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 v_i \xi_i \dots\dots\dots (13)$$

$$w = \sum_{i=1}^4 w_i \xi_i \dots\dots\dots (14)$$

上に示した $u, v, w$ が四面体要素の形状関数と呼ばれるものである。

### 2.3 四面体要素のポテンシャルエネルギー

図-1に示したアーチダムを多くの三角形プリズムに分割し、これから取出した一つの四面体要素について、つぎのようにポテンシャルエネルギーが求められる。

すなわち、四面体要素内の物体力、要素の境界に作用する力および要素への集中荷重によって要素についてなされる仕事は、つぎのように表わされる。

いま $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ を単位体積あたりの体積力の $x, y, z$ 成分とし、 $\bar{X}a, \bar{Y}a, \bar{Z}a$ を単位面積あたりに作用する表面力の $x, y, z$ 成分、 $\bar{X}ci, \bar{Y}ci, \bar{Z}ci$ を節点 $i$ に作用する集中荷重のそれぞれ、 $x, y, z$ 成分、 $u, v, w$ を各節点におけるそれぞれ、 $x, y, z$ 方向の変位とすれば、物体力、表面力および集中力による仕事は、それぞれつぎのように表わされる。

物体力による仕事は

$$\int_V (\bar{X} \cdot u + \bar{Y} \cdot v + \bar{Z} \cdot w) dV \dots\dots\dots (15)$$

表面力による仕事は

$$\int_S (\bar{X}a \cdot u + \bar{Y}a \cdot v + \bar{Z}a \cdot w) ds \dots\dots\dots (16)$$

集中力による仕事は

$$\bar{X}ci \cdot u + \bar{Y}ci \cdot v + \bar{Z}ci \cdot w \dots\dots\dots (17)$$

である。

つぎに、要素内の微小体積 $dx \cdot dy \cdot dz$ のなかにたくわえられるひずみエネルギー<sup>(6)</sup>はつぎの式で表わされる。

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\delta_x \cdot \epsilon_x + \delta_y \cdot \epsilon_y + \delta_z \cdot \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}) dx dy dz \dots\dots\dots (18)$$

したがって、四面体要素のもつポテンシャルエネルギーは、上式(15)、(16)、(17)および(18)から、つ

ぎの汎関数  $\Pi^{(7)}$  として表わされる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iiint (\delta x \cdot \varepsilon_x + \delta y \cdot \varepsilon_y + \delta z \cdot \varepsilon_z \\ & + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}) \\ & dx dy dz - \int_V (\bar{X} \cdot u + \bar{Y} \cdot v + \bar{Z} \cdot w) \\ & dv - \int_S (\bar{X}a \cdot u + \bar{Y}a \cdot v + \bar{Z} \cdot w) ds - \\ & (\bar{X}ci \cdot u + \bar{Y}ci \cdot v + \bar{Z}ci \cdot w) \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

2.4 ポテンシャルエネルギーの変位成分による表現

式(19)の第1項はひずみと応力の関係式を用いて変位成分で表わすことができ、表面力はすべて集中力に変換することができるから、式(19)は結局つぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_V \frac{G\nu}{(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dV + \\ & \int_V G \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} dV + \\ & \int_V \frac{G}{2} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dV - \\ & \int_V (\bar{X} \cdot u + \bar{Y} \cdot v + \bar{Z} \cdot w) dV - \\ & \sum_{i=1}^4 (\bar{X}ci \cdot u_i + \bar{Y}ci \cdot v_i + \bar{Z}ci \cdot w_i) \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

ここに、 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

E : コンクリートのヤング率  
 ν : コンクリートのポアソン比

である。

2.5 四面体要素の頂点の座標によるひずみエネルギーの表現

四面体要素内の任意の一点P (x, y, z) の変位 u, v, w は式(12), (13)および(14)からつぎのように表わすことができる。

$$\begin{aligned} u = & (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z) \cdot u_1 + \\ & (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z) \cdot u_2 + \\ & (a_3 + b_3x + c_3y + d_3z) \cdot u_3 + \\ & (a_4 + b_4x + c_4y + d_4z) \cdot u_4 + \\ & \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = & (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z) \cdot v_1 + \\ & (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z) \cdot v_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_3 + b_3x + c_3y + d_3z) \cdot v_3 + \\ & (a_4 + b_4x + c_4y + d_4z) \cdot v_4 + \\ & \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = & (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z) \cdot w_1 + \\ & (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z) \cdot w_2 + \\ & (a_3 + b_3x + c_3y + d_3z) \cdot w_3 + \\ & (a_4 + b_4x + c_4y + d_4z) \cdot w_4 + \\ & \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

上の式(21), (22)および(23)はそれぞれ、つぎのように表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 b_i u_i = \mathbf{b} \mathbf{u} \dots\dots\dots(24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 c_i v_i = \mathbf{c} \mathbf{v} \dots\dots\dots(25)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 d_i w_i = \mathbf{d} \mathbf{w} \dots\dots\dots(26)$$

上の式(24), (25)および(26)における係数マトリックス **b**, **c** および **d** は、式(11)から、それぞれ、つぎのように表わされる。

$$\mathbf{b} = \beta / 6V = \sum_{i=1}^4 \beta_i / 6V \dots\dots\dots(27)$$

$$\mathbf{c} = \gamma / 6V = \sum_{i=1}^4 \gamma_i / 6V \dots\dots\dots(28)$$

$$\mathbf{d} = \delta / 6V = \sum_{i=1}^4 \delta_i / 6V \dots\dots\dots(29)$$

上の式(27), (28), (29)における  $\beta$ ,  $\gamma$  および  $\delta$  はそれぞれつぎのように表わされる。

$$\beta_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

$$\beta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_3 & y_4 & y_1 \\ z_3 & z_4 & z_1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots(31)$$

$$\beta_3 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_4 & y_1 & y_2 \\ z_4 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots(32)$$

$$\beta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots(33)$$

$$\gamma_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

$$\gamma_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_3 & z_4 & z_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

$$\gamma_3 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_4 & z_1 & z_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (36)$$

$$\gamma_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (37)$$

$$\delta_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (38)$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_4 & x_1 \\ y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (39)$$

$$\delta_3 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_4 & x_1 & x_2 \\ y_4 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (40)$$

$$\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (41)$$

したがって、式(20)の第1項から第3項までに示したひずみエネルギーを四面体要素の頂点の座標と頂点の変位で表わすことができた。なお、式(27)、(28)および(29)のなかのVは四面体要素の体積である。

### 2.6 四面体要素の剛性マトリックスの誘導

文献8)を参照するとき、アーチダムの解析の基礎としての汎関数IIがつぎのように表わされるであろうことが類推される。

すなわち、 $\tilde{\mathbf{q}}$ を図-1で示した各節点のx, y, z方向の変位、 $\tilde{\mathbf{f}}$ を節点に作用する荷重、 $\tilde{\mathbf{K}}$ を各要素の剛性マトリックスから得られた構造全体の剛性マトリックスとすれば、アーチダム構造全体のポテンシャルエネルギーはつぎのように表わされるであろう。

$$\tilde{\Pi} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \cdot \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{f}}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}$$

そこで、式(20)の積分を行って、要素について、上の式の形が成立するように変形ができればよい。そのために、式(20)の第1項から第5項までつぎのように変形を試みる。

まず式(20)の第1項については、

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 &= \left\{ \sum_{i=1}^4 (b_i u_i + c_i v_i + d_i w_i) \right\}^2 \\ &= (\mathbf{b}^T \mathbf{u} + \mathbf{c}^T \mathbf{v} + \mathbf{d}^T \mathbf{w})^2 \\ &= \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{b} \mathbf{b}^T & \mathbf{b} \mathbf{c}^T & \mathbf{b} \mathbf{d}^T \\ \mathbf{c} \mathbf{b}^T & \mathbf{c} \mathbf{c}^T & \mathbf{c} \mathbf{d}^T \\ \mathbf{d} \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \mathbf{c}^T & \mathbf{d} \mathbf{d}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

となる。

式(20)の第2項については

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 &= (\mathbf{b}^T \mathbf{u})^2 + (\mathbf{c}^T \mathbf{v})^2 + (\mathbf{d}^T \mathbf{w})^2 \\ &= \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{b} \mathbf{b}^T & & \\ & \mathbf{c} \mathbf{c}^T & \\ & & \mathbf{d} \mathbf{d}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

となる。

式(20)の第3項については

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 &= (\mathbf{d}^T \mathbf{v} + \mathbf{c}^T \mathbf{w})^2 \\ &= \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} & \mathbf{d} \mathbf{d}^T & \mathbf{d} \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{c} \mathbf{d}^T & \mathbf{c} \mathbf{c}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 &= (\mathbf{b}^T \mathbf{w} + \mathbf{d}^T \mathbf{u})^2 \\ &= \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} & & \mathbf{d} \mathbf{d}^T \\ & & \mathbf{d} \mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} \mathbf{d}^T & & \mathbf{b} \mathbf{b}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = (\mathbf{c}^T \mathbf{u} + \mathbf{b}^T \mathbf{v})^2$$

$$= \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{c}\mathbf{c}^T & \mathbf{c}\mathbf{b}^T \\ \mathbf{b}\mathbf{c}^T & \mathbf{b}\mathbf{b}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

上の式(44), (45)および(46)をまとめると, 結局, 第3項はつぎのように表わされる。

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$= \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{d}\mathbf{d}^T & \mathbf{c}\mathbf{b}^T & \mathbf{d}\mathbf{b}^T \\ \mathbf{b}\mathbf{c}^T & \mathbf{d}\mathbf{d}^T + \mathbf{b}\mathbf{b}^T & \mathbf{d}\mathbf{c}^T \\ \mathbf{b}\mathbf{d}^T & \mathbf{c}\mathbf{d}^T & \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbf{c}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

となる。

ここで, 式(42), (43)および(47)をつぎのように表わし, 式(20)の第1項から第3項までの計算を行うとつぎのようになる。

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}\mathbf{b}^T & \mathbf{b}\mathbf{c}^T & \mathbf{b}\mathbf{d}^T \\ \mathbf{c}\mathbf{b}^T & \mathbf{c}\mathbf{c}^T & \mathbf{c}\mathbf{d}^T \\ \mathbf{d}\mathbf{b}^T & \mathbf{d}\mathbf{c}^T & \mathbf{d}\mathbf{d}^T \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}\mathbf{b}^T & & \\ & \mathbf{c}\mathbf{c}^T & \\ & & \mathbf{d}\mathbf{d}^T \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{d}\mathbf{d}^T & \mathbf{c}\mathbf{b}^T & \mathbf{d}\mathbf{b}^T \\ \mathbf{b}\mathbf{c}^T & \mathbf{d}\mathbf{d}^T + \mathbf{b}\mathbf{b}^T & \mathbf{d}\mathbf{c}^T \\ \mathbf{b}\mathbf{d}^T & \mathbf{c}\mathbf{d}^T & \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbf{c}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (51)$$

$$\int_V \frac{G\nu}{(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 dV +$$

$$\int_V G \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} dV +$$

$$\int_V \frac{G}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right\} dV = \frac{G\nu}{1-2\nu} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{q} \cdot V$$

$$+ G \mathbf{q}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{q} \cdot V + \frac{G}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_3 \mathbf{q} \cdot V \quad (52)$$

上の(52)の右辺を変形すると

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left\{ 2VG \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_3 \right) \right\} \mathbf{q} \quad (53)$$

となり,  $\left\{ \right\}$  内を  $\mathbf{K}$  で表わすと, 式(53)は結局

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (54)$$

となる。上の式(54)における  $\mathbf{K}$  が四面体要素の剛性マトリックスと呼ばれるものである。

つぎに, 式(20)の第4項については

$$\int_V (\bar{X} \cdot u + \bar{Y} \cdot v + \bar{Z} \cdot w) dV =$$

$$\bar{X} \int_V u dV + \bar{Y} \int_V v dV + \bar{Z} \int_V w dV$$

$$= \bar{X} \int_V \sum_{i=1}^4 u_i \xi_i dV + \bar{Y} \int_V \sum_{i=1}^4 v_i \xi_i dV +$$

$$\bar{Z} \int_V \sum_{i=1}^4 w_i \xi_i dV$$

$$= \frac{V}{4} (\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{Z}}) \quad (55)$$

結局, 体積力は四面体要素の節点における力に変換されつぎのように表わされる。

$$\frac{V}{4} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Z}} \end{Bmatrix} = \mathbf{q}^T \mathbf{f}_1 \quad (56)$$

つぎに式(20)の第5項については

$$\sum_{i=1}^4 (\bar{X}_i u_i + \bar{Y}_i v_i + \bar{Z}_i w_i) =$$

$$= \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}}_c + \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{Y}}_c + \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{Z}}_c$$

$$= \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_c \\ \bar{\mathbf{Y}}_c \\ \bar{\mathbf{Z}}_c \end{Bmatrix} = \mathbf{q}^T \mathbf{f}_2 \quad (57)$$

である。たとえば, 上の式(56)において

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

また、式(57)において

$$\bar{\mathbf{X}}_c = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{c1} \\ \bar{X}_{c2} \\ \bar{X}_{c3} \\ \bar{X}_{c4} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots 59$$

などであるから、式(56)と(57)の  $\mathbf{f}_1$  および  $\mathbf{f}_2$  はまとめることができるので、これをつぎのように表わす。

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \quad \dots\dots\dots 60$$

上の式(60)における  $\mathbf{f}$  は等価節点力と呼ばれるものである。したがって、式(20)の第4項と第5項はまとめることができるので、つぎのように表わすことができる。

$$\int_V (\bar{X} \cdot u + \bar{Y} \cdot v + \bar{Z} \cdot w) dV + \sum_{i=1}^4 (\bar{X}_{ci} \cdot u_i + \bar{Y}_{ci} \cdot v_i + \bar{Z}_{ci} \cdot w_i) = \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad \dots\dots\dots 61$$

結局、式(64)および(61)を用いると、式(20)はつぎのように表わされる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad \dots\dots\dots 62$$

すなわち、当初に類推した式と同じ形の式が得られた。

### 2.7 コンクリート構造物の応力解析

ここでは、マッシュヴな構造物の例として、アーチダムをとりあげ、これを多くの四面体要素に分割してそのなかの任意の要素についてマトリックスの計算を行った。そこで、アーチダム全体の応力解析を行なうには、この構造全体の剛性マトリックスをつくらなければならない。これは図-1に示した要素の節点について、それぞれ関係のある剛性マトリックスを加え合わせることによって求められ、その結果を用いてつぎのように応力解析を行なうことができる。

いま、図-1に示したアーチダムの要素の剛性マトリックス  $\mathbf{K}$  を全要素について加え合わせたものを  $\tilde{\mathbf{K}}$ 、アーチダム全体の等価節点力を  $\tilde{\mathbf{f}}$ 、全体の変位を  $\tilde{\mathbf{q}}$  とすれば、水圧および自重などによるアーチダムのポテンシャルエネルギーはつぎのように表わされる。

$$\tilde{\Pi} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{f}} \quad \dots\dots\dots 63$$

外力が構造物に作用すると変位が生じるのは言うまでもないことであり、上の式(63)においては

$\mathbf{f}$  なる等価節点力によって、図-1に示した各節点の変位はつぎのようにして求められる。

すなわち、変分原理<sup>(7)</sup>の示すところによると、構造物の変形を示す幾何学的境界条件を満足するすべての許容しうる変位成分  $u, v, w$  のなかで、その正解が式(63)のポテンシャルエネルギー  $\tilde{\Pi}$  を最小にする。つまり、 $\tilde{\Pi}$  の変分は0となることからアーチダム全体の変位  $\tilde{\mathbf{q}}$  はつぎのように求められる。

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}^T) \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{f}} = 0 \quad \dots\dots\dots 64$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = 2 (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{f}} \quad \dots\dots\dots 65$$

上の式(65)より、アーチダム全体の変位  $\tilde{\mathbf{q}}$  が求められると、ダムコンクリートの応力度がつぎの式により求められる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{Bmatrix} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots 66$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots 67$$

### 3. ま と め

コンクリート構造物のなかでマッシュヴなもの<sup>(8)</sup>の応力解析の一例としてアーチダムをとりあげたが、橋台、原子炉なども本解析法で示した剛性マトリックスを用いてコンクリートの応力度を計算することができる。

周知のように、コンクリート構造物は斜め引張作用に弱く、とくに重要な構造物はその引張に対する疲労強度を考えた設計を行なわなければならない場合が多い。このような場合、コンクリート構造物をはりとして取り扱い応力度を求めるよりも、本解析法を用いて三次元の応力度を求め所要断面を決定する方が妥当であると考えられる。

また、筆者は弾性床<sup>(9)</sup>上のコンクリートスラブの設計を平面要素を用いて有限要素法解析を行なったことがある。この解析においては要素の平面に対して垂直な荷重のみを取り扱うことができたのであって、その平面に平行な、いわゆる横荷重<sup>(9)</sup>は取り扱うことができなかった。しか

し、この横荷重は無視することができない大きさとなることがあり、これによってコンクリートに引張応力度が生じる。したがってこのように、比較的薄い構造であっても三次元応力解析を必要とする場合があり、このような場合、本解析法が適切であると考えられる。

#### あ と が き

本解析はコンクリート構造物の応力解析の一つの手法を示したものであり、実際の数値解析は今後の研究に待たなければならない。なお、本文をまとめるにあたって、工学部土木工学科教授米谷先生ならびに久保田先生より有益な助言をいただいた。ここに心よりお礼を申し上げます。

#### ＜参 考 文 献＞

- 1) 西頭常彦：コンクリートスラブ式直結軌道の構造解析とその設計に関する研究，鉄道技術研究報告，No 1047，1977. 8

- 2) R. J. Melosh : Structural Analysis of Solids, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. , S.T. 4, P.P. 205~23, Aug, 1963
- 3) 西頭常彦：有限要素法による直結軌道スラブの設計について，土木学会論文報告集，第219号，P.P. 83~93，1973. 11
- 4) O. C. Zienkiewicz : The Finite Element Method , McGRAW-Hill, Third Edition
- 5) 文献 1) P. 87
- 6) S. Timoshenko : Theory of elasticity, 1934, McGRAW-Hill, P.P. 135~156
- 7) K. Washizu : Variational Method in Elasticity and Plasticity, 1968, Pergamon Press , P.P. 27~51
- 8) 文献 1) , P.P. 90~91
- 9) 文献 1) , P. 101