福山大学工学部紀要
第28巻 2004年12月

線形計画法による測定値のデータ処理

小林　富士男*　　尾関　孝史*　　筒本　和広**

Application of Linear Programming to the Data Processing of Measured Values

Fujio KOBAYASHI*　Takashi OZEKI*　Kazuhiro TSUTSUMOTO**

ABSTRACT

It is possible to get the spectral energy distributions of light sources or the spectral transmittances of optical filters by solving the matrices of which the elements are the relevant values of retarding potential characteristic curves of a photoelectric tube under illumination of tested lights or transmitted lights through tested filters. In those cases, the solutions are affected remarkably by the errors which are involved in measured values so that solutions which fail to meet the problems in physics or engineering are sometimes obtained. Then, in order to get good results, the only way is to measure the current of photoelectric tube with high accuracy.

In this paper, we describe the principle to obtain the spectral energy distributions of light sources by means of linear programming applicable to retarding potential characteristics of a photoelectric tube.. Next, we obtain the spectral transmittance of an optical interference filter as a practical example. In computation of it, two sorts of numerical values of the retarding characteristic of the photoelectric tube used in experiment are adopted; say, one is reduced from the theoretical equation and the other is a real measured value. The final results obtained by linear programming agree fairly well with those obtained by the conventional spectrophotometric method.

In general, careful efforts are made in experiments to minimize the errors involved in measured values and the least squares method is often used when unavoidable errors still exist. In some cases, however, it may be difficult to repeat the measurements many times or to measure with high accuracy. In those cases, linear programming may be useful for the data processing.

キーワード：線形計画法，データ処理，測定値，連立方程式，最適解

Keywords : Linear programming, Data processing, Measured values, Simultaneous equations, Optimum solution

1．緒　言

マトリックス法によって解を求める場合，測定誤差が大きく影響し，得られる解が物理的条件を満足しないことも起こる．よい結果を得るためには高精度の実測データが必要である．このような観点から，制約式に物理的条件を付加して，できるだけ希望する結果が得られるようにすることを目的に，線形計画法[1,2]を利用してデータ処理を行う．

本論文では，実例として光電管の減速電圧特性を利用し，線形計画法によってデータ処理を行い，入射光の分光組成を分析そることが可能であることを

＊情報処理工学科　　＊＊人間文化学部 環境情報学科

示し，次に，理論的に誘導した減速電圧特性式[3]と実測値から干渉フィルタの分光透過率をもとめている．

2．線形計画法の理論

n 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を含んでいる m 個の連立1次方程式

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

と同じ未知数を含んでいる1次式

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_0 \quad (2)$$

が与えられるとき，連立方程式（1）を満足する負でない解のなかで，式（2）を最小にする解を求めることを考える．

いま，連立方程式（1）の階数 r は，$r = n$ ならば解は一義的に定まるので，ここでは $r < n$ とする．すると，r 個の未知数は $n - r = k$ 個の残りの未知数の1次結合で表される．余分な方程式を除去すれば $r = m$ となる．そこで，k 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ を自由未知数，残りの r 個の未知数 $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_{k+m}$ を基底未知数として式（1）を表し，

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+1} = \beta_1 - (\alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{1,k}x_k) \\ x_{k+2} = \beta_2 - (\alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \cdots + \alpha_{2,k}x_k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{k+m} = \beta_m - (\alpha_{m,1}x_1 + \alpha_{m,2}x_2 + \cdots + \alpha_{m,k}x_k) \end{array}\right\} \quad (3)$$

とする．必要なときには未知数の番号を付け替える．ここで，$\beta_1 \ge 0, \beta_2 \ge 0, \cdots, \beta_m \ge 0$ と仮定する．式（3）を式（2）に代入すれば，

$$Z = c_0 + \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\beta_j + (c_1 - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,1})x_1$$

$$+(c_2 - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,2})x_2 + \cdots\cdots\cdots$$

$$+(c_k - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,k})x_k \quad (4)$$

となる．すべての自由未知数を零とすれば，

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_k = 0 \\ x_{k+1} = \beta_1, x_{k+2} = \beta_2, \cdots, x_{k+m} = \beta_m \end{array}\right\} \quad (5)$$

と許容解が得られる．式（4）の各未知数の係数がいずれも非負であれば，Z の値を最も小さくするから式（5）が最適解となる．

1次式（4）の係数の中に負のものがあるとき，それらの負の係数をもった未知数の中から一つ選び x_s とする．x_s の値を増せば Z は小さくなる．そのときの x_s の制限条件を調べる．そこで式（3）において x_s 以外の自由未知数を零とすれば，次式となる．

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+1} = \beta_1 - \alpha_{1,s}x_s \\ x_{k+2} = \beta_2 - \alpha_{2,s}x_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{k+m} = \beta_m - \alpha_{m,s}x_s \end{array}\right\} \quad (6)$$

式（6）において，係数 $\alpha_{j,s} \le 0$ のときには，それに対する基底未知数は $x_{k+j} \ge 0$ となり，制約条件は常に満足される．$\alpha_{j,s} \le 0, (j = 1, 2, \cdots, m)$ とすべて正でなければ x_s には制限がなくなり最適解は存在しない．

そこで，$\alpha_{j,s} > 0$ のものがあれば，$\alpha_{j,s}, (j = 1, 2, \cdots, m)$ のなかで，$\alpha_{j,s} > 0$ の条件を満足するものから比 $\beta_j / \alpha_{j,s}$ をつくり，それらの中で最小のものの番号を l として，

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{l,s}} = \min \frac{\beta_j}{\alpha_{j,s}} \quad (7)$$

とする．x_s を零から次第に大きくしたとき x_{k+l} が最初に零となり，そのときの x_s は式（7）の値となる．

次に x_s と x_{k+l} を交換して，x_s を基底未知数，x_{k+l} を自由未知数とする．

式（3）の方程式から，

$$x_s = \frac{\beta_l}{\alpha_{l,s}} - \left(\frac{\alpha_{l,1}}{\alpha_{l,s}} x_1 + \frac{\alpha_{l,2}}{\alpha_{l,s}} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_{l,s-1}}{\alpha_{l,s}} x_{s-1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha_{l,s}} x_{k+l} + \frac{\alpha_{l,s+1}}{\alpha_{l,s}} x_{s+1} + \cdots + \frac{\alpha_{l,k}}{\alpha_{l,s}} x_k \right) \qquad (8)$$

が得られる．

これを式（３）の残りの方程式へ代入すれば，次式が求められる．

$$x_{k+j} = \beta_j - \frac{\alpha_{j,s}\beta_l}{\alpha_{l,s}} - \left(\alpha_{j,1} - \frac{\alpha_{l,1}\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}} \right) x_1$$

$$- \left(\alpha_{j,2} - \frac{\alpha_{l,2}\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}} \right) x_2 - \cdots$$

$$- \left(\alpha_{j,s-1} - \frac{\alpha_{l,s-1}\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}} \right) x_{s-1} + \frac{\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}} x_{k+l}$$

$$- \left(\alpha_{j,s+1} - \frac{\alpha_{l,s+1}\alpha_{j,s}}{\alpha_{l,s}} \right) x_{s+1} - \cdots$$

$$- \left(\alpha_{j,k} - \frac{\alpha_{l,k}\alpha_{j,s}}{x_{l,s}} \right) x_k \qquad (9)$$

ただし、 $j = 1,2,\cdots,l-1,l+2,\cdots,m$ である．また，式（４）の x_s へ式（８）を代入すると，

$$Z = c_0 + \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\beta_j + \frac{\beta_l}{\alpha_{l,s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s} \right)$$

$$+ \left\{ c_1 - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,1} - \frac{\alpha_{l,1}}{\alpha_{l,s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) \right\} x_1$$

$$+ \left\{ c_2 - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,2} - \frac{\alpha_{l,2}}{\alpha_{l,s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) \right\} x_2$$

$$+ \cdots + \left\{ c_{s-1} - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s-1} \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_{l,s-1}}{\alpha_{l,s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) \right\} x_{s-1}$$

$$+ \frac{1}{\alpha_{l,s}} \left(-c_s + \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) x_{k+l}$$

$$+ \left\{ c_{s+1} - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s+1} - \frac{\alpha_{l,s+1}}{\alpha_{l,s}} \right.$$

$$\left. \cdot \left(c_s - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) \right\} x_{s+1} + \cdots$$

$$+ \left\{ c_k - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,k} - \frac{\alpha_{l,k}}{\alpha_{l,s}} \right.$$

$$\left. \cdot \left(c_s - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) \right\} x_k \qquad (10)$$

となる．

ここで，自由未知数

$x_j = 0, (j = 1,2,\cdots,s-1,k+l,s+1,\cdots,k)$

とおくと，

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \frac{\beta_l}{\alpha_{l,s}} \geq 0 \\ x_{k+j} &= \beta_j - \frac{\alpha_{j,s}\beta_l}{\alpha_{l,s}} \geq 0 \end{aligned} \right\} \qquad (11)$$

$(j = 1,2,\cdots,m; j \neq l)$

となり，これらは許容解である．

Z の値としては，

$$Z = c_0 + \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\beta_j + \frac{\beta_l}{\alpha_{l,s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) \qquad (12)$$

が得られるが，式（５）の後に述べたように負の係数をもった未知数を x_s としているから，

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{l,s}} \left(c_s - \sum_{j=1}^{m} c_{k+j}\alpha_{j,s} \right) \leq 0 \qquad (13)$$

となる．ゆえに，式（１２）は $x_j = 0, (j = 1,2,\cdots,m)$ のとき求まった Z の値より大きくはならない．もし，式（１０）の $x_j, (j = 1,2,\cdots,s-1,k+l,s+1,\cdots,k)$ の係数がすべて零か正であれば，式（１１）が最適解となる．負のものがあれば同様の計算を繰り返し行なう．このように制約式が非退化であると，上述の計算課程を繰り返し行なうことにより循環することなく，有限回の計算後には最適解が得られる．

３．線形計画法の理論展開

q 個の非負の未知数 $X_1, X_2, \cdots, X_q$ の値を求めようとする場合，その未知数と測定値 $B_1, B_2, \cdots, B_p$ の間に次の関係が成立しているとする．

$$\left.\begin{array}{l} A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + \cdots + A_{1,q}X_q = B_1 \\ A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + \cdots + A_{2,q}X_q = B_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + \cdots + A_{p,q}X_q = B_p \end{array}\right\} \qquad (14)$$

ただし，$A_{i,j}, (i = 1,2,\cdots,p; j = 1,2,\cdots,q)$ は，定数（測定値であってもよい）とする．実際の測定においては測定値 $B_1, B_2, \cdots, B_p$ に誤差が含まれるので，非負の補正値 $R_1, R_2, \cdots, R_q$ を導入すると，式（１４）は次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l} A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + \cdots + A_{1,q}X_q - R_1 \le B_1 \\ A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + \cdots + A_{1,q}X_q + R_1 \ge B_1 \\ A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + \cdots + A_{2,q}X_q - R_2 \le B_2 \\ A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + \cdots + A_{2,q}X_q + R_2 \ge B_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + \cdots + A_{p,q}X_q - R_p \le B_p \\ A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + \cdots + A_{p,q}X_q + R_p \ge B_p \end{array}\right\} \qquad (15)$$

連立不等式（１５）は $p+q$ 次元空間の解の多面体を定めている．それらを満足する許容解の中で，$\sum_{i=1}^{p} R_i$ を最小にするような解を最適解としてデータ処理を行なうことができる．

連立不等式（１５）は，負でないスラックス変数 $S_1, S_2, \cdots, S_{2p}$ を導入することによって，次の連立方程式が得られる．

$$\left.\begin{array}{l} A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + \cdots + A_{1,q}X_q - R_1 + S_1 = B_1 \\ A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + \cdots + A_{1,q}X_q + R_1 - S_2 = B_1 \\ A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + \cdots + A_{2,q}X_q - R_2 + S_3 = B_2 \\ A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + \cdots + A_{2,q}X_q + R_2 - S_4 = B_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + \cdots + A_{p,q}X_q - R_p + S_{2p-1} = B_p \\ A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + \cdots + A_{p,q}X_q + R_p - S_{2p} = B_p \end{array}\right\} \qquad (16)$$

連立不等式（１５）の解と連立方程式（１６）の解は１対１の対応をなす．このようにして連立不等式は連立方程式を解くことに帰着できる．これらのデータ処理は制約条件式（１６）のもとに目的関数

$$Z = \sum_{i=1}^{p} R_i \qquad (17)$$

を最小とする $X_1, X_2, \cdots, X_p$ を求める問題となる．

スラック変数は不等式を等式に変えるための変数であるが，その係数が正のときには，最初の基底解を求めるのにも利用される．しかし，負のときには利用できない．そこで，スラック変数の係数が負のときには，新たな変数として，物理的に何ら意味をもたないで．ただ基底解を求めるための技巧変数を便法として導入する．もちろん，この技巧変数は最終的には消去されなければならない変数である．そのためには，極めて大きな値の係数をつけた技巧変数を目的関数に加えればよい．ここで，非負の技巧変数 $V_1, V_2, \cdots, V_p$ を導入して書き換えると，

$$\left.\begin{array}{l} A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + \cdots + A_{1,q}X_q - R_1 + S_1 = B_1 \\ A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + \cdots + A_{1,q}X_q + R_1 - S_2 + V_1 = B_1 \\ A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + \cdots + A_{2,q}X_q - R_2 + S_3 = B_2 \\ A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + \cdots + A_{2,q}X_q + R_2 - S_4 + V_2 = B_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + \cdots + A_{p,q}X_q - R_p + S_{2p-1} = B_p \\ A_{p,1}X_1 + A_{p,2}X_2 + \cdots + A_{p,q}X_q + R_p - S_{2p} + V_p = B_p \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0, \cdots, X_q \ge 0 \\ R_1 \ge 0, R_2 \ge 0, \cdots, R_p \ge 0 \\ S_1 \ge 0, S_2 \ge 0, \cdots, S_{2p} \ge 0 \\ V_1 \ge 0, V_2 \ge 0, \cdots, V_p \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (18)$$

を制約条件とし，目的関数

$$Z = \sum_{i=1}^{p} R_i + M \sum_{i=1}^{p} V_i \qquad (19)$$

を最小にするものを求めることになる．ただし，M は式（１９）の他の係数より，十分大きな正数とする．式（１８）を用いて目的関数の技巧変数を消去すれば，

$$Z = M \left\{ \sum_{i=1}^{p} B_i - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} A_{i,j} X_j \right\}$$

$$-(M-1) \sum_{i=1}^{p} R_i + M \sum_{i=1}^{p} S_{2i} \qquad (20)$$

を得る．かくして，スラック変数，技巧変数を導入することによって，測定値に誤差が含まれている場合のデータ処理に線形計画法が応用できることが示された．なお，式（１８），（２０）は基本的には，それぞれ式（１），（２）に対応するものである．

４．応　用　例

光の振動数を$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_q$とし，その振動数に対する光源のエネルギー強度を$S(\nu_1), S(\nu_2), \cdots, S(\nu_q)$，光電管の分光感度をそれぞれ$R(\nu_1), R(\nu_2), \cdots, R(\nu_q)$とする．また，各振動数に対する光電管の減速電圧特性を減速電圧$V=0$（V）で１に正規化したものを，$U_{\nu 1}(V), U_{\nu 2}(V), \cdots, U_{\nu q}(V)$で表わす．すると各振動数の光が同時に光電管へ入射したときの減速電圧特性$I(V)$は次式で表される．

$$I(V) = \sum_{i=1}^{q} U_{\nu i}(V) S(\nu_i) R(\nu_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} U_{\nu i}(V) P(\nu_i) \qquad (21)$$

ただし，$P(\nu_i) = S(\nu_i) R(\nu_i)$である．

いま，減速電圧$V_1, V_2, \cdots, V_p$のp個の電圧に対する光電流を測定すれば，式（２１）より式（２４）に対応する次のようなp元連立方程式が得られる．

$$\left.\begin{array}{l}
I(V_1) = U_{\nu 1}(V_1)P(\nu_1) + U_{\nu 2}(V_1)P(\nu_2) \\
+ \cdots + U_{\nu q}(V_1)P(\nu_q) \\
I(V_2) = U_{\nu 1}(V_2)P(\nu_1) + U_{\nu 2}(V_2)P(\nu_2) \\
+ \cdots + U_{\nu q}(V_2)P(\nu_q) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
I(V_p) = U_{\nu 1}(V_p)P(\nu_1) + U_{\nu 2}(V_p)P(\nu_2) \\
+ \cdots + U_{\nu q}(V_p)P(\nu_q)
\end{array}\right\} \qquad (22)$$

ゆえに，式（２２）の連立方程式を解くことにより，$P(\nu_1), P(\nu_2), \cdots, P(\nu_q)$の値が求まる．したがって，光電管の分光感度が明らかであれば，光源のエネルギー分布が決定でき，逆に光源のエネルギー分布が既知であれば，光電管の分光感度が求まる．また，各振動数に対する分光透過率$T(\nu_1), T(\nu_2), \cdots, T(\nu_q)$の光学フィルタを挿入したとき，

$$P_T(\nu_i) = S(\nu_i) R(\nu_i) T(\nu_i) \qquad (23)$$

とすれば，次式から分光透過率が求まる．

$$T(\nu_i) = \frac{P_T(\nu_i)}{P(\nu_i)} \qquad (24)$$

平面状の陰極・陽極を平行に配置したCs_3Sb光電管の減速電圧対光電流特性の式は次式で表される[3]．

$$I_p = KQ(\nu)\Bigg[\frac{1}{8}E_\nu^2\left\{-\sin^{-1}(1) + \sin^{-1}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{E_\nu + 2(E_g + \chi - h\nu + eV)}{E_\nu}\right)\right\}$$

$$-E_\nu\left(\frac{1}{2}E_\nu + E_g + \chi - h\nu + eV\right)\cos^{-1}$$

$$\cdot\left(\frac{E_\nu + E_g + \chi - h\nu + eV}{E_\nu}\right)^{1/2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}E_\nu + E_g + \chi - h\nu + eV\right)$$

$$\cdot\Big\{\left(h\nu - E_g - \chi - eV\right)\big(E_\nu + E_g + \chi - h\nu$$

$$+eV\big)\Big\}^{1/2}\Bigg] \qquad (25)$$

ただし，Kは定数，$Q(\nu)$は光電子放出に関する量子効率，E_νは価電子帯の上端順位，E_gは禁止帯幅，χは電子親和力，hはプランクの定数，νは光の振動数，eは電子の電荷，Vは減速電圧である．

いま，減速電圧が零（V）で光電流を１に規格化すれば，

$$U_\nu(V) = \frac{I_p}{I_{p0}} \qquad (26)$$

となる．ただし，I_{p0}は式（２５）において，$V=0$とおいた値で，

$$I_{p0}=KQ(\nu)\left[\frac{1}{8}E_\nu^2\left\{-\sin^{-1}(1)+\sin^{-1}\cdot\left(\frac{E_\nu+2(E_g+\chi-h\nu)}{E_\nu}\right)\right\}-E_\nu\left(\frac{1}{2}E_\nu+E_g+\chi-h\nu\right)\cos^{-1}\cdot\left(\frac{E_\nu+E_g+\chi-h\nu}{E_\nu}\right)^{1/2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}E_\nu+E_g+\chi-h\nu\right)\cdot\left\{\left(h\nu-E_g-\chi\right)\left(E_\nu+E_g+\chi-h\nu\right)\right\}^{1/2}\right] \tag{27}$$

となる．図１は理論曲線を図示したものである．上式の各電圧に対する光電流値を使用して干渉フィルタの分光透過率を求める．

光源の分光エネルギー分布を制限するために図２のようなA，B，C３枚の色ガラスフィルタを挿入する．図３はA，B，C３枚の色ガラスフィルタを組み合わせた場合の分光透過率である．なお，光源

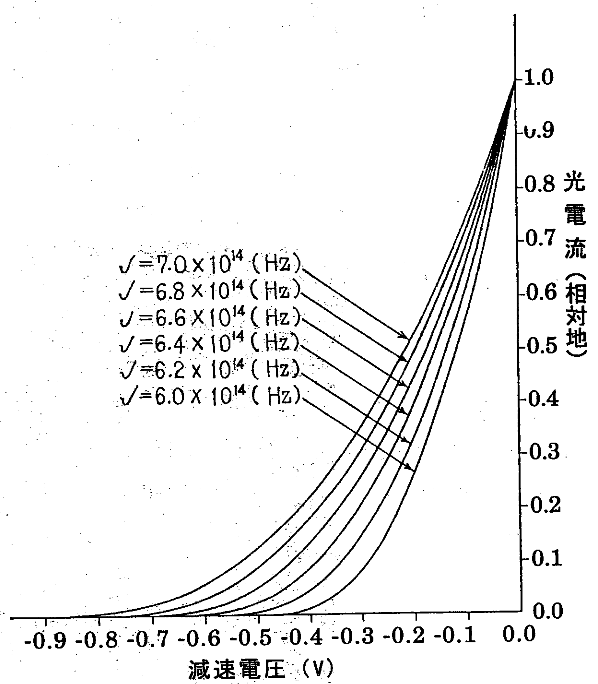

図１　減速電圧対光電流の理論曲線

Fig.1 Theoretical curves of photoelectric current against retarding potential

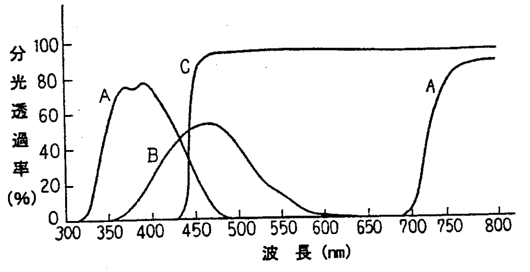

図２　色ガラスフィルタの分光透過率

Fig. 2 Spectral transmittance of optical filters

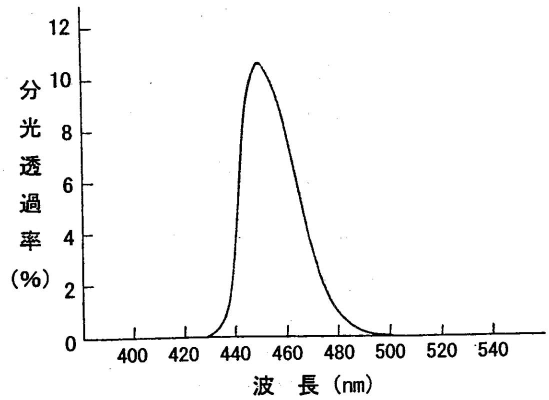

図３　組み合わせフィルタの分光透過率

Fig.3 Spectral transmittance of optical filters which are combined

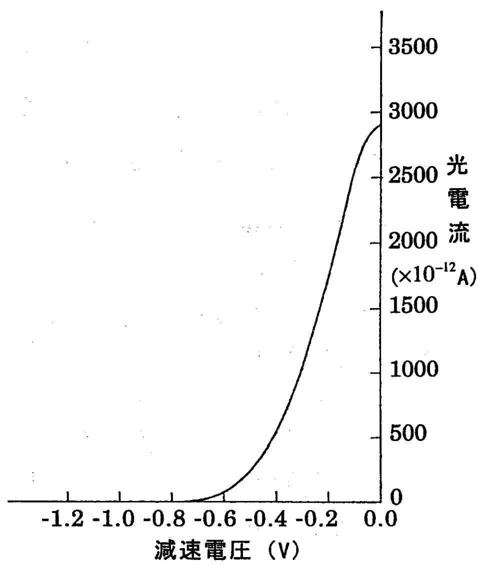

図４　干渉フィルタを挿入したときの減速電圧対光電流特性

Fig.4 Photoelectric current against retarding potential, when interference filter is inserted.

	未知数の係数					補正値の係数	スラック変数の係数	技巧変数の係数
2.5791×10^{-1}	3.3046×10^{-1}	3.9155×10^{-1}	4.4307×10^{-1}	4.8683×10^{-1}	5.2432×10^{-1}	$-1\ 0\ 0 \cdots 0$	$1\ 0\ 0\ 0 \cdots 0$	$0\ 0\ 0 \cdots 0\ 0$
2.5791×10^{-1}	3.3046×10^{-1}	3.9155×10^{-1}	4.4307×10^{-1}	4.8683×10^{-1}	5.2432×10^{-1}	$1\ 0\ 0 \cdots 0$	$0\ {-1}\ 0\ 0 \cdots 0$	$1\ 0\ 0 \cdots 0\ 0$
1.5762×10^{-1}	2.2769×10^{-1}	2.9010×10^{-1}	2.4467×10^{-1}	3.9218×10^{-1}	4.3362×10^{-1}	$0\ {-1}\ 0 \cdots 0$	$0\ 0\ 1\ 0 \cdots 0$	$0\ 0\ 0 \cdots 0\ 0$
1.5762×10^{-1}	2.2769×10^{-1}	2.9010×10^{-1}	2.4467×10^{-1}	3.9218×10^{-1}	4.3362×10^{-1}	$0\ 1\ 0 \cdots 0$	$0\ 0\ 0\ {-1} \cdots 0$	$0\ 1\ 0 \cdots 0\ 0$
8.5470×10^{-2}	1.4712×10^{-1}	2.0651×10^{-1}	2.6089×10^{-1}	3.0972×10^{-1}	3.5325×10^{-1}			
8.5470×10^{-2}	1.4712×10^{-1}	2.0651×10^{-1}	2.6089×10^{-1}	3.0972×10^{-1}	3.5325×10^{-1}			
3.8027×10^{-2}	8.6765×10^{-2}	1.3948×10^{-1}	1.9085×10^{-1}	2.3881×10^{-1}	2.8273×10^{-1}			
3.8027×10^{-2}	8.6765×10^{-2}	1.3948×10^{-1}	1.9085×10^{-1}	2.3881×10^{-1}	2.8273×10^{-1}			
1.1434×10^{-2}	4.4470×10^{-2}	8.7656×10^{-2}	1.3364×10^{-1}	1.7880×10^{-1}	2.2156×10^{-1}			
1.1434×10^{-2}	4.4470×10^{-2}	8.7656×10^{-2}	1.3364×10^{-1}	1.7880×10^{-1}	2.2156×10^{-1}			
1.0559×10^{-2}	1.7858×10^{-2}	4.9605×10^{-2}	8.8275×10^{-2}	1.2900×10^{-1}	1.6923×10^{-1}			
1.0559×10^{-2}	1.7858×10^{-2}	4.9605×10^{-2}	8.8275×10^{-2}	1.2900×10^{-1}	1.6923×10^{-1}			
0.0000×10^{0}	4.2044×10^{-3}	2.3755×10^{-2}	5.3755×10^{-2}	8.8701×10^{-2}	1.2522×10^{-1}			
0.0000×10^{0}	4.2044×10^{-3}	2.3755×10^{-2}	5.3755×10^{-2}	8.8701×10^{-2}	$1.2522\times10-1$			
0.0000×10^{0}	1.0125×10^{-4}	8.3534×10^{-3}	2.8984×10^{-2}	5.7151×10^{-2}	8.8984×10^{-2}			
0.0000×10^{0}	1.0125×10^{-4}	8.3534×10^{-3}	2.8984×10^{-2}	5.7151×10^{-2}	8.8984×10^{-2}			
0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	1.3518×10^{-3}	1.2768×10^{-2}	3.3565×10^{-2}	5.9962×10^{-2}			
0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	1.3518×10^{-3}	1.2768×10^{-2}	3.3565×10^{-2}	5.9962×10^{-2}			
0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	3.7541×10^{-3}	1.7087×10^{-2}	3.7563×10^{-2}			
0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	3.7541×10^{-3}	1.7087×10^{-2}	3.7563×10^{-2}			
0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	3.1548×10^{-4}	6.7750×10^{-3}	2.1154×10^{-2}			
0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	3.1548×10^{-4}	6.7750×10^{-3}	2.1154×10^{-2}			
0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	1.5436×10^{-3}	1.0047×10^{-2}	$0\ 0\ 0 \cdots 0$	$0\ {-1}\ 0\ 0 \cdots 0\ 0$	$1\ 0\ 0 \cdots 0\ 0\ 0$
0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	1.5436×10^{-3}	1.0047×10^{-2}	$0\ 0\ 0 \cdots 0$	$0\ 1\ 0\ 0 \cdots 0\ 0$	$0\ {-1}\ 0 \cdots 0\ 0\ 1$

$[A]=$ (28*)

$$
[X_1]=\begin{pmatrix} P_T(\nu_1)\\ P_T(\nu_2)\\ P_T(\nu_3)\\ \vdots\\ P_T(\nu_6)\\ R_1\\ R_2\\ R_3\\ \vdots\\ R_{12}\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ \vdots\\ S_{24}\\ V_1\\ V_2\\ V_3\\ \vdots\\ V_{12} \end{pmatrix},\quad
[X_2]=\begin{pmatrix} P(\nu_1)\\ P(\nu_2)\\ P(\nu_3)\\ \vdots\\ P(\nu_6)\\ R_1\\ R_2\\ R_3\\ \vdots\\ R_{12}\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ \vdots\\ S_{24}\\ V_1\\ V_2\\ V_3\\ \vdots\\ V_{12} \end{pmatrix},\quad
[B_1]=\begin{pmatrix} 1.71\times10^3\\ 1.71\times10^3\\ 1.34\times10^3\\ 1.34\times10^3\\ 1.02\times10^3\\ 1.02\times10^3\\ 7.54\times10^2\\ 7.54\times10^2\\ 5.35\times10^2\\ 5.35\times10^2\\ 3.60\times10^2\\ 3.60\times10^2\\ 2.26\times10^2\\ 2.26\times10^2\\ 1.28\times10^2\\ 1.28\times10^2\\ 6.20\times10^1\\ 6.20\times10^1\\ 2.33\times10^1\\ 2.33\times10^1\\ 5.7\times10^0\\ 5.7\times10^0\\ 1.1\times10^0\\ 1.1\times10^0 \end{pmatrix},\quad
[B_2]=\begin{pmatrix} 8.20\times10^3\\ 8.20\times10^3\\ 6.37\times10^3\\ 6.37\times10^3\\ 4.83\times10^3\\ 4.83\times10^3\\ 3.54\times10^3\\ 3.54\times10^3\\ 2.49\times10^3\\ 2.49\times10^3\\ 1.66\times10^3\\ 1.66\times10^3\\ 1.04\times10^3\\ 1.04\times10^3\\ 5.87\times10^2\\ 5.87\times10^2\\ 2.91\times10^2\\ 2.91\times10^2\\ 1.20\times10^2\\ 1.20\times10^2\\ 3.64\times10^1\\ 3.64\times10^1\\ 7.7\times10^0\\ 7.7\times10^0 \end{pmatrix},
\qquad (28^{**})
$$

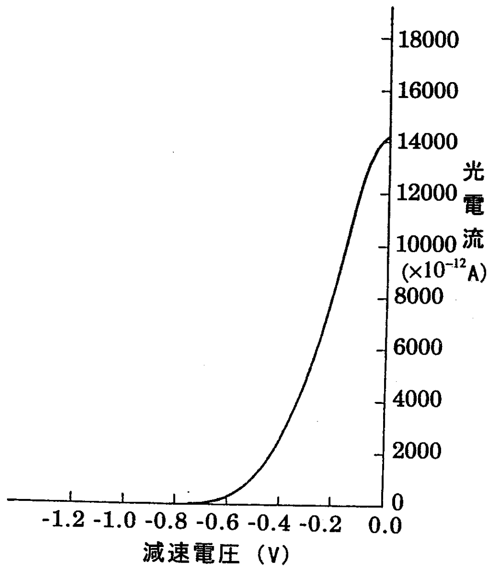

図５干渉フィルタを挿入しないときの減速電圧対光電流特性

Fig.5 Photoelectric current against retarding potential without interference filter

には白熱ランプを使用し，光電管は平面状の陰極・陽極を平行に配置した構造のCs_3Sb光電管を使用する．白熱ランプを点灯し，A，B，C３枚の色ガラスフィルタを透過した光を光電管に入射させながら，陰極に対して陽極に減速電圧を印加して，減速電圧対光電流特性を測定する．図４は被測定の干渉フィルタを挿入したときの減速電圧対光電流特性曲線であり，図５は干渉フィルタを挿入しないときの特性曲線である．

理論的には減速電圧$V=0$（V）で減速電圧特性曲線は飽和するはずであるが，実測するとそれ以前から飽和し始めるので，$V=-0.2$（V）から0.05（V）間隔に$V=-0.75$（V）まで電圧を選定した．なお，光の振動数νは，$\nu=6.0\times10^{14}$（Hz）から$\nu=7.0\times10^{14}$（Hz）までを，$\nu=2.0\times10^{13}$（Hz）間隔に選んだ．このようにして作ったデータをマトリックス表示すれば，次式のようになる．

$$[A]\cdot[X_i]=[B_i] \qquad (28)$$

ただし，$[A],[X_i],[B_i]$は式（２８*）および式（２８**）で示すものであり，$i=1,2$である．この場合$[B_1],[B_2]$はそれぞれ被測定の干渉フィルタを挿入したとき，および挿入しないときの実測値である．

また，目的関数は

$$
\begin{aligned}
Z_1 = &-551516.90P_T(\nu_1)-858668.65P_T(\nu_2)\\
&-1198361.20P_T(\nu_3)-1560971.58P_T(\nu_4)\\
&-1940162.60P_T(\nu_5)-2327640.00P_T(\nu_6)\\
&-999999\sum_{i=1}^{12}R_i+1000000\sum_{i=1}^{12}S_{2i}
\end{aligned}
\qquad (29)
$$

$$
\begin{aligned}
Z_2 = &-551516.90P(\nu_1)-858668.65P(\nu_2)\\
&-1198361.20P(\nu_3)-1560971.58P(\nu_4)\\
&-1940162.60P(\nu_5)-2327640.00P(\nu_6)\\
&-999999\sum_{i=1}^{12}R_i+1000000\sum_{i=1}^{12}S_{2i}
\end{aligned}
\qquad (30)
$$

である．

制約条件式（２８）を満足する非負解のなかで目的関数式（２９），あるいは式（３０）を最小にするものを求めると表１のようになる．この結果を従来の方法で求めた曲線上に×印で表すと図６のようになる．なお，式（２８）は式（１８）に，式（２９），（３０）は式（２０）にそれぞれ対応している．目的関数の定数は解に関係しないので，式（２９），（３０）では，それを省略している．なお，式（２０）のMはここでは$M=1000000$とした．

表１　計算結果
Table 1 Result of calculation.

光の振動数 ($\times 10^{14}$Hz)	$P_T(\nu_i)$	$P(\nu_i)$	分光透過率 (%)
6.0	0.00×10^{0}	0.00×10^{0}	
6.2	2.05×10^{1}	5.69×10^{2}	3.60
6.4	6.51×10^{1}	3.59×10^{3}	1.81
6.6	3.01×10^{3}	9.50×10^{3}	31.7
6.8	7.01×10^{2}	4.87×10^{3}	14.4
7.0	0.00×10^{0}	1.11×10^{1}	0.00

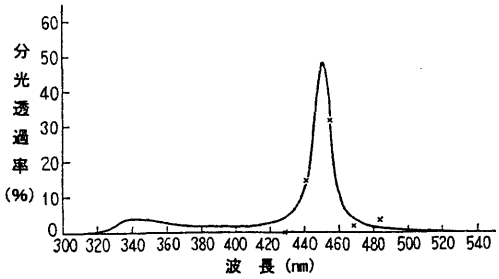

図６　干渉フィルタの分光透過率
Fig 6 Spectral transmittance of interference filter optical filter.

５．考　察

光の振動数$\nu = 6.0\times10^{14}$（Hz）に対しては，干渉フィルタを挿入しない$P(\nu_i)$の値は零となっている．これは図３のような組み合わせフィルタをあらかじめ挿入しているので，その振動数の光がほとんど透過しないためである．光源の分光エネルギー分布が連続あるので，式（２２）は近似式である．しかし，上述のような方法でデータ処理をすれば，従来の方法によって測定した値と大体一致した解が得られた．主として，曲線の両端において，くい違いが大きいが，その付近では組み合わせフィルタの分光透過率が小さく，そのために誤差が拡大されたものと思われる．

分光エネルギー分布が連続である光源で光電管を照射したときは，理論的には積分方程式になる．しかし，積分方程式は特殊の場合を除いて，一般には解析的に解くことは困難である．解析的に解き得ない積分方程式は数値解法によって解かれる．積分方程式の数値解法は，積分方程式を近似的に連立方程式で表わし，それを解くことになる．しかし，実測値を使用する場合には誤差が含まれるので，よい結果を得ることはなかなか困難である．

一般に，実測値のデータ処理は最小自乗法[4-6]によってなされる．最小自乗法は正規分布をした偶然誤差が含まれているデータに対しては有効である．しかし，系統誤差とか過失誤差の含まれているものに対しては適用できない．物理現象の測定の場合には，現象が不安定になり実測値として好ましいデータが得られないときがある．そのようなデータに対して最小自乗法によってデータ処理を行っても，よい結果が得られず物理的条件に反する見当違いの結果が得られることがしばしばある．それに対して線形計画法では，解く際に種々な条件を付加することが可能であり，目的関数も任意に設定できる．一般には，線形計画法の解は負でないという条件で解いているが，負であっても差し支えない条件をつけることもでき，また任意な物理的条件を付加することができる．それゆえ，理論的に近似であるもの，系統誤差，過失誤差などの含まれているデータに対しても線形計画法は適用できる．

減速電圧対光電流特性として理論的に誘導した式を用いたが，それにこだわる必要はなく，実測値とよく合う関数形であれば何でもよい．必要なことは実測値とよく一致する関数形を使用することである．もちろん，関数形のかわりに実測値を使用してもよい．実測値としては有効数字が多く高精度なものが得られるようにして，誤差を極力減少させることが望ましい．

６．結　言

従来一般に，実測値のデータ処理は最小自乗法によって行われていた．しかし，実測値としては含まれる誤差の小さいもの，測定回数を多くすることが困難な場合もある．そのような場合のデータ処理として線形計画法が有用であるとし，各値が正，残差の絶対値の総和が最小という目的関数のもとに，光電管の減速電圧特性曲線を利用して，干渉フィルタの分光透過率を求めた．線形計画法によって求めた解が従来の方法で得た値とかなりよく一致した．線形計画用では，制約式として種々な物理的条件を付加することが可能であり，また目的関数も場合に応じて適当に変えられるので，種々のデータ処理に利用できる．

参考文献

[1] George B. Dantzig: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, (1963).
[2] 今野　浩：線形計画法，日科技連出版社，(1987).
[3] 山口昌一郎，小林富士男：減速電圧特性による

Cs_3Sb 光電陰極の物性定数の算定法，電気学会雑誌，Vol.90, No.3, pp.143-151, (1970).

[4] R. S. Anderssen, M. R. Osborne (Editors): Least Squares Methods in Data Analysis, University of Queensland Press, (1969).

[5] 中川徹，小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，(1999).

[6] 田島稔，小牧和雄，最小二乗法の理論とその応用，東洋書店，(1998).