

有限状態機械の状態観測器

渡辺浩司*1 猪飼武夫*2 福永邦雄*2

State Observers for Finite State Machines

Koji WATANABE*1 Takeo IKAI*2 Kunio FUKUNAGA*2

ABSTRACT

A state identification method for a finite state machine (FSM) using an adaptive homing sequence is well-known in the automata theory. The method is off-line one, and therefore can not be applied to a FSM in operation. On the other hand, in the linear system theory, there exists an on-line state estimator called a state observer (SO) which performs state estimation of a linear system. In this paper, we construct such an SO for a Moore machine, and characterize an input sequence to a target machine by which the SO converges and discuss a class of the input sequences. Moreover we represent the FSM and its SO by state space models as well as state transition functions. The state space model representation enables us to have a good insight into the subject and bring linear algebraic approaches into the automata theory.

キーワード: 有限状態機械, 状態空間モデル, 状態観測器

Keywords: finite state machine, state space model, state observer

1. まえがき

オートマトン論では, 有限状態機械 (FSM) の入出力応答を用いた状態同定の実験は, E.F. Moore [1] による思考実験 (gedanken-experiments) として知られている. この実験は, 用いる入力系列が固定である固定実験と, 実験中に観測される対象機械の出力に応じて次に加える入力記号を逐次選択する適応実験に分類される [2]. ホーミング系列 (HS) および適応ホーミング系列 (AHS) と呼ばれる入力系列がそれぞれの実験に用いられる.

一方, 線形システム論 [3] では, 内部状態が不明な線形システムへの入力とその出力を観測することによってそのシステムの内部状態を推定する状態観測器 (SO) [4] と呼ばれるオンラインの状態推定器が存在する. HS や AHS による FSM の状態推定はオフラインであり, オートマトン論においては SO のようなオンラインの状態推定に関する研究はほとんど行われていない.

そこで, 論文 [6] において, 適応実験の状態同定の過程

に基づいて, FSM の一種であるムーア機械に対する SO の構成を行った.

さて, 順序機械の幾つかの部分クラスに対しては実数上の線形システムの表現法と同様な, 状態空間モデルと呼ばれる行列方程式による表現法が導入されており, オートマトン論と制御論の関連が研究されている [8, 9]. しかし, 任意の順序機械に対する状態空間モデルは存在していない.

本論文ではムーア機械を状態空間モデルで表現し, その SO の導出をこの状態空間モデルに基づいて行う. その結果, SO の導出および収束系列の特徴付けを線形代数的に行うことができ, 従来の状態推移関数等による表現と比べ, 見通しの良い議論が可能となる.

2. 有限状態機械の状態空間モデル

線形順序機械と呼ばれる有限状態機械 (FSM) の部分クラスのシステムは有限体 $GF(q)$ (q は素数のべき) 上

*1 情報処理工学科

*2 大阪府立大学大学院

次のような状態方程式および出力方程式の組

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

で表現される [9]. ここで A, B, C, D および $x(t), u(t), y(t)$ は適当なサイズの $GF(q)$ 上の行列およびベクトルである.

実数 (R) 上では式 (1) は線形システムの表現となり, これは線形システム論 [3] では状態空間モデルと呼ばれる. Arbib [8] は, 線形順序機械を更にアーベル群上のシステムに拡張して, additive automaton と呼ばれる FSM の部分クラスを提案している. この additive automaton もまた $A \sim D$ をオペレータとして式 (1) のように表現される.

そして式 (1) の状態空間モデル表現に基づき, 線形順序機械および additive automaton に対し, R 上の線形システムと同様な線形代数的なアプローチが行なわれ, 可制御性, 可観測性, 最小化などの概念が導入されている [8, 9].

以上のように FSM の線形または additive な部分クラスのシステムの状態空間モデル表現が存在しているが, 任意の有限状態機械の状態空間モデル表現は知られていない.

本論文では FSM の一種である, ムーア機械を取り扱う. そこで以下では, このムーア機械の状態空間モデルの構成法について述べる.

ムーア機械の状態空間モデルはブール半環 $B = (B, +, \cdot)$ (ここで $B = \{0, 1\}$) と呼ばれる代数系上で定義される. B 上の演算は $1+1=1$ を除いて整数の演算と同じである.

ムーア機械は形式的には次のように定義される.

$$M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, p_0) \dots\dots\dots (2)$$

ここで Q は状態の集合, Σ は入力記号の集合, Δ は出力記号の集合であり, さらに δ と λ はそれぞれ次のような状態推移関数と出力関数である.

$$\delta(q, a_k) = q' \dots\dots\dots (3)$$

$$\lambda(q) = \alpha \dots\dots\dots (4)$$

ここで, $q, q' \in Q, a_k \in \Sigma$ および $\alpha \in \Delta$ である. また, $p_0 (\in Q)$ は初期状態である. n, m と s をそれぞれ状態数と入力記号および出力記号の数とする. 以下ムーア機械 M は完全定義であるとする.

M の B 上での状態空間モデルは以下のように構成できる.

状態 $q_i (\in Q)$ (ここで $i = 1, \dots, n$) は第 i 成分が 1 であり, その他が 0 の n 次の単位ベクトル e_i^n により表される. よって Q は状態空間 $X = \{e_i^n \mid i = 1, \dots, n\}$ として表現される.

入力記号 a_k (ここで $k = 1, \dots, m$) に対する状態推移関数 (3) において, q' および q がそれぞれ e_i^n と e_j^n で表されるとき, B 上の n 次正方行列 A_{a_k} の第 j 列を e_i^n とする. A_{a_k} を状態推移行列と呼び, A_k と略す.

次に, 出力関数 λ を出力行列 C としてパラメータ化する. 出力記号 α_l (ここで $l = 1, \dots, s$) を e_l^s で表わす. 出力関数 (4) において状態 q と出力 α がそれぞれ e_j^n と e_l^s のとき, $s \times n$ 行列 C の第 j 列を e_l^s とする.

M を離散時間の動的システムとみなし, M への入力系列は離散時間の系列として時刻 $t = 0$ から順に加えられる. $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T$ および $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t))^T$ をそれぞれ状態空間モデルの B 上での入力および出力ベクトルとする. 時刻 t での M の入力および出力記号は $u(t)$ および $y(t)$ により次のように表される.

入力記号 a_k を e_k^m で表わす. 時刻 t で記号 a_k が M に加えられた時, $u(t) = e_k^m$, すなわち $u(t)$ において $u_k(t) = 1$ かつ $u_{k'}(t) = 0$ (ここで $k' \neq k$) となる. 同様に $y(t) = e_l^s$ は時刻 t で M から α_l が出力されたことを表す.

以上より, ムーア機械は次のような B 上の状態空間モデルで表現できる.

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{k=1}^m u_k(t) A_k x(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

ここで状態ベクトル $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T (\in X)$ は M の時刻 t での状態を表す. 初期状態は $x(0) = x_0$ とし, x_0 は p_0 のベクトル表現である. モデル (5) の状態方程式は式 (3) の, 出力方程式は式 (4) の行列方程式表現である. ムーア機械の記号表現 (2) に対応するパラメータ表現を $(\{A_1, A_2, \dots, A_m\}, C, x_0)$ (これ以降 $(\{A_k\}, C, x_0)$ と略す) とする. なお A_k, C と x_0 をムーア機械のシステム行列またはシステムパラメータと呼ぶ.

このように B 上の状態空間モデルとして表現される一般的な有限状態機械に対しても可到達性, 可観測性, 最小実現などの幾つかの概念が定義できることがすでに示されている [7].

最後にモデル (5) の解を考える. 入力系列

$$w = a_{k_{t-1}} a_{k_{t-2}} \dots a_{k_1} a_{k_0} (\in \Sigma^*) \dots\dots\dots (6)$$

に対応する状態推移行列 $A(w)$ を次のように表す.

$$A(w) = A_{k_{t-1}} A_{k_{t-2}} \dots A_{k_1} A_{k_0} \dots\dots\dots (7)$$

ここで $a_{k_t} (\in \Sigma)$ は時刻 t の入力記号であり, $A_{k_t} (\in \{A_1, \dots, A_m\})$ は a_{k_t} に対する状態推移行列である.

記号列は通常, $a_{k_0} a_{k_1} \dots a_{k_{t-2}} a_{k_{t-1}}$ のように左側から並べられるが, $A(w)$ の行列積に対応づけるため, 逆の表記 (6) を用いている. 式 (6) の入力系列 w に対するモデ

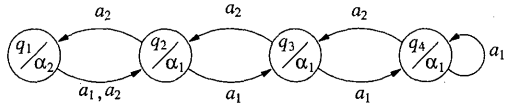


図1 ムーア機械 M_1

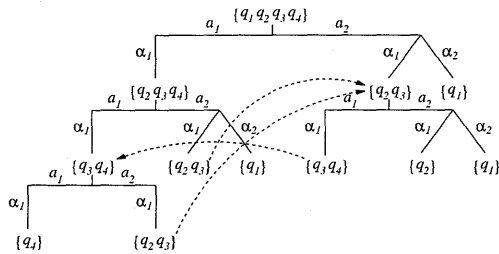


図2 リンク付き適応ホーミング木

ル (5) の解は, $x(t) = A(w)x_0$, $y(t) = CA(w)x_0$ となる. ここで $t \geq 1$ であり, $y(0) = Cx_0$ である.

3. 状態観測器の状態空間モデル

3.1 適応ホーミング系列

オートマトン論において, 初期状態が不明な FSM M に対して特定の入力系列を加え, その出力応答を観測することで M の状態を一意に決定する状態同定実験が良く知られている [1, 2].

この実験には加えられる入力系列が固定されているものと, 途中で観測される出力に応じて次に加えられる入力記号が逐次決定されるものがあり, 前者は固定実験, 後者は適応実験と呼ばれる. 通常, 固定実験ではホーミング系列 (HS), 適応実験では適応ホーミング系列 (AHS) と呼ばれる入力系列が用いられ, 実験の終了時に対象機械の状態が同定される.

3.2 節で導出する状態観測器 (SO) は適応実験に関連するのでここでは適応実験に用いられる AHS について簡単に述べる.

適応実験に用いる入力系列は以下に述べるような木 [2] を用いて構成する. ここでは図 1 のムーア機械 M_1 を例として用いる. M_1 に対する木は図 2 から点線で表されるリンクを除いたものである. この木の根には M_1 の初期状態の候補の集合となる M_1 の状態集合 $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ を置く. Q の部分集合が置かれている場所をノードと呼び, 各ノードをその部分集合と同一視する. 各ノードからの水平方向のパスは入力記号 $a_k (\in \Sigma)$ で, ななめもしくは垂直方向のパスは出力記号 $\alpha_l (\in \Delta)$ でラベル付けする. あるノード中の状態の a_k による状態推移の後, α_l を観測することによって決定さ

れる状態集合をその次のノードに置く. Q の単一の要素もしくはすでに他に現れている Q の部分集合と同じ部分集合からなるノードが葉となる. ここでは Q の単一要素からなる葉を終端葉と呼び, そうでなければ非終端葉と呼ぶ.

上述のように構成される木において各非終端葉と, 葉でない, それと同じ状態の集合を持つノードをリンクしたものをリンク付き適応ホーミング木 (AHTL) [6] と呼ぶ. なおリンクは点線で表す.

AHTL は適応実験の過程をその根から加えた入力と観測される出力に従ってパスをたどる動作として表現している. 到達したノードがその時点での M_1 の状態の候補の集合である. 終端葉に到達した時点で実験は終了する.

実験の終了には 2 つのケースがある. 例えば図 2 において, ノード $\{q_2, q_3\}$ で a_2 が入力されると, 出力に関わらず状態は一意に決定され, 実験終了となる. これに対し, 根で a_2 が入力された時, 出力が α_2 ならば実験終了となるが, α_1 ならば実験は継続される. ここでは前者を特に実験の完全終了と呼ぶ. 文献 [2, p.112] に記述されている minimum-length adaptive homing experiment に従えば, AHS は次のように定義できる.

定義 3.1 有限状態機械 M の適応実験に用いられる入力系列のうち, 実験の各時点で加えられる入力記号が, その時点から実験の完全終了までに必要な入力系列が最短となるように選択されるものを M の適応ホーミング系列 (AHS) と呼ぶ. ■

AHS に対して次の定理が良く知られている.

定理 3.1 [2] 完全定義で既約な有限状態機械には AHS が存在する. ■

次にムーア機械 M の AHTL に対して次の記号集合を定義する. $N(M)$ をその全てのノードの集合とする. ただし同じ Q の部分集合を持つ, すなわちリンクされているノードは $N(M)$ では同じ記号とする. $T(M)$ を終端葉の集合とすると, $T(M) = \{r \in N(M) \mid |r| = 1\}$ である. ここで $|r|$ は r に含まれる Q の要素数を示す.

AHTL の入力 a_k と出力 α_l がラベル付けされたあるノード r から次のノード r' ($r, r' \in N(M)$) へのパスを次のように表す.

$$r' = (a_k, \alpha_l)r \dots \dots \dots (8)$$

(a_k, α_l) をラベルと呼び,

$$L(M) = \{(a_k, \alpha_l) \mid a_k \in \Sigma, \alpha_l \in \Delta\} \dots \dots \dots (9)$$

をラベルの集合とする. さらに $r'' = (a_{k'}, \alpha_{l'})r'$ ($r'' \in N(M)$) のとき, $r'' = (a_{k'}, \alpha_{l'})(a_k, \alpha_l)r$ を式 (8) より得る. $(a_{k'}, \alpha_{l'})(a_k, \alpha_l) (\in L^*(M))$ をラベル系列と呼ぶ. $L^*(M)$ は $L(M)$ 上の全てのラベル系列の集合である.

3.2 状態観測器

FSM の状態観測器 (SO) を次のように定義する。

定義 3.2 [6] 任意の入力で動作している, 完全定義かつ既約で, 内部状態が不明な有限状態機械 (FSM) M への入力 $a_k (\in \Sigma)$ とそれに対する出力 $\alpha_l (\in \Delta)$ の組 (a_k, α_l) をその入力とし, M の推定状態集合 (状態の候補となり得る Q の部分集合) を出力する FSM を M の状態観測器 (SO) と呼び, M^S と表記する。 ■

さて, 適応実験に用いられる AHTL は状態推定の過程を表現しており, 式 (8) で表されるその推定過程は 2 つのステップに分けることができる。

Step 1: r に含まれる状態の a_k による推移後の状態集合を η とする。 η は状態推移関数 (3) を状態集合 $r (\subseteq Q)$ に対して拡張することで以下のように与えられる。

$$\delta(r, a_k) = \{q' \mid \delta(q, a_k) = q', q \in r\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\eta = \delta(r, a_k) \dots\dots\dots (11)$$

Step 2: η に含まれる状態のうち, α_l を出力するような状態を選択し r' を求める。

$$r' = \{q \mid \lambda(q) = \alpha_l, q \in \eta\} \dots\dots\dots (12)$$

AHTL を用いる適応実験による状態同定ではこの **Step 1** および **2** を繰返し行なっている。この過程を状態推定対象機械 M から観測される入力記号と出力記号の組, すなわちラベル $(a_k, \alpha_l) (\in L(M))$ による状態推定過程と捉えることで $SO M^S$ が構成できる。つまり, M^S は AHTL の各ノードを状態とし, 状態 r においてラベル (a_k, α_l) を入力として式 (11) および (12) を実行し推定状態集合 r' を出力するという (8) に対応した動作を繰り返すことにより AHTL のパスをたどり, 終端葉に到達した時点で状態同定が完了する FSM である。式 (10) ~ (12) より SO は次のように定式化できる。

$$M^S = (N(M), L(M), N(M), \delta^S, \lambda^S, r^0) \dots\dots (13)$$

ただし, 状態集合および出力記号集合は $N(M)$, (a_k, α_l) を 1 個の入力記号とみなし入力記号集合は $L(M)$, $r^0 (\in N(M))$ は初期状態推定であり $r^0 = Q$ とする。

さらに状態推移関数および出力関数は次のような関数 $\delta^S : N(M) \times L(M) \Rightarrow N(M)$, $\lambda^S : N(M) \Rightarrow N(M)$ であり, $r, r' (\in N(M))$ および $(a_k, \alpha_l) \in L(M)$ に対して

$$r' = \delta^S(r, (a_k, \alpha_l)) \dots\dots\dots (14)$$

$$= \{q \mid \lambda(q) = \alpha_l, q \in \delta(r, a_k)\} \dots\dots\dots (15)$$

$$r = \lambda^S(r) \dots\dots\dots (16)$$

である。

δ^S を次のように $N(M) \times L^*(M) \Rightarrow N(M)$ の写像に拡張する。長さ d のラベル系列 $\gamma = (a_{k_d}, \alpha_{l_d})(a_{k_{d-1}}, \alpha_{l_{d-1}}) \dots (a_{k_1}, \alpha_{l_1})$ に対して $r' = \gamma r$ のとき, $\delta^S(r, \gamma) = r'$ と表す。また, $\gamma^I = a_{k_d} a_{k_{d-1}} \dots a_{k_1}$ とする。

定義 3.3 [6] ムーア機械 M の SO M^S への入力系列 $\gamma (\in L^*(M))$ に対して

$$r' = \delta^S(r^0, \gamma) \dots\dots\dots (17)$$

より得られる状態 r' が $r' \in T(M)$ を満たすとき, γ^I を M^S の収束系列と呼ぶ。 ■

定義より, AHS が M^S の収束系列であることは明らかである。

Gatto ら [5] は, FSM のレギュレータ問題の一部として, 状態のオンライン推定問題を扱っており, basic reconstructor というミーリー機械に対する状態推定器を構成している。basic reconstructor は式 (14) と類似な状態推移関数で定義されている。

オンラインの状態推定で重要な問題は収束系列の考察である。開ループ系の state reconstruction 問題に関する Gatto らの唯一の定理は basic reconstructor に対する収束系列の存在を示すにとどまっており, 具体的に HS および AHS がその収束系列であることや, basic reconstructor と適応実験, すなわち AHTL との関連性については議論されていない。

しかしながら, 収束系列の存在は AHS の存在より自明である。より重要な問題は HS や AHS を含む収束系列の広いクラスの特徴づけである。4 章ではこのような SO の収束問題の議論を行なう。

3.3 状態観測器の状態空間モデル表現

2 章で述べたように, FSM は離散時間システムとして状態空間モデルで表現される。そのため M^S の状態空間モデルを構成するためには M^S の動作に時間を導入する必要がある。 M^S の状態推移関数 (14) は AHTL のパスをたどる動作 (8) を表していることから, 適応実験すなわち AHTL に対して次のように動作時間を導入する。

根 r^0 は実験開始時刻 $t=0$ でのノードとして $r^0 = r(0)$ で表す。式 (8) で記述されるパスをたどる動作は 1 時刻で行なわれるとする。式 (8) の r を時刻 $t-1$ でのノード, r' を時刻 t でのノードとし, それぞれ $r(t-1)$ および $r(t)$ で表現する。ラベル (a_k, α_l) は式 (15) より $r(t-1)$ に含まれる状態に対する入力および $r(t)$ に含まれる状態の出力の組であり, 結局 a_k は時刻 $t-1$ での M への入力, α_l は時刻 t での M の出力を示している。従ってこれらの入出力記号を改めてそれぞれ $a_{k_{t-1}}$ および α_{l_t} で表すと式 (8) は次のように書くことができる。

$$r(t) = (a_{k_{t-1}}, \alpha_{l_t}) r(t-1) \dots\dots\dots (18)$$

さらに $r(0)$ から $r(t)$ へのパスを

$$r(t) = \gamma_t r(0) \dots \dots \dots (19)$$

と表すと、この γ_t は長さ t のラベル系列であり、

$$\gamma_t = (a_{k_{t-1}}, \alpha_{l_t})(a_{k_{t-2}}, \alpha_{l_{t-1}}) \dots (a_{k_0}, \alpha_{l_1}) \dots (20)$$

と書ける。

次に、SO M^S の状態空間モデルを構成する。

状態推定の対象を完全定義でかつ既約な n 状態のムーア機械 $M = (\{A_k\}, C, x_0)$ とし、時刻 t での M への入力記号 a_{k_t} および M の出力記号 α_{l_t} をそれぞれ $u(t), y(t)$ という入力および出力ベクトルで表わす。 M の初期状態 x_0 は観測開始時刻 $t = 0$ での状態を示す。

M^S の状態推定ベクトルを

$$\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \dots, \hat{x}_n(t))^T \dots \dots \dots (21)$$

とする。これは適応実験の時刻 t でのノード $r(t) (\in N(M))$ を次のように表現する。

$$\hat{x}_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } q_i \in r(t) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \dots \dots \dots (22)$$

初期推定ベクトルは $\hat{x}(0) = \mathbf{1}$ とする。ここで、 $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ であり、これは適応実験の根 $r(0) = Q$ のベクトル表現である。

M^S の状態空間モデルは式 (18) を行列方程式の組として表すことで構成できる。さらにこれらの行列方程式は 3.2 節で述べた Step 1 および 2 を AHTL の動作時間に基づいて行列方程式で表現することで得られる。式 (18) の label $(a_{k_{t-1}}, \alpha_{l_t})$ のベクトル表現を $(u(t-1), y(t))$ とする。

Step 1: 式 (11) の $r (= r(t-1))$ および η のベクトル表現をそれぞれ $\hat{x}(t-1)$ および $\eta(t)$ とすると、式 (11) は次のような行列方程式で表すことができる。

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^m u_k(t-1) A_k \hat{x}(t-1) \dots \dots \dots (23)$$

Step 2: まず、式 (11) の操作を表す行列を導入する。対象ムーア機械 M の出力ベクトル e_i^s ($l = 1, \dots, s$) に対して次のように構成される B 上の $n \times n$ 行列 B_l を状態推定行列と呼ぶ。

$$B_l = [b_{l1} \ b_{l2} \ \dots \ b_{ln}] \ (l = 1, \dots, s) \dots \dots \dots (24)$$

$$b_{li} = \begin{cases} e_i^n & \text{if } C e_i^s = e_i^s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \dots \dots \dots (25)$$

B_l (ここで $l = 1, \dots, s$) は次の性質を持つ。

$$B_l e_i^n = \begin{cases} e_i^n & \text{if } C e_i^s = e_i^s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \dots \dots \dots (26)$$

式 (12) の $r' (= r(t))$ のベクトル表現を $\hat{x}(t)$ とすると式 (12) は

$$\hat{x}(t) = \sum_{l=1}^s y_l(t) B_l \eta(t) \dots \dots \dots (27)$$

と表すことができる。

状態推定行列 B_l は次のようにして得られる。

$$B_l = \text{diag}\{e_i^{sT} C\} \ (l = 1, \dots, s) \dots \dots \dots (28)$$

なお、 $\text{diag}(\cdot)$ は、対角要素が v_1, \dots, v_n である $n \times n$ 対角行列を表わす。

式 (28) の証明

C の各行を $c_l = (c_{l1}, \dots, c_{ln})$ とすると、次の式が成立する。

$$\text{diag}\{e_i^{sT} C\} = \text{diag}\{c_l\} \ (l = 1, \dots, s) \dots \dots (29)$$

d_i を $\text{diag}\{c_l\}$ の第 i 列とすると、

$$d_i = \begin{cases} e_i^n & \text{if } c_{li} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \ (i = 1, \dots, n) \dots \dots (30)$$

となり、 $d_i = b_{li}$ が成り立つ。故に、式 (28) で表される行列は状態推定行列である。

式 (23) と (27) から $\eta(t)$ を消去することによって M^S (13) は次のように定式化できる。

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^m u_k(t-1) y_l(t) B_l A_k \hat{x}(t-1) \\ z(t) = \hat{x}(t) \end{cases} \dots \dots (31)$$

ここで $t \geq 1, B_l = \text{diag}\{e_i^{sT} C\}, \hat{x}(0) = \mathbf{1}$ とする。

M^S の状態推移関数 (14) はモデル (31) の状態方程式で、出力関数 (16) は、出力方程式としてそれぞれ表現されている。また、このモデルにおいて M の状態推定行列 B_l と状態推移行列 A_k の積 $B_l A_k$ がラベル (a_k, α_l) と対応している。

従って、式 (19) は、式 (20) の γ_t に対するモデル (31) の解として次のように表現できる。

$$\hat{x}(t) = A(\gamma_t) \hat{x}(0) \dots \dots \dots (32)$$

$$A(\gamma_t) = B_{l_t} A_{k_{t-1}} \dots B_{l_1} A_{k_0} \dots \dots \dots (33)$$

4. 状態観測器の収束性

4.1 一般化適応ホーミング系列

ムーア機械 M の AHTL の根 r^0 から終端葉 $r (\in T(M))$ へのラベル系列をホーミングラベル系列と呼ぶ。全てのホーミングラベル系列の集合を次のように $H(M)$ で示す。

$$H(M) = \{\gamma \in L^*(M) \mid r = \gamma r^0, r \in T(M)\} \cdot (34)$$

AHS を一般化した, 一般化適応ホーミング系列 (一般化 AHS) の集合を次のように定義する [6].

$$H^I(M) = \{\gamma^I \mid \gamma \in H(M)\} \dots\dots\dots (35)$$

なお, 一般化 AHS の集合 $H^I(M)$ は M の HS および AHS を含む.

4.2 状態観測器オートマトンの状態空間モデル

ホーミングラベル系列の集合 $H(M)$ は $L^*(M)$ の部分集合, つまり, $L(M)$ 上の言語である. よって, それを受理するオートマトンが考えられる.

SO M^S に基づいて, 次のような FA を定義する.

定義 4.4 ムーア機械 M の SO M^S に基づいて次のように定義される FA を状態観測器オートマトン (SOA) と呼び \overline{M}^S で表す.

$$\overline{M}^S = (N(M), L(M), B, \overline{\delta}^S, \overline{\lambda}^S, r^0) \dots\dots\dots (36)$$

状態集合 $N(M)$, 入力記号集合 $L(M)$, 初期状態 $r^0 = Q$ は M^S と同じであり, 状態推移関数 $\overline{\delta}^S$ も M^S と同じ $\overline{\delta}^S = \delta^S$ である. 出力記号集合は $B = \{0, 1\}$ であり, 1 は入力系列の受理を表す. 出力関数は $\overline{\lambda}^S : N(M) \Rightarrow B$ という関数であり, $r \in N(M)$ に対して

$$\overline{\lambda}^S(r) = \begin{cases} 1 & |r| = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots (37)$$

と定義し, 1 が出力されたならば \overline{M}^S は停止するものとする. ■

\overline{M}^S (36) の状態空間モデルは以下のようにして得られる.

B 上のベクトル x に対する次の関数を定義する.

$$G(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots (38)$$

\overline{M}^S (36) の状態空間モデルは M^S の状態空間モデル (31) の出力方程式を $G(x)$ を用いて

$$h(t) = G(\hat{x}(t)) \dots\dots\dots (39)$$

と変更することで得られる.

定理 4.2 ムーア機械 M に対する SOA \overline{M}^S の受理言語は M のホーミングラベル系列の集合 $H(M)$ に等しい. ■

(証明) 紙面の都合により証明の概略のみを示す. 式 (19) は式 (20) の γ_t に対する \overline{M}^S の解 (32) として表現され, $|\hat{x}(t)| = 1$ のとき, γ_t は受理される.

$\hat{x}(t)$ は式 (19) の $r(t)$ のベクトル表現であることから $|\hat{x}(t)| = 1 \Leftrightarrow |r(t)| = 1$ である. また $|r(t)| = 1 \Leftrightarrow \gamma_t \in H(M)$ である. 従って $|\hat{x}(t)| = 1 \Leftrightarrow \gamma_t \in H(M)$ が得られる.

系 4.1 ムーア機械 M に対する SO M^S の収束系列のクラスは M の一般化 AHS の集合 $H^I(M)$ である. ■

5. まとめ

本論文ではムーア機械に対する状態観測器 (SO) の導出およびその収束系列の特徴付けを, 状態空間モデルと呼ばれる行列方程式により行った. このような状態空間モデルによる表現と取り扱いの利点はオートマトン論に線形代数的なアプローチが導入できることである.

例えば入力系列に対する FSM の一連の動作が状態空間モデルの解として得られ, また状態推移の計算は単純な行列とベクトルの B 上での演算で実行できる.

さらにこのような状態空間モデルを用いることで線形システム論で構築された様々な理論や解析が FSM やオートマトンに対して適用でき, Arbib [8] のアプローチとして良く知られているように, FSM やオートマトンをオートマトン論と線形システム論の境界領域で取り扱うことが可能となると考えられる.

参考文献

- [1] E.F. Moore, "Gedanken-experiments on sequential machines," Automata studies, pp.129-153, No.34, Princeton University Press, 1956.
- [2] F.C. Hennie, Finite-state Models for Logical Machines, John Wiley & Sons, 1968.
- [3] C. Chen, Linear System Theory and Design, CBS College, 1984.
- [4] D.G. Luenberger, "An introduction to observers," IEEE Trans. Autom. Control, vol.AC-16, no.6, pp.596-602, 1971.
- [5] M. Gatto and G.Guardabassi, "The regulator theory for finite automata," Inform. Control, vol.31, pp.1-16, 1976.
- [6] K.Watanabe, T.Ikai, and K.Funinaga, "State observers for Moore machines and generalized adaptive homing sequences," IEICE Trans, Inf & Syst, vol.E84-D, No.4, 2001.
- [7] 猪飼, 新谷, 福永, "順序機械の学習 - Angluin の FA 学習と最小部分実現-, 信学技報, COMP95-63, pp.55-64, 1995.
- [8] R.E. Kalman, P.L. Falb, and M.A. Arbib, Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, 1969.
- [9] A. Gill, Linear Sequential Circuits - Analysis, Synthesis, and Applications, McGraw-Hill, 1967.