低階項を含む準線形楕円型方程式の obstacle problem の解に対する収束性

小野　太幹*

Convergence property for solutions of obstacle problem to quasi-linear second order elliptic differential equations with lower order terms

Takayori ONO*

ABSTRACT

We consider quasi-linear second order elliptic differential equations with lower order terms. We discuss convergence property for solutions to obstacle problem.

キーワード：準線形楕円型方程式, 低階項, obstacle problem, 収束性

1. 序論と準備

$N \geq 2$, $p > 1$ とし，重み関数 w を [1] の意味で p-admissible とする．
$\mathcal{A}(x,\xi)$ を次の条件を満たす $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}^N$ への写像とする：

(A.1) 殆どすべての $x \in \mathbf{R}^N$ に対し $\mathcal{A}(x,\cdot)$ は $\mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}^N$ への連続写像であり，又すべての $\xi \in \mathbf{R}^N$ に対し $\mathcal{A}(\cdot,\xi)$ は $\mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}^N$ への可測写像である；

(A.2) 正定値性：ある正定数 α_1 があって，殆どすべての x とすべての ξ に対して

$$\mathcal{A}(x,\xi)\cdot\xi \geq \alpha_1 w(x)|\xi|^p;$$

(A.3) 有界性：ある定数 $\alpha_2 \geq \alpha_1$ があって，殆どすべての x とすべての ξ に対して

$$|\mathcal{A}(x,\xi)| \leq \alpha_2 w(x)|\xi|^{p-1}.$$

(A.4) 単調性：殆どすべての x と $\xi_1 \neq \xi_2$ であるすべての ξ_1, ξ_2 に対して，

$$\big(\mathcal{A}(x,\xi_1) - \mathcal{A}(x,\xi_2)\big)\cdot\big(\xi_1 - \xi_2\big) > 0$$

;

$\mathcal{B}(x,t)$ を次の条件を満たす $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像とする：

(B.1) 殆どすべての $x \in \mathbf{R}^N$ に対し $\mathcal{B}(x,\cdot)$ は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への連続写像であり，又すべての $t \in \mathbf{R}$ に対し $\mathcal{B}(\cdot,t)$ は $\mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}$ への可測写像である；

(B.2) 有界性：任意の有界開集合 G に対して，ある正定数 $\alpha_3(G)$ があって，殆どすべての $x \in G$ とすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$|\mathcal{B}(x,t)| \leq \alpha_3(G)w(x)(|t|^{p-1}+1).$$

*大学教育センター准教授

(B.3) 単調性： 殆どすべての x に対して，$\mathbf{R}$ 上 $t \to \mathcal{B}(x,t)$ が非減少である.

上記の $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ を使って，準線形楕円型方程式

$$-\operatorname{div}\mathcal{A}(x,\,\nabla u(x)) + \mathcal{B}(x,\,u(x)) = 0 \tag{E}$$

を考える.

非負測度 $\mu : d\mu = w(x)dx$ と開集合 G に対し, 重み付き Sobolev 空間 $H^{1,p}(G;\mu)$, $H_0^{1,p}(G;\mu)$, $H_{\mathrm{loc}}^{1,p}(G;\mu)$ を考える.

G を $\mathbf{R}^N$ の開集合とする. 関数 $u \in H_{\mathrm{loc}}^{1,p}(G;\mu)$ が

$$\int_G \mathcal{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,u)\varphi\,dx \geq 0 \quad (\varphi \in C_0^\infty(G) \geq 0)$$

を満たすとき，u は G で方程式 (E) の優解であるという. 方程式 (E) の劣解も同様にして定義される.

$\psi \in H^{1,p}(G;\mu)$ を G 上の関数とし，

$$\mathcal{K}_\psi(G) = \left\{ v \in H^{1,p}(G;\mu) \;\middle|\; G \text{ 内殆どいたるところで } v \geq \psi,\ v-\psi \in H_0^{1,p}(G;\mu) \right\}.$$

とする. 関数 $u \in \mathcal{K}_\psi(G)$ が，G 内殆どいたるところ $u+\varphi \geq \psi$ であるすべての $\varphi \in H_0^{1,p}(G;\mu)$ (すなわち, $u+\varphi \in \mathcal{K}_\psi(G)$) に対し，

$$\int_G \mathcal{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,\,u)\varphi\,dx \geq 0$$

を満たすとき，u は G で obstacle problem OBP($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$; ψ; G) の解であるといい，以下 u_ψ で表す.

主要項のみの方程式に対する obstacle problem の解の収束性については [1] 等で扱われている. 低階項を含む準線形楕円型方程式の obstacle problem の解の存在については，[2] で扱っている. 本論文では，[1] と同様な手法で，obstacle 関数が収束するとき，単調性を仮定した低階項を含む準線形楕円型方程式の obstacle problem の解が収束することについて示す.

2. obstacle problem の解の収束性

まず，優解と obstacle problem の解に関する比較原理について述べる.

命題 2.1. ([2, Lemma 3.7]) G を $\mathbf{R}^N$ の有界開集合とし, $\psi \in H^{1,p}(G;\mu)$ を G 上の関数とし，$v \in H^{1,p}(G;\mu)$ を *(E)* の優解とする. もし，$\min(u_\psi, v) \in \mathcal{K}_\psi(G)$ ならば, そのとき，G 内殆どいたるところ $v \geq u_\psi$ である.

定理 2.1. G を $\mathbf{R}^N$ の有界開集合とし, $\psi_i \in H^{1,p}(G;\mu)$ を $\psi_i \to \psi$ *in* $H^{1,p}(G;\mu)$ である減少関数列とする. このとき，u_{ψ_i} は減少関数列で, $u_\psi = \lim u_{\psi_i}$ である.

証明：$u_i = u_{\psi_i}$，$u = u_\psi$ とする. 命題 2.1 より，u_i は減少関数列である. よって，優収束定理より，u_i は u に $L^p(G;\mu)$ で収束する. 次に， (A.2)，(A.3)，(B.2) と Young

の不等式より

$$
\begin{aligned}
&\int_G |\nabla u_i|^p\,dx \le \alpha_1^{-1}\int_G \mathcal{A}(x,\nabla u_i)\cdot\nabla u_i\,dx\\
&\le \alpha_1^{-1}\int_G \mathcal{A}(x,\nabla u_i)\cdot\nabla\psi_i\,dx + \alpha_1^{-1}\int_G \mathcal{B}(x,\,u_i)(\psi_i-u_i)\,dx\\
&\le \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\int_G |\nabla u_i|^{p-1}|\nabla\psi_i|\,d\mu + \frac{\alpha_3(G)}{\alpha_1}\int_G (|u_i|^{p-1}+1)|\psi_i-u_i|\,d\mu\\
&\le \frac{1}{2}\int_G |\nabla u_i|^p\,d\mu + c\int_G |\nabla\psi_i|^p\,d\mu + c\int_G |u_i|^p\,d\mu + c\int_G |\psi_i-u_i|^p\,d\mu + c\mu(G),
\end{aligned}
$$

ここで，c は p，α_1，α_2，$\alpha_3(G)$ に依存する定数である．よって，[1, Theorem 1.32] より ∇u_i は ∇u に $L^p(G;\mu)$ で弱収束し，[1, Theorem 1.31] より $u-\psi\in H_0^{1,p}(G;\mu)$ である．殆どすべての $x\in G$ に対し，$u(x)\ge\psi(x)$ だから，G 内殆どいたるところ $u+\varphi\ge\psi$ であるすべての $\varphi\in H_0^{1,p}(G;\mu)$ に対し，

$$
\int_G \mathcal{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,\,u)\varphi\,dx \ge 0 \tag{2.1}
$$

を満たすことを示せばよい．

$v_i=\psi_i-\psi$ とおくと，$u+v_i-\psi_i\in H_0^{1,p}(G;\mu)$ で G 内殆どいたるところ $u+v_i\ge\psi$ であるから，(A.4)，(B.3) より，

$$
\begin{aligned}
0 \;\ge\;& \int_G (\mathcal{A}(x,\nabla u_i)-\mathcal{A}(x,\nabla u))\cdot(\nabla u-\nabla u_i)\,dx + \int_G (\mathcal{B}(x,u_i)-\mathcal{B}(x,u))(u-u_i)\,dx\\
=\;& \int_G \mathcal{A}(x,\nabla u_i)\cdot\nabla(u+v_i-u_i)\,dx - \int_G \mathcal{A}(x,\nabla u_i)\cdot\nabla v_i\,dx\\
-\;& \int_G \mathcal{A}(x,\nabla u)\cdot(\nabla u-\nabla u_i)\,dx\\
+\;& \int_G \mathcal{B}(x,u_i)(u+v_i-u_i)\,dx - \int_G \mathcal{B}(x,u_i)v_i\,dx - \int_G \mathcal{B}(x,u)(u-u_i)\,dx\\
\ge\;& -\int_G \mathcal{A}(x,\nabla u_i)\cdot\nabla v_i\,dx - \int_G \mathcal{A}(x,\nabla u)\cdot(\nabla u-\nabla u_i)\,dx\\
-\;& \int_G \mathcal{B}(x,u_i)v_i\,dx - \int_G \mathcal{B}(x,u)(u-u_i)\,dx.
\end{aligned}
$$

∇v_i は 0 に $L^p(G;\mu)$ で収束し，∇u_i は ∇u に $L^p(G;\mu)$ で弱収束する．また，v_i は 0 に $L^p(G;\mu)$ で収束し，G 内殆どいたるところ u_i は u に収束する．よって，$i\to\infty$ のとき，上の最後の式は 0 に収束するので，$i\to\infty$ のとき，

$$
\int_G (\mathcal{A}(x,\nabla u_i)-\mathcal{A}(x,\nabla u))\cdot(\nabla u-\nabla u_i)\,dx + \int_G (\mathcal{B}(x,u_i)-\mathcal{B}(x,u))(u-u_i)\,dx \to 0
$$

であるから，

$$
\int_G \mathcal{A}(x,\nabla u_i)\cdot(\nabla u-\nabla u_i)\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,u_i)(u-u_i)\,dx \to 0
$$

を得る．このことと，(B.3) と Hölder の不等式より，[1, Lemma 3.73] を用いると，$\mathcal{A}(x,\nabla u_i)w^{-1/p}$ は $\mathcal{A}(x,\nabla u)w^{-1/p}$ に $L^{p/(p-1)}(G;dx)$ で弱収束することがわかる．

G 内殆どいたるところ $u+\varphi \geq \psi$ である $\varphi \in H_0^{1,p}(G;\mu)$ に対し，

$$\varphi_i = \varphi + u + v_i - u_i$$

とおくと，$\varphi_i \in H_0^{1,p}(G;\mu)$ で G 内殆どいたるところ $u_i + \varphi_i \geq \psi_i$ であるので，

$$\int_G \mathcal{A}(x, \nabla u_i)\cdot\nabla\varphi_i\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,\,u_i)\varphi_i\,dx \geq 0$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
&\int_G \mathcal{A}(x, \nabla u_i)\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,\,u_i)\varphi\,dx \\
=\;& \int_G \mathcal{A}(x, \nabla u_i)\cdot\nabla\varphi_i\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,\,u_i)\varphi_i\,dx \\
+\;& \int_G \mathcal{A}(x, \nabla u_i)\cdot(\nabla\varphi - \nabla\varphi_i)\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,\,u_i)(\varphi-\varphi_i)\,dx \\
\geq\;& \int_G \mathcal{A}(x, \nabla u_i)\cdot(\nabla u_i - \nabla u)\,dx - \int_G \mathcal{A}(x, \nabla u_i)\cdot\nabla v_i\,dx \\
+\;& \int_G \mathcal{B}(x, u_i)(u_i - u)\,dx - \int_G \mathcal{B}(x, u_i)v_i\,dx.
\end{aligned}$$

$i\to\infty$ のとき，上の最後の式は 0 に収束するので，

$$\begin{aligned}
&\int_G \mathcal{A}(x, \nabla u)\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,\,u)\varphi\,dx \\
=\;& \int_G w^{-1/p}\mathcal{A}(x, \nabla u)\cdot\nabla\varphi w^{1/p}\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,\,u)\varphi\,dx \\
=\;& \lim_{i\to\infty}\left\{\int_G w^{-1/p}\mathcal{A}(x, \nabla u_i)\cdot\nabla\varphi w^{1/p}\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,\,u_i)\varphi\,dx\right\} \\
=\;& \lim_{i\to\infty}\left\{\int_G \mathcal{A}(x, \nabla u_i)\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_G \mathcal{B}(x,\,u_i)\varphi\,dx\right\} \geq 0
\end{aligned}$$

であることから，式 (2.1) を得る．

References

[1] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, Clarendon Press, 1993.

[2] T. Ono, On solutions of quasi-linear partial differential equations $-\mathrm{div}\mathcal{A}(x,\nabla u) + \mathcal{B}(x,u) = 0$, RIMS Kōkyūroku 1016 (1997), 146–165.