群代数のリー微分代数について

三　川　　　敦

Abstract

F を標数 0 の体，G を群とする．このとき，群代数 FG の微分代数 $\mathrm{Der}_F\,FG$ と FG にブラケット積 $[f, g] = fg - gf$ を入れてリー代数と考えた $[FG]$ の微分代数（FG のリー微分代数）$\mathrm{Der}_F[FG]$ の 2 つが考えらえる．G がアベール群の場合は，この 2 つが異なることはすぐにわかる．位数6の二面体群 $G = D_3$ の場合に，$\mathrm{Der}_F[FD_3]$ を計算し，2 つが異なることを示した．

1　Introduction

F を標数 0 の体とする．$A = F[x], F[x, x^{-1}]$ に対して，微分代数 $\mathrm{Der}_F\,A$ はそれぞれ古典的Witt代数，centerless Virasoro代数として良く知られているリー代数となる．その一般化も色々され（[4],[7]），さらにその自己同型群なども良く調べられている（[5],[6]）．また，[2] では，A が群代数の場合が調べられている．しかし，ブラケット積 $[a, b] = ab - ba$ により A をリー代数と考えたものを $[A]$ と表すとき，$[A]$ のリー代数としての微分（リー微分）全体 $\mathrm{Der}_F\,[A]$ については調べられていない．この論文では，リー微分代数 $\mathrm{Der}_F[A]$ についての考察を行うことにする．

2　Preliminaries

この論文において，F は標数 0 の体を表すとする．まず，主役であるリー代数の定義から始めよう．

定義２．１　L を F 上のベクトル空間とする．L における双線形で歪対称な積（ブラケット積）$[\ ,\ ]$ が次の等式（ヤコビの恒等式）を満たすとき，L を F 上のリー代数という．

$$[x,\ [y,\ z]]+[y,\ [z,\ x]]+[z,\ [x,\ y]]=0\ \ (x,\ y,\ z\in L)$$

以下，この論文では，A は F 上の結合代数，L は F 上のリー代数をそれぞれ表すとする．そして，標数０の体 F 上で定義された代数系のみを扱い，出てくる代数系の積を忘れて単にベクトル空間として考える場合はアンダーラインを付ける．例えば，結合代数 A の積を忘れて，単にベクトル空間として考える場合は $\underline{A}$ と表すことにする．

F 上の結合代数 A に対して，新しい積 $[a,\ b]=a\cdot b-b\cdot a$（・は A における積）を入れた代数を $[A]$ で表すと，次が成り立つ．

補題２．１ [3, p.6]　$[A]$ は F 上のリー代数になる．

リー代数 $[A]$ の例としては，F の元を成分にもつ n 次の正方行列全体 $M(n,\ F)$ から得られる一般線形リー代数 $gl(n,\ F)=[M(n,\ F)]$ や，F 上のベクトル空間 V の１次変換全体 $\mathrm{End}_F\ V$ から得られる一般線形リー代数 $gl(V)=[\mathrm{End}_F\ V]$．そして，トレースが０の n 次の正方行列全体から得られる特殊線形リー代数 $sl(n,\ F)$ などがある．

次に群代数の説明をしよう．有限群 $G=\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\}$ に対して，G を基底とする F 上のベクトル空間を

$$V=\{\sum_i a_i x_i \mid a_i\in F,\ 1\leq i\leq n\}$$

とする．G における積を線形に V にまで拡張して得られる結合代数を群代数といい，FG とかく．これは F 上の結合代数なので，F 上のリー代数 $[FG]$ を考えることが出来る．

結合代数 A の任意の元 $a,\ b\in A$ に対して

$$\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)$$

を満たす A の線形写像 δ を A の微分といい，その全体を $\mathrm{Der}_F\ A$ とかく．そ

して，F 上のリー代数 L の線形写像 δ で L の任意の元 $x,\ y \in L$ に対して

$$\delta([x,\ y]) = [\delta(x),\ y] + [x,\ \delta(y)]$$

が成り立つものを L の微分といい，その全体も $\mathrm{Der}_F\, L$ とかく．次の補題は，もっと一般的な形で知られているが，後で必要な形で述べておく．ただし，

$$L^2 = sp\{[x,\ y] \mid x,\ y \in L\},$$

$$Z(L) = \{x \in L \mid \text{任意の } y \in L \text{ に対して } [x,\ y] = 0\}$$

は，それぞれ L の導来イデアル，L の中心 $Z(L)$ である．

補題２．２　$\delta \in \mathrm{Der}_F\, L$ に対して，

$$\delta(L^2) \subset L^2,\ \delta(Z(L)) \subset Z(L)$$

が成り立つ．よって $\delta\,|_{L_2} \in \mathrm{Der}_F\, L^2$, $\delta\,|_{Z(L)} \in \mathrm{Der}_F\, Z(L)$ である．

（証明）$x,\ y \in L$ に対して，

$$\delta([x,\ y]) = [\delta(x),\ y] + [x,\ \delta(y)] \in L^2$$

なので，$\delta(L^2) \subset L^2$．そして，$z \in Z(L)$, $x \in L$ に対して，

$$[\delta(z),\ x] = \delta([z,\ x]) - [z,\ \delta(x)] = 0$$

なので，$\delta(Z(L)) \subset Z(L)$．■

$a \in A$ に対して，$\mathrm{ad}\ a \in \mathrm{End}_F\, \underline{A}$ を

$$\mathrm{ad}\ a(b) = ab - ba\ \ (b \in A),$$

で定義し，$x \in L$ に対して，$\mathrm{ad}\ x \in \mathrm{End}_F\, \underline{L}$ を

$$\mathrm{ad}\ x(y) = [x,\ y]\quad (y \in L)$$

で定義する．このとき，簡単な計算により $\mathrm{ad}\ a \in \mathrm{End}_F\, A$，$\mathrm{ad}\ x \in \mathrm{Der}_F\, L$ である事が示せる．$\mathrm{ad}\ a$，$\mathrm{ad}\ x$ の形の微分を内部微分といい，その全体をそれぞれ $\mathrm{Inn}_F\, A$, $\mathrm{Inn}_F\, L$ とかく．$\mathrm{Der}_F\, A$, $\mathrm{Der}_F\, L$ はそれぞれ $\mathrm{End}_F\, \underline{A}$, $\mathrm{End}_F\, \underline{L}$ の部分空間ではあるが，結合代数にはならない．しかし，簡単な計算により，それぞれ $gl(\underline{A})$, $gl(\underline{L})$ の部分リー代数になることがわかる（[3, p.8]）．よって，結合代数 A に対しては，$gl(\underline{A})$ の部分リー代数として，A の微分全体 $\mathrm{Der}_F\ A$ とリー代数 $[A]$ の微分全体 $\mathrm{Der}_F[A]$（この元を A のリー微分と呼ぶ

ことにする）の2つを考える事が出来る．A の微分とリー微分について，次の命題が成り立つ．

命題2．1

$$\mathrm{Inn}_F\, A = \mathrm{Inn}_F[A] \leq \mathrm{Der}_F\, A \leq \mathrm{Der}_F[A]$$

が成り立つ．

（証明）関係式 $\mathrm{Der}_F\, A \leq \mathrm{Der}_F[\mathrm{A}]$ 以外は明らかなので，この関係式だけを証明する．$\delta \in \mathrm{Der}_F\, A$，$a$，$b \in A$ に対して，

$$\begin{aligned}\delta[a,\ b] &= \delta(ab-ba) = (\delta(a)b + a\delta(b)) - (\delta(b)a + b\delta(a)) \\ &= (\delta(a)b - b\delta(a)) + (a\delta(b) - \delta(b)a) = [\delta(a),\ b] + [a,\ \delta(b)]\end{aligned}$$

が成り立つので，$\delta \in \mathrm{Der}_F[A]$． ■

よって，$\mathrm{Der}_F\, A \leq \mathrm{Der}_F[A]$ が成り立つことがわかったが，A が可換な場合は $\mathrm{Der}_F\,[A] \neq \mathrm{Der}_F\, A$ である．

定理2．1　A を可換な結合代数とすると，

$$\mathrm{Der}_F\, A < \mathrm{Der}_F[A]$$

（証明）$\mathrm{Der}_F[A] = \mathrm{Der}_F\, A$ と仮定して，矛盾を導く．A が可換なので，$\mathrm{Der}_F[A] = \mathrm{End}_F \underline{A}$ となる．よって，仮定より，$\mathrm{Der}_F\ A = \mathrm{End}_F \underline{A}$ なので，A の恒等写像 $\delta = 1_A$ は A の微分となる．したがって，$\delta(1) = 0$．一方，恒等写像であることより，$\delta(1) = 1$．これは矛盾である． ■

3　The case of the dihedral group D_3 of order 6

群 $D_3 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}\ (s^2 = r^3 = (sr)^2 = 1)$ が位数6の二面体群である．それから出来る群代数を A とする．

まず，$\mathrm{Der}_F[A]$ について考える．このとき，$L = [A]$ のブラケット積で0にならないものは（$[y,x] = -[x,y]$ を除いて），次の9つである．

$$[r,s] = sr^2 - sr,\ [r,sr] = s - sr^2,\ [r,sr^2] = sr - s$$

$$[r^2,s] = sr - sr^2,\ [r^2,sr] = sr^2 - s,\ [r^2,sr^2] = s - sr$$

$$[s,sr]=r-r^2,\ [s,sr^2]=r^2-r,\ [sr,sr^2]=r-r^2$$

よって，L の中心 $Z(L)$ は

$$Z(L)=sp\{e,r+r^2,s+sr+sr^2\}$$

で，L の導来イデアル L^2 は

$$L^2=sp\{r-r^2,s-sr,sr-sr^2\}$$

であることがわかる．さらに，$L=L^2\oplus Z(L)$ であるので，補題2．2より

$$\mathrm{Der}_F\,L\cong\mathrm{Der}_F\,L^2\oplus\mathrm{Der}_F\,Z(L)\,.$$

このとき，$L^2=sp\{r-r^2,s-sr,sr-sr^2\}$ は単純リー代数なので，

$$\mathrm{Der}_F\ L^2=\mathrm{Inn}_F\ L^2=\{\mathrm{ad}\ a\mid a\in L^2\}\,.$$

そして，$Z(L)$ は可換リー代数なので，$\mathrm{Der}_F\,Z(L)=gl(\underline{Z(L)})\cong gl(3,F)$ となる．以上より，$\delta\in\mathrm{Der}_F[A]$ は $\delta=\mathrm{ad}\ a+A'$ $(a\in L^2,\ A\in gl(\underline{Z(L)}))$ の形にかける．ここで，A'の$x\in L$ における値は，$x=b+y$ $(b\in L^2,y\in Z(L))$ とかいたとき，

$$A'x=Ay$$

で与えられる．

次に $\mathrm{Der}_F\,A$ であるが，[1, p.490] より，有限群から出来る群代数の微分は内部微分に限るので，

$$\mathrm{Der}_F\,A=\{\mathrm{ad}\ a\mid a\in A\}\,.$$

しかし，ベクトル空間として，$A=\underline{L^2}\oplus\underline{Z(L)}$ なので，

$$\mathrm{Der}_F\,A=\{\mathrm{ad}\ a\mid a\in L^2\}\cong L^2$$

となる．

以上より，次の定理が成り立つ．ただし，$Z(A)$ は A の中心である．

定理3．1　$G=D_3$，$A=FG$ とすると，次の同型が成り立つ．

$$\mathrm{Der}_F\,A=\mathrm{Inn}_F\,A,$$

$$\mathrm{Der}_F[A]\cong\mathrm{Der}_F\,A\oplus gl(3,F)\,.$$

よって，F が代数的閉体の場合は，

$$\mathrm{Der}_F\, A = \mathrm{Inn}_F\, A \cong sl(2,F)\ ,$$
$$\mathrm{Der}_F[A] \cong sl(2,F) \oplus gl(3,F)\ .$$

References

[1]C. W. Curtis and I. Reiner *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience, New York, 1962

[2]T. Ikeda and N. Kawamoto *On derivation algebras of group algebras*, Nonassociative Algebras and its Applications, 188-192, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994

[3]N. Jacobson *Lie Algebras*, Interscience, New York, 1962

[4]N. Kawamoto *Generalizations of Witt algebras over a field of characteristic zero*, Hiroshima Math. J., 16 (1986), 417-426

[5]― *On G-graded automorphisms of generalized Witt algebras*, Contemp. Math., 184 (1995), 225-230

[6]N. Kawamoto, A. Mitsukawa, K-B. Nam and M-O. Wang *The automorphisms of generalized Witt type Lie algebras*, J. Lie Theory, 13 (2003), 573-578

[7]K-B. Nam *Generalized W and H type Lie algebras*, Algebra Colloq., 6 (1999), 329-340