行列の階数の視覚化と基底ベクトル

尾関　孝史*

Visualization of Matrix Rank and Basis Vectors

Takashi OZEKI*

ABSTRACT

Although one of the goals of linear algebra is to solve simultaneous linear equations, that is not the ultimate goal. One of the ultimate goals is to represent a point as a coordinate in an N-dimensional space using N basis vectors. The most well-known basis is the xy coordinate, known as Cartesian coordinates. However, when learning linear algebra in university lectures, the abstracted concepts are expressed in mathematical formulas, which often fail to create an image for beginning students. Therefore, in this paper, each row of the simultaneous linear equations is regarded as a hyperplane, and it is visualized in the 2-dimensional and 3-dimensional cases that the linearly independent number of their normal vectors is equal to the rank of the coefficient matrix of the simultaneous linear equations.

キーワード：連立一次方程式，行列式，超平面，基底ベクトル，行列の階数

Keywords: Linear Simultaneous Equations, Determinant, Hyperplane, Basis Vectors, Matrix Rank

１．まえがき

線形代数は連立一次方程式を解くことが目的の 1 つではあるが、それが最終目的ではない。最終目的の 1 つは、N 次元空間を N 個の基底ベクトルを利用して、点を座標として表現することである。その最もよく知られている基底が、デカルト座標で知られているxy座標である。しかしながら、大学の講義で線形代数を学ぶ際、抽象化された概念を数式で表現するため[1,2]、初学者にはイメージが湧かないことが多い。そこで、本論文では、連立一次方程式の各行を超平面とみなし、それらの法線ベクトルの線形独立な個数が連立一次方程式の係数行列の階数に等しいことを 2 次元と３次元の場合で視覚化することを試みる。

２．２元連立一次方程式とxy平面

２元連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (1)$$

の解は、その行列式の値が 0 でない、すなわち

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

の時、ただ一つの解が存在する。その解は、逆行列を用いると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} de - bf \\ -ce + af \end{pmatrix}$$

と表される。それでは、行列式の値が 0 の時、すなわち、$ad - bc = 0$の時はどうなるのか？

式(1)は、xy平面上で考えると、2 直線

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

と考えることができる。$ad - bc = 0$が成り立つ場合、２つの直線が平行である。なぜなら、２つの直線が平行であれば、その２つの直線の垂直方向である法線ベクトル$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$も平行であり、

$$a{:}b = c{:}d$$

だ成り立つため、$ad - bc = 0$となるからである。この時、以下の２つの場合がある。

（１）　$a{:}b{:}e = c{:}d{:}f$の場合、２つの直線は同一であり、連立一次方程式(1)の解は、この直線の点全てとなる。即ち解は一意に定まらない（不定という）。

（２）　$a{:}b{:}e \neq c{:}d{:}f$の場合、２つの直線は平行であるが異なる。ユークリッドの公理によると「異なる平行線は交わらない」ため、交点は存在しない。すなわち、連立一次方的式(1)の解は存在しない（不能という。図１参照）。

*情報工学科

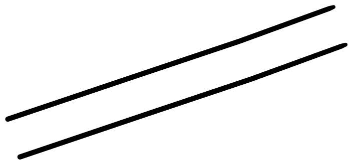

図１：行列式の値が 0 で異なる平行な２直線の場合

また、２つの直線の法線ベクトル(a,b)，(c,d)が平行でない場合、２つの直線も平行でないため、交点がただ１つ存在する。すなわち、連立一次方程式(1)は解をただ１つ持つ。

これを行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で見ると、２つの行ベクトル（２つの平面の法線ベクトル）(a,b)と(c,d)が平行でなければ、その行列式は 0 でなく、連立一次方程式は解を持つということができる。数学の用語では、行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$はその**階数**（rank）が２であるという。また、２つの行ベクトル(a,b)と(c,d)は互いに**線形独立**という。なお、２つの行ベクトル（法線ベクトル）が平行な場合は、その行列の階数は１であり、２つの行ベクトルは、互に**線形従属**であるという。実は、行列式の絶対値$|ad-bc|$は、２つの行ベクトル(a,b), (c,d)が作る平行四辺形の面積に等しい(図２参照)。従って、行列式の値が$ad-bc=0$の場合は、平行四辺形の面積が 0、すなわち、２つの行ベクトルが平行なことを意味する。

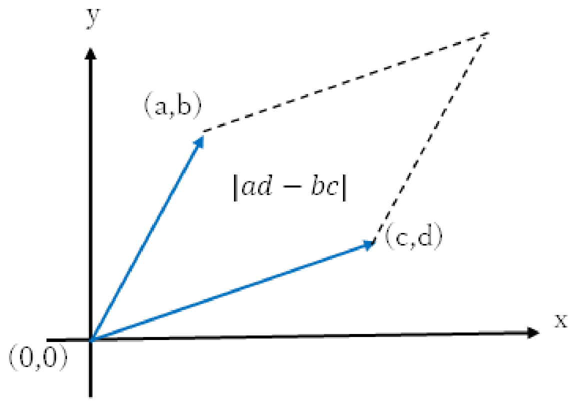

図２：２つの行ベクトルと平行四辺形の面積
（行列式の絶対値）

２つの行ベクトルが平行でなければ、２つの媒介変数s,tを用いた式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

は、xy平面のすべての点を表すことが可能である。一般に、平行でない（線形独立な）２つのベクトルを利用すると、xy平面全体の点を表すことができるため、xy平面の**基底ベクトル**という。特に、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$のような２つの直交する基底を**直交基底**といい、更に、全ての基底の大きさが 1 の場合を**正規直交基底**という。２次元平面では、基底の数はちょうど２個必要である。

転置行列の行列式の値は元の行列の行列式の値と変わらない。実際、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

が成り立つので、２つの行ベクトル(a,b), (c,d)が線形独立（平行でない）なら、２つの列ベクトル$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$も線形独立（平行でない）である。すると、連立一次方程式(1)は

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

と表され、$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$が２次元平面の基底であることから、点$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$をこの基底で表す媒介変数$x,y$が存在することになる。すなわち、これが、連立一次方程式(1)の解に該当する。

３．３元連立一次方程式とxyz空間

３変数の場合は２変数の場合ほど単純ではない。3 元連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix} \tag{2}$$

の解はその行列式の値

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei-fh) - b(di-fg)$$
$$+ c(dh-eg) \neq 0$$

の時、逆行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$$

と表される。それでは、$|A|=0$の場合、解はどうなるのであろうか？

まず、２変数の場合と同じように考える。式(2)は、xyz空間で考えると３平面

$$ax+by+cz=j$$
$$dx+ey+fz=k$$
$$gx+hy+iz=l$$

と考えることができ、解はその３平面の交点を意味す

る。最初の２平面が平行でなければ、その２平面には交線が１つ存在する（図３参照）。

図３：２平面とその交線

更に、第３の平面がその交線と平行でなければ、ただ１つの交点が存在する（図４参照）。

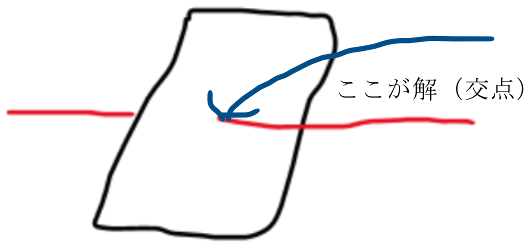

図４：交線と第３の平面

しかし、３平面が平行でない場合でも、ただ１つの交点とならない場合がある。すなわち、３平面が共通交線を持つ場合である。この場合、３平面が交線の周りを回転している（図５参照）。

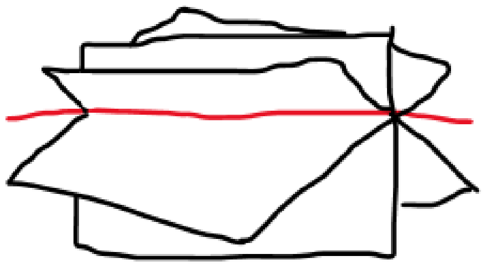

図５：３平面と共通交線

このことを３平面の３つの法線ベクトルを利用して明らかにする。３平面の３つの法線ベクトル$(a,b,c),(d,e,f),(g,h,i)$は全て交線に垂直であることから、３つの法線ベクトルはある平面に含まれる。言い換えると、３つの法線ベクトルは２次元平面内にあり、３次元を成すことはない。従って、この場合は行列$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$の階数は３ではなく２となる。また、平面では、基底は２つでよいので、３つの各法線ベクトルは他の２つの法線ベクトルで表すことができる。例えば、

$$\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

を満たす定数α，βが存在する。すなわち、３つの法線ベクトルは線形独立ではなく線形従属の関係にある（図６参照）。

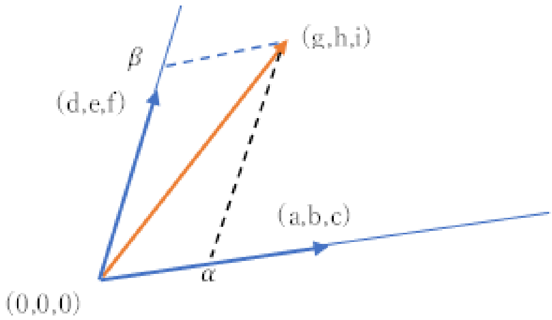

図６：線形従属の関係

では、３つの法線ベクトルが３次元空間の基底、すなわち３次元をなす場合はどうなるのであろうか。実は、行列式の絶対値は、３つの法線ベクトルがなす平行六面体の体積に等しい（図７参照）。

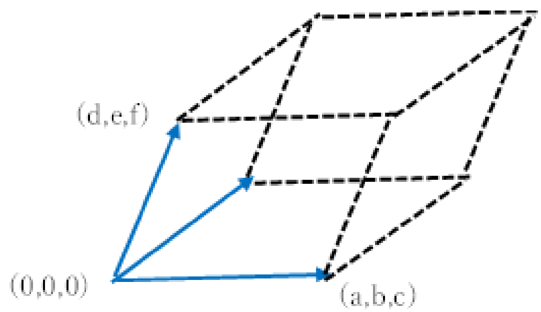

図７：３つの法線ベクトルが成す平行六面体

以上のことから、３つの法線ベクトルが平行六面体を成せば、その行列式の値が０でないため、逆行列が存在し、３元連立一次方程式(2)はただ一つの解を持つ。すなわち、３平面はただ１つの交点を持つ。もし、３つの法線ベクトルが２次元または１次元を成す場合、平行六面体は平行四辺形または線分に縮退し、体積が０となることから、その行列式も０となる。このため、逆行列は存在せず、不定または不能となる。一方、３つの法線ベクトルが３次元を成すなら、３つの媒介変数 s，t，u を用いた式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$$

は、xyz空間のすべての点を表すことができる。一般に、線形独立な任意の３つのベクトルはxyz空間を表すことができ、xyz空間の**基底ベクトル**という。特に、$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$のような３つの直交する基底を**直交基底**といい、更に、全ての基底の大きさが１の場合を**正規直交基底**という。３次元空間では、基底の数はちょうど３個必要である。

転置行列の行列式の値は元の行列の行列式の値と変わらない。実際、

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{vmatrix}$$
$$= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

が成り立つので、３つの行ベクトル(a,b,c), (d,e,f), (g,h,i)が線形独立なら、３つの列ベクトル$\begin{pmatrix}a\\d\\g\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}b\\e\\h\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}c\\f\\i\end{pmatrix}$も線形独立である。すると、連立一次方程式(2)は

$$\begin{pmatrix}j\\k\\l\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}a\\d\\g\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\e\\h\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}c\\f\\i\end{pmatrix}$$

と表され、$\begin{pmatrix}a\\d\\g\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\e\\h\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\f\\i\end{pmatrix}$が３次元空間の基底であることから、点$\begin{pmatrix}j\\k\\l\end{pmatrix}$をこの基底で表す媒介変数$x,y,z$が存在することになる。すなわち、これが、連立一次方程式(2)の解に該当する。

４．Ｎ元連立一次方程式への一般化

Ｎ元連立一次方程式

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} \qquad (3)$$

のＮ個の超平面$(i=1,2,\cdots,N)$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$$

のＮ個の法線ベクトル（行ベクトル）

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{1N}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{2N}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}a_{N1}\\a_{N2}\\\vdots\\a_{NN}\end{pmatrix},$$

が互いに線形独立であれば、そのＮ個の法線ベクトルが成す平行超２Ｎ面体の体積は、その係数行列の行列式に等しく、0 でない。従って、係数行列は逆行列を持つ。その結果、Ｎ元連立一次方程式(3)はただ一つの解を持つ。また、全ての法線ベクトルが線形独立であることから、Ｎ個の媒介変数t_iを用いた式

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_N\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{1N}\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{2N}\end{pmatrix}+\cdots+t_N\begin{pmatrix}a_{N1}\\a_{N2}\\\vdots\\a_{NN}\end{pmatrix}$$

はＮ次元空間を表すことができ、法線ベクトルは基底ベクトルとなる。そして、転置行列の行列式の値は元の行列の行列式の値と変わらない。従って、係数行列の列ベクトル

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{N1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{N1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}a_{1N}\\a_{2N}\\\vdots\\a_{NN}\end{pmatrix}$$

も基底ベクトルとなる。すると、連立一次方程式(3)は

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{N1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{N1}\end{pmatrix}+\cdots,+x_n\begin{pmatrix}a_{1N}\\a_{2N}\\\vdots\\a_{NN}\end{pmatrix}$$

と表され、点$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$をこの基底で表す媒介変数$x_i$が存在することになる。すなわち、これが、連立一次方程式(3)の解に該当する。

５．まとめ

本論文では、連立一次方程式の各行を超平面とみなし、そのＮ個の法線ベクトルの線形独立な個数が連立一次方程式の係数行列の階数に等しいことを２次元と３次元の場合で視覚化した。その結果、全ての法線ベクトルが互いに線形独立であれば、それらのベクトルが基底ベクトルになることも示した。このように、視覚化することで、初学者が線形代数を学ぶ際、少しでも理解が深まることを期待する。

参考文献

[1] 斎藤正彦, 線型代数入門, 東京大学出版会, 1990.
[2] 小松醇郎，永田雅宜，代数学と幾何学，1966.
[3] 石原繁，竹村由也，解析幾何，森北出版株式会社，1993.
[4] 尾関　孝史，あたたかい代数幾何，福山大学工学部情報工学科「線形代数」講義テキスト, 2023.