単位根と Cointegration*

古　藤　保　次

ランダムウォーク仮説に関する議論は理論的にも実証的にも無数になされてきた。Nelson and Plosser(1981) 以来、この問題に対する関心が高まってきた。統計学的な観点からみるとき、単位根を検定論的に考察することは非常に微妙な問題を含んでいる。本稿では単位根をめぐる最近の議論の大きな流れについてふれ、かつ cointegration に関する問題点を指摘することにする。

時系列 y_t が単位根を含む場合とそうでない場合とでは、AR モデルなどの係数パラメータの OLS 推定量の分布がまったく異なるのである。このことを明示するために、一般性を失うことなく次のようなモデルを前提とする。

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \alpha y_{t-1} + u_t, \qquad t=2,3,\cdots\cdots,T \\ u_t &= \beta u_{t-1} + \varepsilon_t \quad, \\ y_1 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

ただし、ε_t は $i.i.n$ $(0,\ \sigma^2)$ である。

I．定常的な場合（$|\alpha|<1$）

単純化のために $\mu=0$ を仮定する。このときパラメータ α の OLS 推定量 a は次のようになる。

$$a=\left(\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2\right)^{-1}\left(\sum_{t=2}^{T} y_t y_{t-1}\right) \tag{2}$$

* Cointegration の概念は Engle and Granger (1987) で定義されている。Cointegration の適当な邦訳がないので本稿ではこのまま使用することにする。

真のパラメータのまわりに対しては

$$a-\alpha=\left(\sum_{t=2}^{T}y_{t-1}^2\right)^{-1}\left(\sum_{t=2}^{T}y_t\,y_{t-1}\right)-\alpha$$

$$=\left(\sum_{t=2}^{T}y_{t-1}^2\right)^{-1}\left(\sum_{t=2}^{T}u_t\,y_{t-1}\right) \tag{3}$$

となる。y_t が定常的であるとき、

$$E\left(\sum_{t=2}^{T}y_{t-1}^2\right)=O(T)$$

$$V\left(\sum_{t=2}^{T}y_{t-1}^2\right)=O(T)$$

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{t=2}^{T}u_t\,y_{t-1}\right)&=0 &&, \quad \beta=0\\ &=O(T) &&, \quad \beta\neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{t=2}^{T}u_t\,y_{t-1}\right)&=0 &&, \quad \beta=0\\ &=O(T) &&, \quad \beta\neq 0\end{aligned}$$

が成立するから、T が無限大になるとき(3)は、

$$\begin{aligned} \mathrm{a}-\alpha &\longrightarrow 0, \quad \beta=0 \\ \mathrm{a}-\alpha &\not\longrightarrow 0, \quad \beta\neq 0\end{aligned} \tag{4}$$

となる。したがって、定常時系列の場合、よく知られているように u_t に系列相関がないならば、OLS 推定量 a が一致推定量になっていることがわかる。このことは μ がゼロでないときでも成り立つことが容易に確かめられる。逆に u_t が系列相関を持っている場合には、OLS 推定量 a にバイアスが生じるのである。

以上のことから定常時系列の場合、$T^{-1/2}(a-\alpha)$ の極限分布が正規分布になっていることもよく知られている。たとえば、定常時系列のパラメータの推定量の性質に関しては Fuller (1976) などが詳しい。

II. 単位根を含む場合（$|\alpha|=1$）

時系列 y_t が単位根を持つ場合の研究例としては Phillips and Durlauf (1986) がある。確率的なタイムトレンドが存在しないならば、Phillips and Durlauf (1986) の lemma 3. 1. (b), (e) より、

$$T^{-2}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2 = O_p(1) \tag{5}$$

$$T^{-1}\sum_{t=2}^{T} u_t y_{t-1} = O_p(1) \tag{6}$$

となる。したがって、(3)の確率収束オーダーは

$$a-\alpha = O_p(T^{-1}) \tag{7}$$

である。

(7)からわかるように、OLS 推定量(2)が α の一致推定量になっている。この結果は u_t に系列相関が存在する場合でも変わらないのである。したがって u_t が平均がゼロであるような定常時系列にしたがっていることが、OLS 推定量が一致性を持つための十分条件であることがわかる。

定常時系列の場合、u_t が系列相関を持たないことが OLS 推定量の一致性のための十分条件であったのに対して、単位根を含んである場合は一致性の条件が緩やかになっている。

一方、定常時系列では極限において OLS 推定量が正規分布に収束することが知られているのに対して、単位根を持つような時系列においては、定常的なときとくらべて異なる分布特性を持っているのである。このことを簡易に示すために、$u_t=\varepsilon_t$ を仮定することにする。

(1)から、$y_t=\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i$ であり、$y_t T^{-1/2}$ は $N(0,\ t\sigma^2/T)$ にしたがう。いいかえれば、$y_t(\sigma^2 T)^{-1/2}$ がウィナー過程 $W(\frac{t}{T})$ にしたがっているのである。この表現を使うならば、$y_t(\sigma^2 T)^{-1/2}$ は次のように書きあらわされる。

$$\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\left[W\left(\frac{t}{T}\right)\right]^2 \tag{8}$$

極限において(8)は

$$\underset{T\to\infty}{plim}\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\left[W\left(\frac{t}{T}\right)\right]^2=\int_0^1 W(s)^2 ds \tag{9}$$

となる。

他方、

$$(\sigma^2 \mathrm{T})^{-1/2}\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i \longrightarrow W(1) \tag{10}$$

$$T^{-1}\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i^2 \longrightarrow \sigma^2 \tag{11}$$

であるから、

$$\begin{aligned} T^{-1}\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t y_{t-1} &= T^{-1}\sum_{t=2}^{T}\sum_{i=1}^{t-1}\varepsilon_t\varepsilon_i \\ &= \frac{1}{2T}\left[\left(\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\right)^2-\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2\right] \end{aligned} \tag{12}$$

となる。(9)，(10)，(11)，(12)より、(3)は

$$\frac{\sigma^2}{2}\left[\int_0^1 W(s)^2 ds\right]^{-1}(\chi^2-1) \tag{13}$$

に法則収束する。(13)からわかるように(3)の極限分布は正規分布ではない。それゆえ、H_0：$a=1$を検定するときにt値を使うことができないのである。このような確率的なタイムトレンドを伴わない単純な AR1 において単位根の検定をおこなうには Dickey and Fuller (1981) のモンテカルロ実験の結果を使うことができる。しかし、より複雑な構造式において単位根の検定をおこなうためには、その式のもとで検定すべきパラメータに関してモンテカルロ実験によって検定表を作成しなければならない。

次に、確率的なタイムトレンドが存在する場合である。上述したように、こ

の場合、確率的なタイムトレンドが存在ししないときは異なる分布特性を持っている。(13)のような関数形ではないのである。

この場合のパラメータの分布を導くために、y_tをy_{t-1}と1に回帰させる。$u_t=\varepsilon_t$とするときμとαの OLS 推定量m, aが得られる。

$$\begin{bmatrix} m \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T-1 & \sum_{t=2}^{T} y_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{T} y_{t-1} & \sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^{T} y_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{T} y_t y_{t-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

いま、(14)のそれぞれのセルの収束オーダー、あるいは確率収束オーダーを評価する。

$$\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2 = \sum_{t=2}^{T} [(t-1)\mu + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i]^2$$

$$\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2 = \mu^2 \sum_{t=2}^{T} (t-1)^2 + 2\mu \sum_{t=2}^{T} (t-1) \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i^2 + \sum_{t=2}^{T} (\sum_{i=1}^{t-1} \varepsilon_i^2)$$

$$= O(T^3) + O_p(T^{5/2}) + O_p(T^2) \quad (15)$$

(15)において、第1項のオーダーが最も大きい。したがって、

$$T^{-3} \sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2 \longrightarrow \frac{1}{3}\mu^2$$

となる。

次に Phillips and Durlauf (1986) の lemma 3.1.(a) を使うと、

$$\sum_{t=2}^{T} y_t = \mu \sum_{t=2}^{T} (t-1) + \sum_{t=2}^{T} \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

$$= O(T^2) + O_p(T^{3/2})$$

であるから、

$$T^{-2} \sum_{t=2}^{T} y_t \longrightarrow \frac{1}{2}\mu \quad (17)$$

セル$\sum_{t=2}^{T} y_t y_{t-1}$に関しては、(1), (16)からオーダーがわからないのはy_{t-1}とε_tの積に関する項だけである。この項は、

$$T^{-3/2} \sum_{t=2}^{T} y_t y_{t-1}$$
$$= T^{-3/2} \mu \sum_{t=2}^{T} (t-1) \varepsilon_t + T^{-3/2} \sum_{t=2}^{T} \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \varepsilon_{t-1} \tag{18}$$

であり、(18)の右辺の第2項の確率オーダーが$O_p(T^{-1/2})$であることは、あきらかである。また、第1項は極限分布$N(0, \mu^2\sigma^2/3)$にしたがっている。(18)の第2項は極限では消滅するから、(18)は右辺の第1項と同じ極限分布にしたがうことがわかる。

最後に、

$$T^{-1/2} \sum_{t=2}^{T} \varepsilon_t \longrightarrow N(0, \sigma^2) , \tag{19}$$

$$ET^{-3/2} \sum_{t=2}^{T} y_{t-1} \varepsilon_t T^{-1/2} \sum_{s=2}^{T} \varepsilon_{s-1}$$
$$= ET^{-3/2} \mu \sum_{t=2}^{T} (t-1) \varepsilon_t T^{-1/2} \sum_{s=2}^{T} \varepsilon_{s-1} \longrightarrow \mu\sigma^2 / 2$$

である。上述の事実を使うと(14)を以下のように評価することができる。

$$\underset{T\to\infty}{plim} \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m-\mu \\ a-\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \underset{T\to\infty}{plim} \begin{bmatrix} 1-1/T & T^{-2}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1} \\ T^{-2}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1} & T^{-3}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T^{-1/2}\sum_{t=2}^{T} \varepsilon_t \\ T^{-3/2}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1} \varepsilon_t \end{bmatrix} \tag{20}$$

(16), (17)から、(21) の逆行列の部分の確率極限をとると

$$\underset{T\to\infty}{plim}\begin{bmatrix} 1-1/T & T^{-2}\sum_{t=2}^{T}y_{t-1} \\ T^{-2}\sum_{t=2}^{T}y_{t-1} & T^{-3}\sum_{t=2}^{T}y_{t-1}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mu/2 \\ \mu/2 & \mu^{2}/3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

となる。また、(18), (19)と(21)から、

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2}\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t \\ T^{-3/2}\sum_{t=2}^{T}y_{t-1}\,\varepsilon_t \end{bmatrix} \longrightarrow N\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \sigma^{2}\begin{bmatrix} 1 & \mu/2 \\ \mu/2 & \mu^{2}/3 \end{bmatrix}\right]$$

となる。したがって、(20)は最終的に次のようになる。

$$\underset{T\to\infty}{plim}\begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m-\mu \\ a-\alpha \end{bmatrix} = N\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \sigma^{2}\begin{bmatrix} 1 & \mu/2 \\ \mu/2 & \mu^{2}/3 \end{bmatrix}^{-1}\right] \tag{22}$$

したがって、(1)において確率的なタイムトレンドが存在する場合、確率ベクトル$(m,\ a)'$は$(\mu,\ \alpha)'$の一致推定量であり、かつ極限正規分布にしたがうのである。最後に単位根が存在する場合、以上の結果を検定論の立場から総括することによって本節を終えることにする。

パラメータαの真の値が1であるとき、確率的なタイムトレンドが存在するならば、その OLS 推定量は極限正規分布にしたがうから、定常的なケースと同じようにt検定をおこなうことができる。しかし、確率的なタイムトレンド

が存在しない場合では、OLS 推定量の極限分布が正規分布ではなく、t 検定をおこなうことができない。

真のモデルでは確率的なタイムトレンドが存在しないのに、そのようなトレンドが存在するものとして、検定表を作成した文献に Dickey and Fuller (1981) がある。これはたとえば、確率的なタイムトレンドがわずかにしか存在しないようなケースの検定に適しているといえる。

Ⅲ. Cointegration

Cointegration の基本的な概念は非常に単純である。Cointegration の概念を説明するために、一般性を失うことなく 2 変数のケースを扱うことにする。

いま、時系列 $\{x_t\}$，$\{y_t\}$

$$A(\mathrm{B})x_t = u_t \tag{23}$$

$$B(\mathrm{B})y_t = v_t \tag{24}$$

について考える。ただし、B はラグ演算子であり、$\mathrm{B}z_t = z_{t-1}$ を意味する。また、$A(\mathrm{B})$，$B(\mathrm{B})$ は少なくとも一つ以上の単位根を含んでいるものとする。

(23)，(24) のようなモデルにおいて、$A(\mathrm{B})$，$B(\mathrm{B})$ のなかに共通の単位根が存在するものとする。このとき x_t と y_t の適当な線形結合をとると、その線形結合のなかには共通の単位根が消滅することがある。このような線形結合が存在するとき、x_t と y_t は cointegrate しているという。d 個の単位根のうち、線形結合によって脱落した単位根の数が e であるならば、x_t と y_t は $C.I.(d,e)$ であると表現する。

たとえば、次のような単純なケースを考えてみる。x_t と y_t がランダムウォーク過程にしたがっているものとする。

$$(1-\mathrm{B})x_t = u_t \tag{25}$$

$$(1-\mathrm{B})y_t = v_t \tag{26}$$

線形結合 $x_t - \theta y_t$ が定常的になるような θ が少なくとも 1 つ存在するならば、

x_t と y_t は $C.I.(1,1)$ であるというのである。

Cointegration の概念は Engle and Granger (1985) に定義されている。この概念は Nelson and Plosser (1981) の問題提起に対する一解決策への模索として提出されたものである。Nelson and Plosser (1981) は経済変数は非確率的なタイムトレンドを除去したあとでも単位根を含む非定常性が残っていることを指摘した。もしこのことが真であれば、経済学で議論されるような均衡概念ならびに均衡の安定性が無意味であることを意味しているのである。

それに対して、Engle and Granger (1985) はたとえ各経済変数がランダムウォークにしたがって変動していても、経済の構造的なシステムのなかで安定的な均衡が存在しうることを模索しているのである。しかし、この論文が想定している均衡概念と経済学上の均衡概念との関連性が曖昧であるため、十分な解答になっているとはいいがたい。今後、この関係を明かにするために、さらに議論を重ねられなければならないものと考えられる。

他方、「冗長な回帰」(spurious regression) についても触れなければならない。「冗長な」というのは独立変数と従属変数との間に理論的な関係が存在しないにもかかわらず、決定係数が高い値をとるような場合を意味している。

Phillips (1986) は経済変数が cointegrate していないことと「冗長」になっていることとを同等と考えている。したがって、この枠組みのなかでは経済変数が cointegrate しているならば、必ずその線形関係は経済理論によって説明されているということになる。

この定義のもとで帰無仮説をたてるとき、その帰無仮説のもとでは検定が可能な統計量が存在しないということである。

もし、帰無仮説を x_t と y_t が cointegrate していないとするならば、時系列 $x_t - \hat{\theta} y_t$ が定常的になるような θ は存在しないことになる。このとき、パラメータ θ を OLS によって推定することができない。なぜなら、x_t を y_t に回帰したあとの残差が少なくとも定常的でなければ推定量が一致性を持たないからであ

る。この場合、残差項は単位根を含んでいるのである。したがって、このような帰無仮説は適当でないことがわかる。

反対に、帰無仮説を x_t と y_t が cointegrate しているものとする。この場合確かに OLS 推定量は一致性を持つ。しかし、この帰無仮説の検定は、この仮説のもとで推定された θ の推定値を代入して、$x_t - \hat{\theta}\, y_t$ が定常時系列になっていることを検定することである。検定をするためには、時系列 $x_t - \hat{\theta}\, y_t$ の AR または ARMA のパラメータの理論値が保証されていなければならない。ところが、経済理論とこれらのパラメータの間には通常理論的な関係は存在しないから、定常性の検定はできない。また、逆に $x_t - \hat{\theta}\, y_t$ が単位根を持つことを検定することもできないのである。なぜなら、第Ⅰ節と第Ⅲ節で議論したように、この時系列が単位根を持つときと持たないときとでは、たとえばこの時系列の AR モデルの係数の分布特性が根本的に異なっていることがあるからである。それゆえ、対立仮説が帰無仮説を包含していない場合があり、検定論的に矛盾している。さらに、この時系列が単位根を持つということは、そもそも最初の帰無仮説に反しているのである。つまり、この時系列が単位根を持つということは、cointegration 条件を満たすような線形結合パラメータ θ が存在しないからであるから、この線形結合を推定すること自体が無意味なのである。

以上のことから、帰無仮説と対立仮説をどのように組み立てても、Engle and Granger (1987) の定義もとでは検定可能な統計量を導出することは非常に難しいのである。これは一つには cointegration の定義と経済理論との関係が必ずしも明かではないことに原因があるのである。したがって、検定可能な統計量を導出するためには、cointegration の定義を修正しなければならない。

Engle and Granger (1987) のもとでは cointegration の検定は 2 段階になっている。まず、θ を推定して、その後たとえば、$x_t - \hat{\theta}\, y_t$ の AR の係数を推定するのである。このとき、cointegration と経済理論の対応関係が明確でないのであるから、経済理論によって θ の値を前提すればよいのである。第 2 段階

さえ推定すればよいのである。したがって、cointegration の定義は次のように修正されなければならない。

定義

2つのランダムウォーク過程にしたがう経済変数 x_t, y_t に対して、これらの変数を線形的に結びつけるパラメータ θ が経済理論によって先験的に与えられているものとする。このとき、その線形 $x_t - \hat{\theta} y_t$ が定常時系列になっているならば、x_t と y_t は cointegrate しているという。

この定義にしたがうならば、cointegration の検定は x_t と y_t が当該の経済理論のもとで cointegrate していないという帰無仮説をたてれば、Fuller (1976) の8章にあるような検定表が再び利用することができるのである。

REFERENCES

Dickey, David A. and Wayne A. Fuller (1979), "Distribution of Estimates for Autoregressive Time Series", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 74, no. 366, 427-431

Engle, Robert F. and C. W. J. Granger (1987), "Cointegration and Error Correction : Representation, Estimation and Testing", *Econometrica*, vol. 55, no. 2, 251-276.

Fuller, A. Wayne (1976), "Introduction to Statistical Time series"(Wiley, New York).

Nelson, Charles R. and Charles I. Plosser (1982), "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series : Some Evidence and implications", *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162.

Phillips, P. C. B. (1986), "Understanding Spurious Regressions in Econometrics", *Journal of Econometrics*, 33, 311-340.

———— (1987), "Time Series Regression with a Unit Root", *Econometrica*, vol. 55, no. 2, 277-302.