# 群代数のリー微分代数について（2）

三　川　　　敦


## Abstract

$F$を標数0の体，$G$を群とする．群代数$FG$にブラケット積$[f, g] = fg - gf$を入れてできるリー代数$[FG]$の微分代数($FG$のリー微分代数という)$\mathrm{Der}_F[FG]$と，群代数$FG$の結合代数としての微分代数$\mathrm{Der}_F FG$の2つの微分代数を考えることができる．位数8の二面体群$G = D_4$の場合に，$\mathrm{Der}_F[FD_4]$を計算し，2つの微分代数の構造についての考察を行った．


## 1 Introduction

$F$を標数0の体とする．$A = F[x], F[x, x^{-1}]$に対して，微分代数$\mathrm{Der}_F A$はそれぞれ古典的Witt代数，centerless Virasoro代数として良く知られているリー代数となる．その一般化も色々され([4], [8])，さらにその自己同型群なども良く調べられている([5], [6])．また，[2]では，$A$が群代数の場合が調べられている．ブラケット積$[a, b] = ab - ba$により$A$をリー代数と考えたものを$[A]$と表すとき，$[A]$のリー代数としての微分(リー微分)全体$\mathrm{Der}_F[A]$についても調べることができるが，[7]では，位数6の二面体群$G = D_3$の場合を調べた．この論文では，位数8の二面体群$G = D_4$の場合のリー微分代数$\mathrm{Der}_F[FG]$についての考察を行うことにする．

## 2 Preliminaries

この論文における記号は前回[7]のものを使うが，読者の便宜を図り，必要な記号について説明をする．

標数0の体$F$に対して，$A$を$F$上の結合代数，$L$を$F$上のリー代数とする．そして，代数系の積を忘れて単にベクトル空間として考える場合はアンダーラインを付けて，それぞれ$\underline{A}$，$\underline{L}$と表すことにする．

$F$上の結合代数$A$に対して，新しい積$[a, b] = a\cdot b - b\cdot a$（$\cdot$は$A$における積）による代数を$[A]$で表す（これは$F$上のリー代数になる（[3, p.6]））．$F$の元を成分にもつ$n$次の正方行列全体$M(n, F)$から得られるリー代数を$gl(n, F) = [M(n, F)]$で表し，一般線形リー代数という．同様に，$F$上のベクトル空間$V$の1次変換全体$\mathrm{End}_F V$から得られるリー代数を$gl(V) = [\mathrm{End}_F V]$で表し，これも一般線形リー代数といい，トレースが0の$n$次の正方行列全体から得られるリー代数を$sl(n, F)$で表し，特殊線形リー代数という．また，有限群$G$に対して，その元を基底とする$F$上のベクトル空間に，$G$の積を拡張したものを考えて得られる結合代数を群代数といい，$FG$とかく．

結合代数$A$の任意の元$a, b \in A$に対して

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$$

を満たす$A$の線形写像$\delta$を$A$の微分といい，その全体を$\mathrm{Der}_F A$とかく．そして，$F$上のリー代数$L$の線形写像$\delta$で$L$の任意の元$x, y \in \mathrm{L}$に対して

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

が成り立つものを$L$の微分といい，その全体も$\mathrm{Der}_F L$とかく．よって，結合代数$A$に対しては，$\mathrm{Der}_F A$の元と$\mathrm{Der}_F [A]$の元である2種類の微分を考えることができる．このとき，$\mathrm{Der}_F [A]$の元を$A$の**リー微分**という．また，$L^2 = sp\{[x, y] | x, y \in L\}$，$Z(L) = \{x \in L \mid$ 任意の$y \in L$に対して$[x, y]=0\}$を，それぞれ$L$の導来イデアル，$L$の中心といい，ともにリー代数になるが，これらに対して，次の補題はよく知られている（証明は，例えば[7, 補題2.2]を参照）．

**補題 2.1**　$\delta \in \mathrm{Der}_F L$に対して，

$$\delta(L^2) \subset L^2, \delta(Z(L)) \subset Z(L)$$

が成り立つ．よって $\delta|_{L^2} \in \mathrm{Der}_F L^2$ , $\delta|_{Z(L)} \in \mathrm{Der}_F Z(L)$ である． ■

$a \in A$ に対して，$\mathrm{ad}\, a \in \mathrm{End}_F \underline{A}$ を

$$\mathrm{ad}\, a\,(b) = ab - ba \; (b \in A)$$

で定義し，$x \in L$ に対して，$\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{End}_F \underline{L}$ を

$$\mathrm{ad}\, x\,(y) = [x, y] \; (y \in L)$$

で定義する．このとき，簡単な計算により $\mathrm{ad}\, a \in \mathrm{Der}_F A$, $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{Der}_F L$ である事がわかる．$\mathrm{ad}\, a$, $\mathrm{ad}\, x$ の形の微分を内部微分といい，その全体をそれぞれ $\mathrm{Inn}_F A$, $\mathrm{Inn}_F L$ とかく．$\mathrm{Der}_F A$, $\mathrm{Der}_F L$ はそれぞれ $\mathrm{End}_F \underline{A}$, $\mathrm{End}_F \underline{L}$ の部分空間ではあるが，結合代数にはならない．しかし，簡単な計算により，それぞれ $gl(\underline{A})$, $gl(\underline{L})$ の部分リー代数になることがわかる ([3, p.8])．このとき，$A$ の微分とリー微分について，次の命題が成り立つ．

**命題 2.1**　[7, 命題 2.1]

$$\mathrm{Inn}_F A = \mathrm{Inn}_F [A] \leq \mathrm{Der}_F A \leq \mathrm{Der}_F [A]$$

が成り立つ． ■

## 3　The case of the dihedral group $D_4$ of order 8

群 $D_4 = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ $(s^2 = r^4 = (sr)^2 = 1)$ が位数 8 の二面体群である．これからできる群代数を以下 $A = FD_4$ とする．

まず，$\mathrm{Der}_F [A]$ について考える．このとき，$L = [A]$ の基底 $\{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ のブラケット積で 0 にならないものは ($[y, x] = -[x, y]$ を除いて)，次の 12 種類である．

$$
\begin{aligned}
&[r, s] = sr^3 - sr, && [r, sr] = s - sr^2,\\
&[r, sr^2] = sr - sr^3, && [r, sr^3] = sr^2 - s,\\
&[r^3, s] = sr - sr^3, && [r^3, sr] = sr^2 - s,\\
&[r^3, sr^2] = sr^3 - sr, && [r^3, sr^3] = s - sr^2,
\end{aligned}
$$

$$[s, sr] = r - r^3, \qquad [s, sr^3] = r^3 - r,$$
$$[sr, sr^2] = r - r^3, \qquad [sr^2, sr^3] = r - r^3$$

よって，簡単な計算により，$L$ の中心 $Z(L)$ は

$$Z(L) = sp\{e, r^2, r + r^3, s + sr^2, sr + sr^3\}$$

で，$L$ の導来イデアル $L^2$ は

$$L^2 = sp\{r - r^3, s - sr^2, sr . sr^3\}$$

であることがわかる．よって，$L = L^2 \oplus Z(L)$ となるので，補題 2.1 より

$$\mathrm{Der}_F L \cong \mathrm{Der}_F L^2 \oplus \mathrm{Der}_F Z(L)$$

が成り立つ．また，

$$[r - r^3, s - sr^2] = -4(sr - sr^3)$$
$$[s - sr^2, sr - sr^3] = 4(r - r^3)$$
$$[sr - sr^3, r - r^3] = -4(s - sr^2)$$

なので $L^2 = sp\{r - r^3, s - sr^2, sr - sr^3\}$ は 3 次元の単純リー代数となり，

$$\mathrm{Der}_F L^2 = \mathrm{Inn}_F L^2 = \{\mathrm{ad}\, a \mid a \in L^2\}$$

が成り立つ ([3, p.74])．そして，$Z(L)$ は 5 次元の可換リー代数なので，$\mathrm{Der}_F Z(L) = gl(\underline{Z(L)}) \cong gl(5, \mathrm{F})$ となる．以上より，$\delta \in \mathrm{Der}_F [A]$ は $\delta = \mathrm{ad}\, a + A'$ $(a \in L^2, A \in gl(\underline{Z(L)}))$ の形にかける．ここで，$A'$ の $x \in L$ における値は，$x = b + y$ $(b \in L^2, y \in Z(L))$ に対して，

$$A'x = Ay$$

で与えられる．

次に $\mathrm{Der}_F A$ についてであるが，[1, p.490] より，有限群から出来る群代数の微分は内部微分に限るので，

$$\mathrm{Der}_F A = \{\mathrm{ad}\, a \mid a \in A\}.$$

しかし，ベクトル空間として，$A = \underline{L^2} \oplus \underline{Z(L)}$ なので，

$$\mathrm{Der}_F A = \{\mathrm{ad}\ a \mid a \in L^2\} \cong L^2$$

となる．以上より，次の定理が成り立つ．

**定理 3.1** $G = D_4$, $A = FG$ とすると，次の同型が成り立つ．

$$\mathrm{Der}_F A = \mathrm{Inn}_F A,$$

$$\mathrm{Der}_F [A] \cong \mathrm{Der}_F A \oplus gl(5, \mathrm{F}).$$

よって，$F$ が代数的閉体の場合は，

$$\mathrm{Der}_F A = \mathrm{Inn}_F A \cong sl(2, \mathrm{F}),$$

$$\mathrm{Der}_F [A] \cong sl(2, \mathrm{F}) \oplus gl(5, \mathrm{F}).$$

## References

[1]C. W. Curtis and I. Reiner *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience, New York, 1962

[2]T. Ikeda and N. Kawamoto *On derivation algebras of group algebras*, Nonassociative Algebras and its Applications, 188-192, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994

[3]N. Jacobson *Lie Algebras*, Interscience, New York, 1962

[4]N. Kawamoto *Generalizations of Witt algebras over a field of characteristic zero*, Hiroshima Math. J., **16** (1986), 417-426

[5]— *On G-graded automorphisms of generalized Witt algebras*, Contemp. Math., **184** (1995), 225-230

[6]N. Kawamoto, A. Mitsukawa, K-B. Nam and M-O. Wang *The automorphisms of generalized Witt type Lie algebras*, J. Lie Theory, **13** (2003), 573-578

[7]A. Mitsukawa　群代数のリー微分代数について，福山大学経済学論集，**30** (2006), 29-34

[8]K-B. Nam *Generalized W and H type Lie algebras*, Algebra Colloq., **6** (1999), 329-340