

二面体群 D_5 のリー微分代数について

三 川 敦

Abstract

F を標数 0 の体, G を群とする. 群代数 FG にブラケット積 $[f, g] = fg - gf$ を入れてできるリー代数 $[FG]$ の微分代数 (FG のリー微分代数という) $\text{Der}_F [FG]$ と, 群代数 FG の結合代数としての微分代数 $\text{Der}_F FG$ の 2 つの微分代数を考えることができる. この論文では, 位数 10 の二面体群 $G = D_5$ の場合に, リー微分代数についての考察を行う.

1 Introduction

F を標数 0 の体とする. $A = F[x], F[x, x^{-1}]$ に対して, 微分代数 $\text{Der}_F A$ はそれぞれ古典的 Witt 代数, centerless Virasoro 代数として良く知られているリー代数となる. その一般化も色々され ([4], [9]), さらにその自己同型群なども良く調べられている ([5], [6]). また, [2] では, A が群代数の場合が調べられている. ブラケット積 $[a, b] = ab - ba$ により A をリー代数と考えたものを $[A]$ と表すとき, $[A]$ のリー代数としての微分 (リー微分) 全体 $\text{Der}_F [A]$ についても調べることができるが, [7] では, 位数 6 の二面体群 $G = D_3$ の場合, [8] では, 位数 8 の二面体群 $G = D_4$ の場合をそれぞれ調べ, $\text{Der}_F FG$ が $\text{Der}_F [FG]$ の直和因子になっていることが分かった. この論文では, 位数 10 の二面体群 $G = D_5$ の場合のリー微分代数 $\text{Der}_F [FG]$ についての考察を行うことにする.

2 Preliminaries

この論文における記号は [7, 8] のものを使うが、読者の便宜を図り、必要な記号について説明をする。

標数 0 の体 F に対して、 A を F 上の結合代数、 L を F 上のリー代数とする。 A に対して、新しい積 $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ (\cdot は A における積) による代数を $[A]$ で表す (これは F 上のリー代数になる ([3, p.6])). F の元を成分にもつ n 次の正方行列全体 $M(n, F)$ から得られるリー代数を $gl(n, F) = [M(n, F)]$ で表し、一般線形リー代数という。また、有限群 G に対して、その元を基底とする F 上のベクトル空間に、 G の積を拡張したものを考えて得られる結合代数を群代数といい、 FG とかく。

結合代数 A の任意の元 $a, b \in A$ に対して

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$$

を満たす A の線形写像 δ を A の微分といい、その全体を $\text{Der}_F A$ とかく。そして、 F 上のリー代数 L の線形写像 δ で L の任意の元 $x, y \in L$ に対して

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

が成り立つものを L の微分といい、その全体も $\text{Der}_F L$ とかく。よって、結合代数 A に対しては、 $\text{Der}_F A$ の元と $\text{Der}_F [A]$ の元である 2 種類の微分を考えることができる。このとき、 $\text{Der}_F [A]$ の元を A のリー微分という (A の微分はリー微分となっている [7, 命題 2.1]). また、 $L^2 = \text{sp}\{[x, y] \mid x, y \in L\}$, $Z(L) = \{x \in L \mid \text{任意の } y \in L \text{ に対して } [x, y] = 0\}$ を、それぞれ L の導来イデアル、 L の中心といい、ともにリー代数になるが、これらに対して、次の補題はよく知られている ([7, 命題 2.1]).

補題 2.1 $\delta \in \text{Der}_F L$ に対して、

$$\delta(L^2) \subset L^2, \delta(Z(L)) \subset Z(L)$$

が成り立つ。よって $\delta|_{L^2} \in \text{Der}_F L^2$, $\delta|_{Z(L)} \in \text{Der}_F Z(L)$ である。 ■

3 The case of the dihedral group D_5

群 $D_5 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ ($s^2 = r^5 = (sr)^2 = 1$) が位数 10 の二面体群である。これからできる群代数を以下 $A = FD_5$ とする。

まず, $\text{Der}_F[A]$ について考える。このとき, $L = [A]$ の基底 $\{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ のブラケット積で 0 にならないものは ($[y, x] = -[x, y]$ のタイプを除いて), 次の 30 種類である。

$$\begin{array}{lll}
 [r, s] = sr^4 - sr, & [r, sr] = s - sr^2, & [r, sr^2] = sr - sr^3, \\
 [r, sr^3] = sr^2 - sr^4 & [r, sr^4] = sr^3 - s & [r^2, s] = sr^3 - sr^2, \\
 [r^2, sr] = sr^4 - sr^3, & [r^2, sr^2] = s - sr^4, & [r^2, sr^3] = sr - s, \\
 [r^2, sr^4] = sr^2 - sr, & [r^3, s] = sr^2 - sr^3, & [r^3, sr] = sr^3 - sr^4, \\
 [r^3, sr^2] = sr^4 - s, & [r^3, sr^3] = s - sr, & [r^3, sr^4] = sr - sr^2, \\
 [r^4, s] = sr - sr^4, & [r^4, sr] = sr^2 - s, & [r^4, sr^2] = sr^3 - sr, \\
 [r^4, sr^3] = sr^4 - sr^2, & [r^4, sr^4] = s - sr^3, & [s, sr] = r - r^4, \\
 [s, sr^2] = r^2 - r^3, & [s, sr^3] = r^3 - r^2, & [s, sr^4] = r^4 - r, \\
 [sr, sr^2] = r - r^4, & [sr, sr^3] = r^2 - r^3, & [sr, sr^4] = r^3 - r^2, \\
 [sr^2, sr^3] = r - r^4, & [sr^2, sr^4] = r^2 - r^3, & [sr^3, sr^4] = r - r^4.
 \end{array}$$

よって, L の導来イデアル L^2 は

$$L^2 = \{a_1(r - r^4) + a_2(r^2 - r^3) + \sum b_i sr^i \mid a_i, b_j \in F, \sum b_i = 0\}$$

で, $\dim L^2 = 6$ であることがわかる。次に中心 $Z(L)$ を考えよう。そのために次の補題を利用する。

補題 3.1 群 G が 2 元 x, y で生成されているとし, $A = FG, L = [A]$ とする。このとき, $z \in L$ が L の中心の元であるための必要十分条件は, 等式 $[x, z] = [y, z] = 0$ が成り立つことである。

(証明) 等式

$$[xy, z] = [x, z]y + x[y, z]$$

二面体群 D_5 のリー微分代数について

を用いて帰納的に証明できる。 ■

これを用いて、

$$e, r + r^4, r^2 + r^3, s + sr + sr^2 + sr^3 + sr^4 \in Z(L)$$

であることが簡単な計算によりわかる。よって、 $Z(L)$ の一般の元 z を考えるとき、 $z = ar + br^2 + cs + dsr + fsr^2 + gsr^3$ ($a, b, c, d, f, g \in F$) の形をしていると仮定できる。このとき、

$$\begin{aligned} 0 = [r, z] &= c(sr^4 - sr) + d(s - sr^2) + f(sr - sr^3) + g(sr^2 - sr^4) \\ &= ds + (f - c)sr + (g - d)sr^2 - fsr^3 + (c - g)sr^4 \end{aligned}$$

より、 $d = f = 0, f = c, g = d, c = g \quad \therefore c = d = f = g = 0$ 。したがって、 $z = ar + br^2$ の形と仮定でき、さらに

$$0 = [s, z] = a(sr - sr^4) + b(sr^2 - sr^3) = asr + bsr^2 - bsr^3 - asr^4.$$

よって、 $a = b = 0$ となり、 $z = 0$ 。以上より、始めに明示した元以外に $Z(L)$ には 1 次独立なものがないので、 $\dim Z(L) = 4$ で

$$Z(L) = \text{sp}\{e, r + r^4, r^2 + r^3, s + sr + sr^2 + sr^3 + sr^4\}$$

となる。したがって、 $L = L^2 \oplus Z(L)$ となるので、補題 3.2 より

$$\text{Der}_F L \cong \text{Der}_F L^2 \oplus \text{Der}_F Z(L)$$

が成り立つ。以上より、次の定理が成り立つ。

定理 3.1 $G = D_5, A = FG, L = [A]$ とすると、次の同型が成り立つ。

$$\text{Der}_F L \cong \text{Der}_F L^2 \oplus \mathfrak{gl}(4, F).$$

■
 $G = D_3, D_4$ の場合は、 L^2 が半単純となり、構造としては非常に簡単であった ([7, 8])。 $G = D_5$ の場合は、 L^2 は半単純とならないことなどをこれから見ていこう。まずは可解でないことから。

命題 3.1 $A = FD_5$, $L = [A]$ とする. このとき, $(L^2)^2 = L^2$ である.

(証明) $s - sr, s - sr^2, s - sr^3 \in L^2$ より,

$$\begin{aligned} [s - sr, s - sr^2] &= -(r^2 - r^3) - (r^4 - r) + (r - r^4) \\ &= -(r^2 - r^3) + 2(r - r^4) \in (L^2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [s - sr, s - sr^3] &= -(r^3 - r^2) - (r^4 - r) + (r^2 - r^3) \\ &= 2(r^2 - r^3) + (r - r^4) \in (L^2)^2 \end{aligned}$$

よって, $r^2 - r^3, r - r^4 \in (L^2)^2$. そして, $s - sr^4 \in L^2$ であるので,

$$\begin{aligned} [r^2 - r^3, s - sr] &= (sr^3 - sr^2) - (sr^4 - sr^3) - (sr^2 - sr^3) + (sr^3 - sr^4) \\ &= -2(sr^2 - sr^3) + 2(sr^3 - sr^4) \in (L^2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [r^2 - r^3, s - sr^2] &= (sr^3 - sr^2) - (s - sr^4) - (sr^2 - sr^3) + (sr^4 - s) \in (L^2)^2 \\ &= -2(sr^2 - sr^3) - 2(s - sr^4) \in (L^2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [r^2 - r^3, s - sr^3] &= (sr^3 - sr^2) - (sr - s) - (sr^2 - sr^3) + (s - sr) \\ &= -2(sr^2 - sr^3) + 2(s - sr) \in (L^2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [r^2 - r^3, s - sr^4] &= (sr^3 - sr^2) - (sr^2 - sr) - (sr^2 - sr^3) + (sr - sr^2) \\ &= -2(sr^2 - sr^3) + 2(sr - sr^2) \in (L^2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [r - r^4, s - sr] &= (sr^4 - sr) - (s - sr^2) - (sr - sr^4) + (sr^2 - s) \\ &= -2(sr - sr^4) - 2(s - sr^2) \in (L^2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [r - r^4, s - sr^2] &= (sr^4 - sr) - (sr - sr^3) - (sr - sr^4) + (sr^3 - sr) \\ &= -2(sr - sr^4) - 2(sr - sr^3) \in (L^2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [r - r^4, s - sr^3] &= (sr^4 - sr) - (sr^2 - sr^4) - (sr - sr^4) + (sr^4 - sr^2) \\ &= -2(sr - sr^4) - 2(sr^2 - sr^4) \in (L^2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [r - r^4, s - sr^4] &= (sr^4 - sr) - (sr^3 - s) - (sr - sr^4) + (s - sr^3) \\ &= -2(sr - sr^4) + 2(s - sr^3) \in (L^2)^2. \end{aligned}$$

これらを用いて, $(L^2)^2$ による商空間の計算をしよう. そのために, それぞれの式の s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 の係数を並べて行列を作ると, 次の 8 行 5 列の行列

二面体群 D_5 のリー微分代数について

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

が得られるが、この行列に行の基本変形を行っていくと次の行列が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $\dim(L^2)^2 = 4$ であることが分かり、 $(L^2)^2 = L^2$ が示せる。 ■

これにより、 L^2 は可解でないことがわかった。しかし、半単純という訳でもない。

命題 3.2 $A = FD_5, L = [A]$ とする。このとき、 L^2 は半単純でない。

(証明) 背理法でこれを証明しよう。半単純だとすると、 $\dim L^2 = 6$ なので、

$$L^2 = K_1 \oplus K_2 \quad (K_i: 3 \text{次元単純リー代数})$$

とかける。ここで、 $[K_1, K_2] = 0$ であることを注意しておく。簡単な計算で

$$[s - sr, sr^2 - sr^4] = 0, [sr^2 - sr^3, sr - sr^4] = 0$$

が成り立つことが分かるが,

$$s - sr = a_1 + a_2, \quad sr^2 - sr^4 = b_1 + b_2 \quad (a_i, b_i \in K_i)$$

と, 成分の和でそれぞれ表したとき,

$$0 = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] = [a_1, b_1] + [a_2, b_2]$$

となるので, $[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = 0$ だが, K_i は 3 次元単純リー代数なので, $a_1 = 0$ か $b_1 = 0$, そして, $a_2 = 0$ か $b_2 = 0$ が成り立つ. よって, $a_1 = 0, b_2 = 0$ か $a_2 = 0, b_1 = 0$ のいずれかが成り立つ. したがって,

$$s - sr \in K_1, \quad sr^2 - sr^4 \in K_2 \text{ または, } s - sr \in K_2, \quad sr^2 - sr^4 \in K_1$$

のいずれかが成り立つ. 同様に,

$$sr^2 - sr^3 \in K_1, \quad sr^2 - sr^4 \in K_2 \text{ または, } sr^2 - sr^3 \in K_2, \quad sr^2 - sr^4 \in K_1$$

のいずれかが成り立つ. したがって,

$$[s - sr, sr^2 - sr^3] = 0, \quad [s - sr, sr - sr^4] = 0$$

が成り立たないといけませんが, 簡単な計算により, これらはともに 0 ではないので矛盾が得られる. 以上より, L^2 は半単純ではない. ■

References

- [1]C. W. Curtis and I. Reiner *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience, New York, 1962
- [2]T. Ikeda and N. Kawamoto *On derivation algebras of group algebras*, Nonassociative Algebras and its Applications, 188-192, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994
- [3]N. Jacobson *Lie Algebras*, Interscience, New York, 1962
- [4]N. Kawamoto *Generalizations of Witt algebras over a field of characteristic zero*, Hiroshima Math. J., **16** (1986), 417-426
- [5]— *On G-graded automorphisms of generalized Witt algebras*, Contemp. Math., **184** (1995), 225-230

二面体群 D_5 のリー微分代数について

- [6]N. Kawamoto, A. Mitsukawa, K-B. Nam and M-O. Wang *The automorphisms of generalized Witt type Lie algebras*, J. Lie Theory, **13**(2003), 573-578
- [7]A. Mitsukawa 群代数のリー微分代数について, 福山大学経済学論集, **30**(2006), 29-34
- [8] — 群代数のリー微分代数について (2), 福山大学経済学論集, **32**(2007), 133-137
- [9]K-B. Nam *Generalized W and H type Lie algebras*, Algebra Colloq., **6** (1999), 329-340