

# 有限状態機械の状態推定と予測

渡辺 浩司\* 猪飼 武夫† 福永 邦雄†

State Estimation and Prediction of Finite State Machines

Koji WATANABE\* Takeo IKAI† Kunio FUKUNAGA†

## ABSTRACT

We have already pointed out that the state identification process of an adaptive experiment, which is one of off-line state identification experiments for a finite state machine, can be regarded as an on-line state estimation process. Based on this observation, we have constructed an on-line state estimator, called a state observer (SO) for a Moore machine. In this paper, we first derive the SO for a Mealy machine similar to that for a Moore machine. We next investigate state identification processes of SOs derived from the adaptive experiment, and then point out that the SO for the Moore machine is a current state observer (a CSO) which estimates the current state, and the SO for the Mealy machine is a predicting state observer (a PSO) which predicts the state of the next time. Moreover, we construct the CSO for the Mealy machine and the PSO for the Moore machine.

キーワード: 有限状態機械, 状態推定, 状態予測, 状態観測器

Keywords: finite state machine, state estimation, state prediction, state observer

## 1. まえがき

オートマトン論では固定実験や適応実験といった有限状態機械のオフラインの状態同定の研究 [1] は行われているものの, オンラインの状態推定に関する研究は少ない. Gattoら [3] は線形システム論 [4] におけるオンラインの状態推定器である状態観測器 (SO) の概念 [2] を基に, basic reconstructor という状態推定器を構成しているが, それに続く研究は見当たらない.

さて, 適応実験には適応ホーミング系列 (AHS) [1] と呼ばれる入力系列が用いられる. 論文 [5] では, この AHS の導出木に着目し, それがオンラインの状態推定の過程を表現している, すなわちオンライン状態同定のメカニズムがオフラインの状態同定に内在していることを見いだした. つまり, 適応実験では AHS の個々の入力記号と, それに対する状態同定対象機械の出力応答に基づいて1ステップの状態推定が行われる. AHS の導出木は, この1ステップの推定過程をその枝を辿る動作として表

現しており, 到達したノードがその時点での状態推定を与える. このような観点から, AHS の導出木にリンクを付加した, リンク付き適応ホーミング木 (AHTL) を導入し, それに基づいてムーア機械に対する SO を導出した. 本論文ではまずミーリー機械に対する SO をムーア機械の場合と同様に構成する.

次に, AHTL の枝を辿る動作に時間を導入することで, AHTL から導かれる SO が, ムーア機械の場合は現時刻の状態の推定を, ミーリー機械の場合は一時刻先の状態の予測をそれぞれ実行するシステムとなっていることを示す. このような SO は線形システム論ではそれぞれ現時刻型 SO (CSO) および予測型 SO (PSO) と呼ばれる.

さらに, AHTL から導出される SO に加えて, ミーリー機械の CSO およびムーア機械の PSO を導出し, それらの収束系列, すなわち SO の状態推定が完了するような対象機械への入力系列, のクラスを考察する.

\* 情報処理工学科

† 大阪府立大学大学院

## 2. 状態観測器

適応実験などの有限状態機械 (FSM) のオフラインの状態同定に関する研究 [1] では, 対象機械の最終状態が同定されるような入力系列の構成法やその性質等に重点がおかれ, 実験における状態同定の過程に注目したものは見当たらない. 論文 [5] では, 適応実験の状態同定過程に着目し, 実験に用いる入力系列である適応ホーミング系列 (AHS) [1] の導出木が, FSM のオンラインの状態推定の過程を表現していることを指摘した. そして AHS の導出木に基づいてムーア機械のオンラインの状態推定を行なう状態観測器 (SO) が構成できることを述べた.

本章ではムーア機械の場合と同様の方法でミーリー機械に対する SO の構成を行なう.

### 2.1 リンク付き適応ホーミング木

$n$  状態,  $m$  入力及び  $s$  出力の FSM  $M$  は  $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, p_0)$  で定義される. ここで  $Q = \{q_i | i = 1, \dots, n\}$  は状態の集合,  $\Sigma = \{a_k | k = 1, \dots, m\}$  は入力記号の集合,  $\Delta = \{\alpha_l | l = 1, \dots, s\}$  は出力記号の集合であり  $p_0 \in Q$  は初期状態である.  $\delta$  は次のように定義される状態推移関数である.

$$\delta(q_i, a_k) = Q' \dots \dots \dots (1)$$

ここで  $Q' \subseteq Q$  である. 式 (1) において, 任意の  $q_i \in Q$  および  $a_k \in \Sigma$  に対して,  $|\delta(q_i, a_k)| \leq 1$  ( $|\cdot|$  は集合の要素数) のとき,  $M$  は決定性,  $|\delta(q_i, a_k)| = 1$  のときは決定性かつ完全定義 [1] である. また  $|\delta(q_i, a_k)| \geq 2$  となる  $q_i$  および  $a_k$  が存在するときは  $M$  は非決定性である.

$\lambda$  は出力関数であり,

$$\lambda(q_i) = \alpha_l \dots \dots \dots (2)$$

のとき  $M$  はムーア機械,

$$\lambda(q_i, a_k) = \alpha_l \dots \dots \dots (3)$$

のとき  $M$  はミーリー機械と呼ばれる. なお,  $M$  がムーア機械もしくはミーリー機械であることを明示する場合はそれぞれ  $M_O, M_E$  で示す.

次に  $M_O, M_E$  に対する AHS の導出木にリンクを付加した, リンク付き適応ホーミング木 (AHTL) 及び AHTL に基づいて定義される, 一般化適応ホーミング系列 [5] について述べる. なお, FSM  $M$  は決定性かつ完全定義であり, さらに既約 [1] であるとする.

図 1 のミーリー機械  $M_{E1}$  に対する AHTL は図 2 のようになる. なお点線はリンクを表す.

$N(M)$  を FSM  $M$  の AHTL のすべてのノードの集合とする. AHTL の各ノード  $r \in N(M)$  は  $M$  の状態集合  $Q$  の部分集合であり, 従って  $N(M) \subseteq 2^Q$  ( $2^Q$  は  $Q$  の巾集合) である. さらに  $T(M)$  を葉の集合とする.

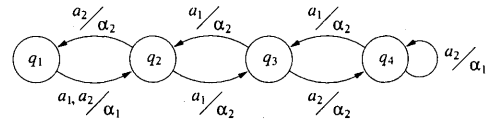


図 1 ミーリー機械  $M_{E1}$

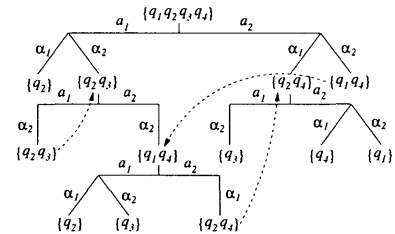


図 2 ミーリー機械  $M_{E1}$  のリンク付き適応ホーミング木

AHTL の根  $r^0 \in N(M)$  は  $M$  の初期状態の候補の集合である. 図 2 では  $M_{E1}$  のすべての状態を初期状態の候補としている. 各ノードからの水平方向の枝は入力記号  $a_k \in \Sigma$ , 垂直もしくは斜め方向の枝は出力記号  $\alpha_l \in \Delta$  でラベル付けされる. ノード  $r$  と,  $r$  から  $(a_k, \alpha_l)$  でラベル付けされた枝の先のノード  $r' \in N(M)$  は

$$r' = (a_k, \alpha_l)r \dots \dots \dots (4)$$

と表わす. 式 (4) はラベル  $(a_k, \alpha_l)$  を作用素とする  $r$  から  $r'$  への変換を表わす.  $r'$  は次式より求める.

$$r' = \{q_i | \lambda(q_i) = \alpha_l, q_i \in \delta(r, a_k)\} (\text{ムーア}) \dots (5)$$

$$r' = \delta(\{q_i | \lambda(q_i, a_k) = \alpha_l, q_i \in r\}, a_k) (\text{ミーリー}) (6)$$

なお, 状態推移関数は,  $Q$  の部分集合に対する関数に拡張している.

AHTL に同じ状態集合を持つノードが複数存在する場合はそのうち一つのみが子孫をもち, その他は子孫を持つノードにリンクする. また,  $Q$  の単一の要素を持つノードは葉となる.

さて,  $L(M) = \{(a_k, \alpha_l) | a_k \in \Sigma, \alpha_l \in \Delta\}$  をラベルの集合とする.  $L^*(M)$  を  $L(M)$  のクリーネ閉包とし, その要素をラベル系列と呼ぶ.  $r'' = (a'_k, \alpha'_l)r'$  ( $r'' \in N(M)$ ) のとき, 式 (4) より  $r$  から  $r''$  へのパスはラベル系列  $(a'_k, \alpha'_l)(a_k, \alpha_l) \in L^*(M)$  を用いて  $r'' = (a'_k, \alpha'_l)(a_k, \alpha_l)r$  と表わす.

AHTL の根  $r^0$  から, 葉  $r \in T(M)$  へ至るラベル系列をホーミングラベル系列と呼び, その集合を  $H(M, r^0) = \{\gamma \in L^*(M) | r = \gamma r^0, r \in T(M)\}$  とする. さらに  $H(M, r^0)$  に基づいて一般化 AHS を次のように定義する.

**定義 2.1** [5] 初期状態の候補集合が  $r^0$  である FSM  $M$  に対するホーミングラベル系列の集合  $H(M, r^0)$  に対して  $H^I(M, r^0) = \{\gamma^I | \gamma \in H(M, r^0)\}$  として得られる  $H^I(M, r^0)$  の要素を  $M$  の一般化適応ホーミング系列 (一般化 AHS) と呼ぶ. ここで,  $\gamma^I$  は  $\gamma = (a_{k_d}, \alpha_{l_d})(a_{k_{d-1}}, \alpha_{l_{d-1}}) \cdots (a_{k_1}, \alpha_{l_1}) \in L^*(M)$  のとき,  $\gamma^I = a_{k_d} a_{k_{d-1}} \cdots a_{k_1}$  である. ■

## 2.2 AHTL に基づく状態観測器

FSM の状態観測器を次のように定義する.

**定義 2.2** [5]  $M$  を決定性, 完全定義かつ既約で初期状態が不明な FSM とする.  $M$  の状態観測器 (SO) とは,  $M$  の入出力対  $(a_k, \alpha_l)$  (AHTL のラベル), ここで  $a_k \in \Sigma$  および  $\alpha_l \in \Delta$ , をその入力とし,  $M$  の現在の状態の候補である推定状態集合を出力する FSM である.  $M$  に対する SO は  $M^S$  と表記する. ■

論文 [5] では式 (4) をムーア機械  $M_O$  から観測される入出力対  $(a_k, \alpha_l) \in L(M)$  による状態推定過程と捉え SO を構成した. なお,  $M_O$  に対する SO を  $M_O^S$  で表わす.  $M_O^S$  は AHTL の各ノード  $r$  を状態とし, 状態  $r$  において  $(a_k, \alpha_l)$  を入力として状態  $r'$  に推移し, 状態  $r'$ , すなわち AHTL のノード  $r'$  を出力するという動作を繰り返すことにより AHTL のパスを辿り, 葉に到達した時点で状態同定が完了する FSM である. ミーリー機械に対する SO もムーア機械の場合と同様に構成できる.

**定理 2.1** FSM  $M$  の SO  $M^S$  は次のようなムーア機械である.

$$M^S = (N(M), L(M), N(M), \delta^S, \lambda^S, r^0) \dots \dots (7)$$

ただし, 状態集合及び出力記号集合は  $N(M)$ ,  $(a_k, \alpha_l)$  を入力記号とみなし入力記号集合は  $L(M)$ ,  $r^0 \in N(M)$  は初期状態推定, すなわち初期状態の候補の集合である. さらに状態推移関数  $\delta^S$  は,  $M$  がムーア機械の場合,

$$\delta^S(r, (a_k, \alpha_l)) = \{q_i | \lambda(q_i) = \alpha_l, q_i \in \delta(r, a_k)\} \quad (8)$$

ミーリー機械の場合,

$$\delta^S(r, (a_k, \alpha_l)) = \delta(\{q_i | \lambda(q_i, a_k) = \alpha_l, q_i \in r\}, a_k) \quad (9)$$

となる. 出力関数  $\lambda^S$  はいずれも次式のようになる.

$$\lambda^S(r) = r \quad \dots \dots \dots (10)$$

ここで  $r \in N(M)$  及び  $(a_k, \alpha_l) \in L(M)$  である. ■

式 (8) および (9) はそれぞれ式 (5) および (6) を状態推移関数として記述したものである. なお, この定理の証明は,  $M$  がムーア機械の場合は [5] で示しており,  $M$  が

ミーリー機械の場合の証明もそれと同様となるのでここでは省略する.

さて,  $M^S$  の出力  $r$  が  $|r| = 1$ , すなわち  $r \in T(M)$  のとき  $M^S$  は収束するという. さらに,  $M^S$  がラベル系列  $\gamma \in L^*(M)$  によって収束するとき,  $\gamma^I$  を  $M^S$  の収束系列と呼ぶ.  $M^S$  の収束系列に関して次の定理が得られる.

**定理 2.2** 初期状態推定が  $r^0$  である FSM  $M$  の SOM<sup>S</sup> (7) の収束系列のクラスは  $M$  の一般化 AHS の集合  $H^I(M, r^0)$  である. ■

$M$  がムーア機械の場合の証明は [5] で与えており, ミーリー機械の場合も同様に証明できる.

## 3. 状態の推定と予測

適応実験では AHS の個々の記号を対象機械に入力し, それに対する出力に基づいて式 (4) で表現される 1 ステップの推定が行なわれる. これを 1 時刻で行なわれるとし, AHT 及び AHTL から導出される SO に時間を導入することで, SO  $M_O^S$  及び  $M_E^S$  が実際には異なる推定過程を実行していることを示す.

### 3.1 FSM の動作時間

AHTL に時間を導入するために, まず, FSM の動作時間を明示する [3].

式 (1) において  $q_i$  及び  $a_k$  を現時刻  $t$  での状態及び入力と見なしそれぞれ  $q_{it}$  及び  $a_{kt}$  で表わす. 初期状態  $p^0$  は動作開始時刻  $t = 0$  での状態  $p^0 = q_{i0}$  である. 状態推移は 1 時刻で行なわれるものとする.  $Q'$  は時刻  $t+1$  での状態集合  $Q'_{t+1}$  となる. 従って式 (1) は次のように時間を明示した式となる.

$$\delta(q_{it}, a_{kt}) = Q'_{t+1} \quad \dots \dots \dots (11)$$

出力には時間遅れがないとし, 出力関数 (2) 及び (3) に対しては次のように時間を導入する.

$$\lambda(q_{it}) = \alpha_{it} \quad (\text{ムーア機械}) \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$\lambda(q_{it}, a_{kt}) = \alpha_{it} \quad (\text{ミーリー機械}) \quad \dots \dots \dots (13)$$

### 3.2 AHTL 及び SO の動作時間

式 (11)~(13) に従うと, ムーアおよびミーリー機械の AHTL のノードに対してもそれぞれ以下のように時間が導入できる.

まず, AHTL の根  $r^0$  を時刻  $t = 0$  でのノードとし,  $r^0 = r(0)$  と表わす.

ムーア機械の場合は, 式 (5) において  $r$  を現時刻  $t$  のノード  $r(t)$  とした場合, 状態推移には 1 時刻を要することから  $\delta(r, a_k)$  より得られる状態  $q_i$  は時刻  $t+1$  で

の状態  $q_{i_{t+1}}$  となり、従って  $\alpha_i$  が時刻  $t+1$  での出力  $\alpha_{i_{t+1}}$ 、すなわち未来の出力となる。従って以下のように  $r = r(t-1)$  として時間を導入しなければならない。

$$r(t) = \{q_{i_t} | \lambda(q_{i_t}) = \alpha_{i_t}, q_{i_t} \in \delta(r(t-1), a_{k_{t-1}})\} \quad (14)$$

ここで  $t \geq 1$  である。

次にミーリー機械の場合、式(6)の  $r$  を  $r(t)$  で表わす。この時、 $r$  に含まれる状態  $q_i$  は時刻  $t$  での状態  $q_{i_t}$  となり、式(11)及び(13)より  $a_{k_t}$  及び  $\alpha_{i_t}$  もそれぞれ時刻  $t$  での入力  $a_{k_t}$  及び出力  $\alpha_{i_t}$  となる。状態推移は一時刻で行なわれることから  $r'$  は時刻  $t+1$  でのノード  $r(t+1)$  となる。従って式(6)は次のように時間が明示される。

$$r(t+1) = \delta(\{q_{i_t} | \lambda(q_{i_t}, a_{k_t}) = \alpha_{i_t}, q_{i_t} \in r(t)\}, a_{k_t}) \dots \dots (15)$$

ここで  $t \geq 0$  である。

以上より AHTL の枝の表現(4)はムーア機械の場合、

$$r(t) = (a_{k_{t-1}}, \alpha_{i_t}) r(t-1) \quad (t \geq 1) \dots \dots (16)$$

ミーリー機械の場合

$$r(t+1) = (a_{k_t}, \alpha_{i_t}) r(t) \quad (t \geq 0) \dots \dots (17)$$

となる。

$M_O^S$  及び  $M_E^S$  には AHTL のノードに対する時間と等しい動作時間が与えられる。つまり  $M_O^S$  及び  $M_E^S$  の状態推移関数(8)及び(9)はそれぞれ次のようになる。

$$\delta^S(r(t-1), (a_{k_{t-1}}, \alpha_{i_t})) = r(t) \quad (M_O^S) \dots (18)$$

$$\delta^S(r(t), (a_{k_t}, \alpha_{i_t})) = r(t+1) \quad (M_E^S) \dots (19)$$

SO は時刻  $t$  で式(18)及び(19)で示される時刻  $t$  での状態推定の結果を出力するものとする。つまり、時刻  $t$  での SO の出力を  $y(t)$  とすると出力関数(10)には次のように動作時間が導入される。

$$y(t) = \lambda(r(t)) = r(t) \quad (M_O^S) \dots \dots (20)$$

$$y(t) = \lambda(r(t+1)) = r(t+1) \quad (M_E^S) \dots \dots (21)$$

以上の時間導入より、式(4)が表わす AHTL は、ムーア機械ではラベル  $(a_{k_{t-1}}, \alpha_{i_t})$  に基づく現状態の推定過程を、ミーリー機械では時刻  $t$  でラベル  $(a_{k_t}, \alpha_{i_t})$  に基づく時刻  $t+1$  の状態の推定過程をそれぞれ表現していることが分かる。そして AHTL から得られる SO はこれらの過程を実行する FSM となっている。

線形システム論 [4] では、時刻  $t$  までの線形システムの入出力応答を用いてそのシステムの  $t$  での状態を求めることを推定、 $t+1$  での状態を求めることを予測と呼ぶ。そして、推定及び予測を行なう SO をそれぞれ現時刻型 SO(CSO) 及び予測型 SO(PSO) と呼ぶ。

以上より次の定理を得る。

**定理 3.3** ムーア機械  $M_O$  及びミーリー機械  $M_E$  の AHTL はそれぞれ状態の推定過程及び予測過程を表現し、AHTL から導かれる  $SOM_O^S$  及び  $M_E^S$  はそれぞれ CSO 及び PSO である。 ■

なお、FSM  $M$  の CSO を  $M^C$ 、PSO を  $M^P$  で表わす。

## 4. 推定と予測に基づく状態観測器

本章ではミーリー機械の CSO およびムーア機械の PSO をそれぞれ導出する。なお、本章以降では FSM を状態空間モデル [6] により表現する。状態推移関数による表現と比べて、状態空間モデルによる表現には、SO の動作が行列とベクトルの単純な積として表現できるなど、議論が見通し良く行えるという利点がある。

### 4.1 $PSOM_E^P$ の状態空間モデル

本節では 2 章で構成したミーリー機械  $M_E$  の  $PSOM_E^P$  の状態空間モデルを構成する。 $M_E^S$  の状態空間モデルは  $M_E^S$  の状態推移関数(19)および出力関数(21)をそれぞれベクトル方程式で表現することで導出できる。

状態推定の対象を完全定義でかつ既約な決定性ミーリー機械  $M_E = (\{A_k\}, \{C_k\}, \mathbf{x}_0)$  とする。ここで  $\{A_k\}$  は状態推移関数に対応する状態推移行列の集合、 $\{C_k\}$  は出力関数に対応する出力行列の集合であり、 $\mathbf{x}_0$  は観測開始時刻  $t=0$  での  $M_E$  の状態のベクトル表現である。

さて、式(19)は実際は  $\delta$  および  $\lambda$  を用いた式(15)の演算を行なっており、式(15)は次のような 2 つのステップに分割できる。

(Step 1)

$$p(t) = \{q_{i_t} | \lambda(q_{i_t}, a_{k_t}) = \alpha_{i_t}, q_{i_t} \in r(t)\} \dots \dots (22)$$

(Step 2)

$$r(t+1) = \delta(p(t), a_{k_t}) \dots \dots (23)$$

他方、ムーア機械  $M^O$  の場合、式(18)は

(Step 1')

$$v(t) = \delta(r(t-1), a_{k_{t-1}}) \dots \dots (24)$$

(Step 2')

$$r(t) = \{q_i | \lambda(q_i) = \alpha_{i_t}, q_i \in v(t)\} \dots \dots (25)$$

と分解される。両者の推定過程を比較すると、ミーリー機械の場合は、Step 1 で観測された出力  $\alpha_{i_t}$  に基づいて、 $r(t)$  に含まれる状態の選択を行ったのち、Step 2 で選択された状態の  $a_{k_t}$  による推移を行うが、ムーア機械は逆の手順で推定を行っていることがわかる。従ってミーリー機械の  $p(t)$  はムーア機械の Step 2' で得られる  $r(t)$ 、すなわち時刻  $t$  での状態の推定に相当する集合である。

次に, Step 1 および 2 をそれぞれベクトル方程式により表現する.

時刻  $t$  で  $M_E$  から観測される 入出力対  $(a_{k_t}, \alpha_{l_t})$  は,  $(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t))$  で表わす. ここで,  $\mathbf{u}(t)$  は FSM の状態空間モデルの入力ベクトル

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T \dots\dots\dots (26)$$

$\mathbf{y}(t)$  は出力ベクトル

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t))^T \dots\dots\dots (27)$$

である. なお, 上付きの  $T$  はベクトルの転置を表す.

式 (19) の  $r(t)$  は, 時刻  $t$  での  $M_E^S$  の状態であり, これを  $n$  次の状態予測ベクトル  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  で表わす.

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \dots, \hat{x}_n(t))^T \dots\dots\dots (28)$$

$$\hat{x}_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } q_i \in r(t) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n) \cdot (29)$$

同様に, Step 1 で得られる  $p(t)$  は, 時刻  $t$  での状態の推定を与えることから, これを状態推定ベクトル  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  により次のように表わす.

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \dots, \hat{x}_n(t))^T \dots\dots\dots (30)$$

$$\hat{x}_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } q_i \in p(t) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n) \cdot (31)$$

**補題 4.1** 式 (22) は, 以下のベクトル方程式により表現できる.

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^s u_k(t) y_l(t) B_{lk} \hat{\mathbf{x}}(t) \dots\dots\dots (32)$$

ここで  $B_{lk}$  は次のように定義される  $n$  次対角行列であり, これを状態推定行列と呼ぶ.

$$B_{lk} = [b_{lk_1} \ b_{lk_2} \ \dots \ b_{lk_n}] \dots\dots\dots (33)$$

$$b_{lk_i} = \begin{cases} e_i^n & \text{if } C_k e_i^n = e_i^s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots (34)$$

ここで  $l = 1, \dots, s$  及び  $k = 1, \dots, m$  であり, さらに  $e_i^n$  は状態  $q_i$  の,  $e_i^s$  は出力  $\alpha_l$  の単位ベクトル表現である. ■

(証明) 時刻  $t$  において  $a_k \in \Sigma$  が入力され,  $\alpha_l \in \Delta$  が観測されたとする. このとき  $u_k(t) = 1$ ,  $y_l(t) = 1$ ,  $u_{k'}(t) = 0$  (ここで  $k' \neq k$ ), および  $\alpha_{l'}(t) = 0$  (ここで  $l' \neq l$ ) となり, 従って式 (32) において,  $B_{lk}$  が選択され, 式 (32) は  $\hat{\mathbf{x}}(t) = B_{lk} \hat{\mathbf{x}}(t)$  となる.

式 (34) の条件  $C_k e_i^n = e_i^s$  は,  $\lambda$  を用いて書くと  $\lambda(q_i, a_k) = \alpha_l$  である. すなわち  $B_{lk}$  は状態  $q_i$  のベクトル表現  $e_i^n$  との積  $B_{lk} e_i^n = b_{lk_i}$  によって,  $q_i$  が  $\lambda(q_i, a_k) = \alpha_l$  を満たすとき,  $b_{lk_i} = e_i^n$  とする行列

である. 従って,  $I(t) = \{i | \hat{x}_i(t) = 1\}$  および  $J_{lk}(t) = \{j | C_k e_j^n = e_i^s, \hat{x}_j(t) = 1\}$  とすると, 次式を得る.

$$B_{lk} \hat{\mathbf{x}}(t) = B_{lk} \sum_{i \in I(t)} e_i^n = \sum_{j \in J_{lk}(t)} e_j^n \dots\dots\dots (35)$$

集合  $J_{lk}(t) = \{j | C_k e_j^n = e_i^s, \hat{x}_j(t) = 1\}$  は, 式 (22) の右辺  $\{q_{i_t} | \lambda(q_{i_t}, a_{k_t}) = \alpha_{l_t}, q_{i_t} \in r(t)\}$  と等しく, 従って式 (32) は式 (22) のベクトル方程式による表現である. ■

対角要素が  $v_1, \dots, v_n$  の  $n$  次対角行列を  $\text{diag}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{diag}\{\mathbf{v}^T\}$ , ここで  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$  と表す.

**補題 4.2** 状態推定行列  $B_{lk}$  は次式より得られる.

$$B_{lk} = \text{diag}\{e_i^{sT} C_k\} \quad (l = 1, \dots, s) \dots\dots\dots (36)$$

ここで  $e_i^{sT}$  は  $e_i^s$  の転置ベクトルである. ■

(証明)  $C_k$  の各行を  $c_i^k = (c_{i_1}^k, \dots, c_{i_n}^k)$  とすると,

$$\text{diag}\{e_i^{sT} C_k\} = \text{diag}\{c_i^k\} \quad (l = 1, \dots, s) \dots\dots (37)$$

が成立する.  $d_i^k$  を  $\text{diag}\{c_i^k\}$  の第  $i$  列とすると,

$$d_i^k = \begin{cases} e_i^n & \text{if } c_{i_i}^k = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n) \dots\dots (38)$$

である. 条件  $c_{i_i}^k = 1$  は, 状態  $q_i$  の入力  $a_k$  による出力が  $\alpha_l$  であることを表わす. これは式 (34) の条件  $C_k e_i^n = e_i^s$  と等しく, 従って  $d_i^k = b_{lk_i}$  である. 故に, 式 (36) で表される行列は状態推定行列である. ■

式 (23) は  $M_E$  の状態推移行列  $A_k$  を用いて次のように表現できる.

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1) = \sum_{k=1}^m u_k(t) A_k \hat{\mathbf{x}}(t) \dots\dots\dots (39)$$

式 (32) と (39) から  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  を消去し,  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  を  $\hat{\mathbf{x}}^P(t)$  と書くと,  $M_E^P$  は次の定理のように定式化できる.

**定理 4.4** ミーリー機械  $M_E = (\{A_k\}, \{C_k\}, \mathbf{x}_0)$  の  $\text{PSOM}_E^P$  は次のような  $\mathbf{B}$  上の状態空間モデルとして与えられる.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}^P(t+1) = \sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^m u_k(t) y_l(t) A_k B_{lk} \hat{\mathbf{x}}^P(t) \\ \mathbf{z}^P(t) = \hat{\mathbf{x}}^P(t+1) \quad (t \geq 0) \end{cases} \quad (40)$$

ここで  $B_{lk} = \text{diag}\{e_i^{sT} C_k\}$  であり,  $\mathbf{z}^P(t)$  は時刻  $t$  での出力である. ■

モデル (40) の初期状態予測  $\hat{\mathbf{x}}^P(0)$  は初期状態の候補を与えられているなら, それらのベクトル表現の和とし, そうでないなら  $\hat{\mathbf{x}}^P(0) = \mathbf{1}^n$  とする. ここで  $\mathbf{1}^n$  は長さ  $n$  ですべての成分が 1 のベクトルである.

状態方程式 (モデル (40) の第一式) は式 (17) を行列・ベクトル演算で表現したものであり, 作用素としてのラ

ベル  $(a_k, \alpha_l)$  を状態推移行列  $A_k$  と状態推定行列  $B_{lk}$  の積  $A_k B_{lk}$  により実現している。

なお、ミーリー機械の CSO と、ムーア機械の PSO および CSO についても同様に状態空間モデルが導出できるがここでは省略する。

#### 4.2 状態観測器の収束系列

オフラインの状態同定実験における入力系列は実験終了時に最終状態が同定されるように設計されている。

一方、オンラインの状態推定では、対象機械への入力は任意であるため、推定器の推定の誤差がどのように減少するかという、収束性の検討が重要な問題となる。

線形システム論における SO は、対象システムが可観測(可検出)である場合、漸近安定となるよう設計できることが知られており、その収束性は保証される [2]。しかしながら、状態推移関数やブール半環上の状態空間モデルとして表現される FSM の SO に対しては漸近安定性に基づく収束性の議論は困難である。

そのため、論文 [5] では、ムーア機械  $M_O$  に対する  $CSOM_O^C$  の収束性を、その収束系列全体を特定するという形で議論を行い、それが  $M_O$  の一般化 AHS の集合となることを示した。つまり、 $M_O^C$  の収束系列のクラスは、AHTL によって定めることができる。今回新たに導出した SO のうち、ミーリー機械  $M_E$  の  $PSOM_E^P$  の収束系列のクラスについては、定理 2.2 で述べたように、 $M_E$  の一般化 AHS の集合となる。

$M_E^C$  および  $M_O^P$  の収束系列のクラスに関しては、例えば  $M_E^P$  の時刻  $t$  の状態予測によって、時刻  $t$  の  $M_E^C$  の推定が得られるというように、状態の予測と推定は相互に依存しており、このような依存関係に基づいて、 $M_E^C$  および  $M_O^P$  の収束系列を考察することができる。その結果、 $M_E^C$  および  $M_O^P$  の収束系列のクラスが、それぞれ  $M_E^P$  および  $M_O^C$  の収束系列である一般化 AHS により特徴づけられる。

$M_E^C$  および  $M_O^P$  の収束系列のクラスに関して次の定理を得る。なお、これらの証明は紙面の都合上省略する。

**定理 4.5** 初期状態推定が  $\hat{x}^C(0)$  であるミーリー機械  $M_E$  の  $CSOM_E^C$  の収束系列のクラスは

$$R(M_E, \hat{x}^C(0)) = \{a_k \gamma^I a_{k'}, \gamma^I a_{k'} | a_k, a_{k'} \in \Sigma, \gamma^I \in H^I(M_E, A_{k'} \hat{x}^C(0))\} \quad (41)$$

である。 ■

**定理 4.6** 初期状態予測が  $\hat{x}^P(0)$  であるムーア機械  $M_O$  の  $PSOM_O^P$  の収束系列のクラスは

$$R(M_O, \hat{x}^P(0)) = \{a_k \gamma^I, \gamma^I | a_k \in \Sigma, \gamma^I \in H^I(M_O, B_{i_0} \hat{x}^P(0))\} \quad (42)$$

である。なお、 $B_{i_0}$  は時刻  $t=0$  での  $M_O$  の出力  $\alpha_{i_0}$  に対する状態推定行列である。 ■

## 5. まとめ

適応ホーミング系列 (AHS) の導出木は FSM のオンラインの状態推定過程を表現しており、これを拡張したリンク付き適応ホーミング木 (AHTL) に基づいてムーア機械及びミーリー機械に対する状態観測器 (SO) が構成できる。

AHS の設計という観点からはミーリー機械及びムーア機械の AHTL の間に違いは認識できない。しかしながら、AHTL がオンラインの状態推定を表現しているという見地から、AHTL に時間の概念を導入することで、ミーリー機械及びムーア機械の AHTL の相違点、すなわちミーリー機械の AHTL は状態の予測、ムーア機械の AHTL は現状態の推定という、異なった推定過程を表現していることが明らかとなった。従って、AHTL から導かれる SO もそれぞれ予測と推定という異なる推定過程を実行するムーア機械である。

さらに、SO の収束系列のクラスが一般化 AHS もしくはそれに関連する系列の集合となることを示した。

## 参考文献

- [1] F.C.Hennie : Finite-state Models for Logical Machines, John Wiley & Sons, New York,(1968).
- [2] D.G.Luenberger : An introduction to observers, IEEE Trans. Autom. Control, vol.AC-16, no.6, pp.596-602, Dec,(1971).
- [3] M.Gatto and G.Guardabassi : The regulator theory for finite automata, Inform. Control, vol.31, pp.1-16,(1976).
- [4] C.Chen : Linear System Theory and Design, CBS College, New York,(1984).
- [5] K.Watanabe, T.Ikai, and K.Fukunaga : State observers for Moore machines and generalized adaptive homing sequences, IEICE Trans, Inf & Syst, vol.E84-D,No.4,(2001).
- [6] 猪飼, 新谷, 福永 : 順序機械の学習 -Angluin の FA 学習と最小部分実現-, 信学技報, COMP95-63, (1995).