

制約付き悪条件連立 1 次方程式の解法

小林 富士男* 尾関 孝史* 石川 洋*

An Algorithm for Computing Ill Conditioned Simultaneous Equations with Constraints

Fujio KOBAYASHI* Takashi OZEKI* Hiroshi ISHIKAWA*

ABSTRACT

The steepest descent method has been often used to solve simultaneous equations encountered in engineering problems, especially in the case of ill conditioned and the rate of convergence is very slow. If we calculate with finite figures in the method, there is a certain risk of obtaining erroneous results which do not converge to the true solution.

In this paper, an algorithm for computing the constrained simultaneous equations in terms of the converged values obtained previously by the steepest descent method is described in detail. Last, two examples are presented which are the applications of this method. The one is related to simultaneous linear equations which is ill conditioned. The other is concerned in particular problem which deals with simultaneous linear equations composed of measured values for obtaining spectral transmittance of an optical filter by means of retarding potential method. In latter case, the simultaneous linear equations include some unavoidable errors.

キーワード：連立 1 次方程式，制約条件，最大傾斜法，収束値，最適解，悪条件

Keywords : Simultaneous linear equations, Constraints, Steepest decent method, Converged values, Optimum solution, Ill condition

1. まえがき

制約条件付きの非線形計画問題を解く方法は種々あるが [1]，今後解決すべき問題も多く残

されている．連立 1 次方程式に制約条件を付加し，残差の絶対値の総和を最小にして最適解を求める方法，残差の自乗和を最小にして最適解

*情報処理工学科

を求める方法については既に発表している〔2-4〕。

最大傾斜法は最適化手法として実際はかなり使用されており、条件のよい問題にたいしてはよい手法であるが、条件の悪い場合には収束が遅くなる。実際に計算を行うときには、無限桁で演算を行うことが不可能であるので、理論的には最適解に収束すべきものが、実際には最適解へ収束しないことがある。本論文では、条件の悪い連立1次方程式を最大傾斜法によって有限桁で演算を行ったときの収束点について述べ、次にそれらの収束値を用いて、制約条件を付加した連立1次方程式の最適解を求める方法について述べている。なお、この解法を**逐次進行法**と呼ぶ。

2. 最大傾斜法の収束点

A を $n \times n$ の正則行列、 \mathbf{x} 、 \mathbf{b} を n 次の列ベクトルとすると、連立1次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1)$$

を解くことは、次式を最小とする解 \mathbf{x} を求めることになる。

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad (2)$$

ただし、 $(\ , \)$ は内積を表わし、 \mathbf{r} は残差ベクトルで

$$\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b} \quad (3)$$

である。さて、

$$\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 2 \sum_{i=1}^n a_{ii} r_i \quad (4)$$

であるから、点 \mathbf{x} における $F(\mathbf{x})$ の最大傾斜方向

\mathbf{P} は

$$\mathbf{P} = \nabla F(\mathbf{x}) = 2A^T \mathbf{r} \quad (5)$$

となる。ただし、 A^T は A の転置行列である。

いま、 S 段階における \mathbf{x} 、 \mathbf{P} 、 \mathbf{r} の値をそれぞれ $\mathbf{x}^{(s)}$ 、 $\mathbf{P}^{(s)}$ 、 $\mathbf{r}^{(s)}$ で表し、また修正の大きさを $\delta^{(s)}$ として

$$\mathbf{x}^{(s+1)} = \mathbf{x}^{(s)} + \delta^{(s)} \mathbf{P}^{(s)} \quad (6)$$

とする。すると

$$F(\mathbf{x}^{(s)} + \delta^{(s)} \mathbf{P}^{(s)}) = (\delta^{(s)})^2 (A\mathbf{P}^{(s)}, A\mathbf{P}^{(s)})$$

$$+ 2\delta^{(s)} (A\mathbf{P}^{(s)}, \mathbf{r}^{(s)}) + (\mathbf{r}^{(s)}, \mathbf{r}^{(s)}) \quad (7)$$

であるから、

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^{(s)} + \delta^{(s)} \mathbf{P}^{(s)})}{\partial \delta^{(s)}} = 0 \quad (8)$$

とおくと

$$\delta^{(s)} = - \frac{(A\mathbf{P}^{(s)}, \mathbf{r}^{(s)})}{(A\mathbf{P}^{(s)}, A\mathbf{P}^{(s)})} \quad (9)$$

が得られる。

この方法は、 $F(\mathbf{x}^{(s)})$ の勾配の最も急な方向に進み、最小値を示す点を $\mathbf{x}^{(s+1)}$ としているので、条件のよい連立1次方程式に対しては収束が速い。しかし、条件が悪い場合には、 $F(\mathbf{x})$ が一定となる面は超楕円面となり、各未知数の近似値はその超楕円面の長軸付近を振動しながら〔5-6〕、幾何級数的に解に到達するので収束が大変遅くなる。

実際に数値計算を行うときは、有限桁で計算するので、条件が悪い連立1次方程式の場合には、正解に達する以前に $\mathbf{x}^{(s)} = \mathbf{x}^{(s+1)}$ となり、正解が得られなくなることがある。しかし、それらの収束点は $F(\mathbf{x}) = \text{一定}$ を表わす超楕円面の長軸を通る超平面近傍にある。

各方程式によって表わされる超平面が平行に近いとき悪条件となるが、互いに平行に近い面が単一の場合には各収束点は線形な式で表示される。 $\mathbf{P}^{(s)}$ は $F(\mathbf{x}^{(s)})$ における最急ベクトルであ

り、収束以前では、 $F(\mathbf{x}^{(s+1)}) < F(\mathbf{x}^{(s)})$ となる。 A の固有値の絶対値が最大なもの、および最小のものを λ_{\max} 、 λ_{\min} とすれば、悪条件の場合には、それらの比 $|\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|$ が1と比較して大きな値となる。したがって、超楕円面は長く平たくなり、 S の増加とともに、 $\mathbf{x}^{(s)}$ はほぼ超楕円面の長軸を通る同一超平面上に収束する。

いま、任意に m 点 ($m \geq n$) の初期値を選び、それらの収束値を $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$, $(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$, \dots , $(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$ とする。係数を

$C_j (j=1, 2, \dots, n)$, ..., 定数を C_{n+1} とし, 得られた収束値を次の関係式で表わす.

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} C_j + C_{n+1} = x_m \quad (10)$$

$(i=1, 2, \dots, m)$

式 (10) から $C_j (j=1, 2, \dots, n-1, n+1)$ を求め, それらの値を用いて次のように表わす.

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n + C_{n+1} = 0 \quad (11)$$

ただし, $C_n = -1$ である. すると, 式 (11) で表わされる超平面は $F(\mathbf{x}) = \text{一定}$ の超楕円面の長軸を通り, また式 (1) の解は式 (11) を満足する. 超楕円面の長軸の長さを h_{\max} , 短軸の長さを h_{\min} とすれば, 悪条件の場合には, それらの比 h_{\max}/h_{\min} は 1 と比較して非常に大きな値となる. 各未知数の近似値は長軸付近を振動しながら解に向かって進むが, その振幅が次第に小さくなるので, 最大傾斜法で得られた収束値が超楕円面の長軸を通る超平面上からずれる誤差は一般に小さい. $F(\mathbf{x})$ の値が小さいことは A の最大固有値に対応する固有ベクトルの方向には誤差が小さいことを意味するので, 収束値 $x_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ が超楕円面の長軸を通る超平面上からずれる誤差は小さい. また, 多数の初期値を選び, それらに対する収束値から最小自乗法によって式 (11) を求めれば, 式 (11) が正解からずれる誤差は小さくなることが期待される.

3. 逐次進行法

未知数 x_j と測定値 b_i との間に次の関係が成立しているものとする.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \\ u_j &\leq x_j \leq v_j \\ (i &= 1, 2, \dots, n) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし, a_{ij} は定数で測定値であってもよく, ε_i

は残差, u_j は解の下限, v_j は解の上限をそれぞれ表わしており, 解の許容領域は凸集合とする.

いま, 式 (11) を用い, 次式を最小にして式 (12) の最適解を求める問題を考える. ただし, 式 (11) は解の許容領域を通るものとする.

$$F = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (13)$$

式 (11) は式 (13) において $F = \text{一定}$ としたときに表わされる超楕円面の長軸を通るので, 最適解は式 (11) を満足する. したがって, 解の許容領域を満足し, 式 (11) で表わされる超平面上で, 式 (13) の値が最小となる点を求めればよい.

まず最初, 解の許容領域内で式 (11) を満足する任意な点を初期値に選び $x_j^{(0)} (j=1, 2, \dots, n)$ とする. そのときの目的関数の値

$$F^{(0)} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(0)} - b_i \right)^2 \quad (14)$$

を計算する. 次に式(11)を満たす超平面上で目的関数が減少する方向を見いだしながら, 次第にその方向へ近似値を進める. 修正量を δ とし, この手法の S 段階から $S+1$ 段階を求めるアルゴリズムは次のようになる.

(i)

(a)

$$\left. \begin{aligned} x_k^{(s)} + \delta &\geq u_k \\ x_k^{(s)} + \delta &\leq v_k \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

かつ

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(s)} - \frac{C_k}{C_i} \delta &\geq u_i \\ x_i^{(s)} - \frac{C_k}{C_i} \delta &\leq v_i \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ならば

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_k^{(s)} &= x_k^{(s)} + \delta \\ \bar{x}_l^{(s)} &= x_l^{(s)} - \frac{C_k}{C_l} \delta \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

とし、

(b)式(15), (16)が満足されない場合は

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_k^{(s)} &= x_k^{(s)} \\ \bar{x}_l^{(s)} &= x_l^{(s)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

とし、

$$f^{(s)}(d, k, l) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j^{(s)} - b_i \right)^2 \quad (19)$$

を $k=1, 2, \dots, n$ とし各 k に対して $l=1, 2, \dots, n$ とし、 $d=1(\delta > 0)$, $d=2(\delta < 0)$ の場合について計算する。ただし、

$$k \neq l, \bar{x}_j^{(s)} = x_j^{(s)} \quad (j \neq k, j \neq l) \text{ である。}$$

(ii) $f^{(s)}(d, k, l)$ の中から最小値を選び、

$$\hat{f}^{(s)}(d, k, l) = \underset{d, k, l}{\text{Min}} f^{(s)}(d, k, l) \quad (20)$$

とする。

(iii) $\hat{f}^{(s)}(d, k, l)$ と $F^{(s)}$ を比較し

$$\hat{f}^{(s)}(d, k, l) < F^{(s)} \quad (21)$$

ならば

$$F^{(s+1)} = \hat{f}^{(s)}(d, k, l) \quad (22)$$

とし、 $\hat{f}^{(s)}(d, k, l)$ に対する各未知数の近似

値 $\hat{x}_j^{(s)}$ を

$$x_j^{(s+1)} = \hat{x}_j^{(s)} \quad (23)$$

($j=1, 2, \dots, n$)

として(i)にもどる。

(iv) $\hat{f}^{(s)}(d, k, l) \geq F^{(s)}$ (24)

の場合

(a) $|\delta| > e$ (25)

ならば

$$\delta := \frac{\delta}{10} \quad (26)$$

として、(i)に行き計算を繰り返す。

(b) $|\delta| \leq e$ (27)

ならば計算を終了する。

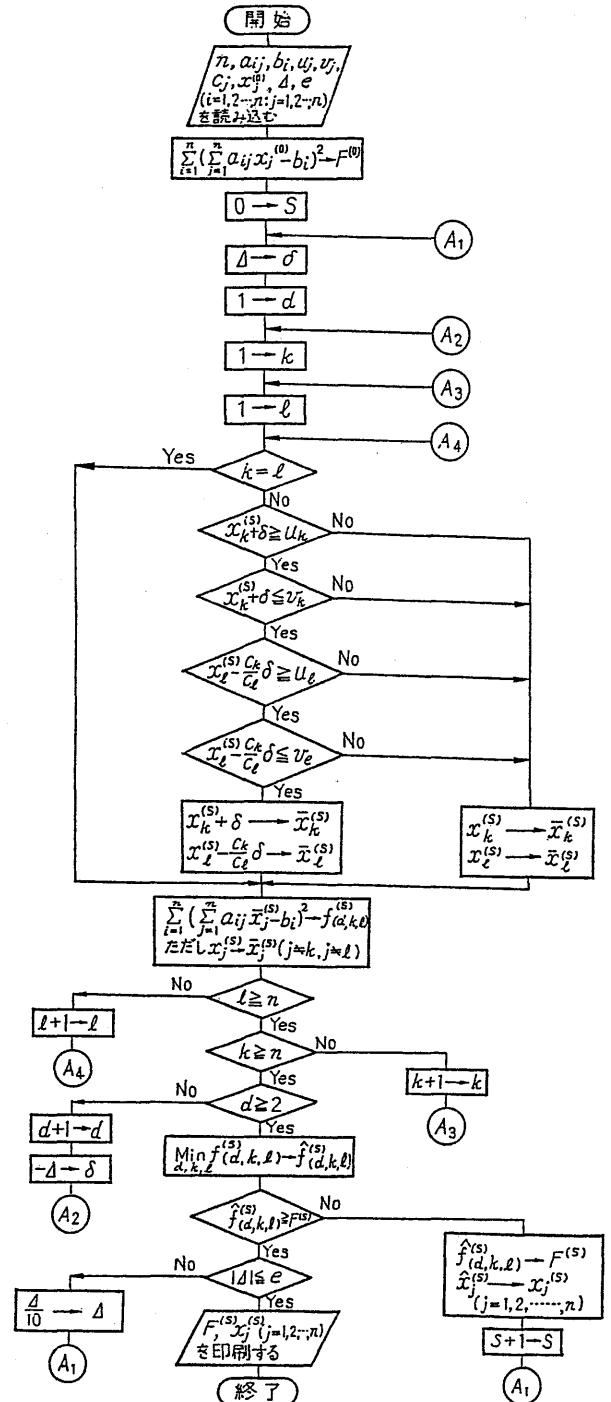


図1 流れ図

Fig.1 Flow chart.

ただし、 ϵ は予め定めた充分小さな正の定数とする。

図1は本計算法の流れ図である。最適な δ (初期値)は問題によって異なり、また各未知数の初期値によっても異なるが、 $\delta = \text{Max}_j \{|u_j|, |v_j|\}$ とすればよい。このようにしても、何ら支障をきたさない。

4. 逐次進行法の収束

第3章で述べた逐次進行法によって求めた各未知数の近似値が、最適解へ収束することを以下で証明する。

仮定から初期値は解の許容領域内にあり、式(1.1)を満足している。また計算の各段階では、式(1.5)、(1.6)から式(1.1)を満たす超平面上にあり、かつ、解の許容領域内にあることは明らかである。最終段階以前の各段階ではまだ最小値に達していない。したがって、常に次の関係が成立する。

$$F^{(s)} > F^{(s+1)} \quad (2.8)$$

かくして、 $F^{(s)}$ は段階 S の増加とともに減少する。それゆえ、各未知数の近似値が式(1.3)を最小とするベクトル方向へ収束することは自明である。その近似値が果たして最適解に収束するか否かが問題である。

いま、最適解をベクトル \mathbf{x}^* で表わし、そのときの目的関数の値を $F(\mathbf{x}^*)$ とする。解の許容領域内の点 \mathbf{x}^0 は式(1.1)を満たし、その点で目的関数 $F(\mathbf{x}^0)$ は局所的最小で、各未知数の近似値がその点に収束するものと仮定する。すると、次の関係が成り立つ。

$$F(\mathbf{x}^*) \leq F(\mathbf{x}^0) \quad (2.9)$$

目的関数は凸関数であるから、 $0 \leq \lambda \leq 1$ なる λ に対して

$$F\{\lambda \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^0\} \leq \lambda F(\mathbf{x}^*) + (1-\lambda)F(\mathbf{x}^0) \quad (3.0)$$

となる。また式(2.9)より次の関係が得られる。

$$F\{\lambda \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^0\} \leq F(\mathbf{x}^0) \quad (3.1)$$

いま、

$$\frac{\theta}{|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0|} > \lambda > 0 \quad (3.2)$$

ただし、 $|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0| \geq \theta > 0$ のように λ の値を選ぶ。

すると、 $F(\mathbf{x})$ は \mathbf{x}^0 で局所的最小であるという仮

定から、 \mathbf{x}^0 の θ 近傍 $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^0$ において、次の関係が成立しなければならない。

$$F(\mathbf{x}) = F\{\lambda \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^0\} > F(\mathbf{x}^0) \quad (3.3)$$

この式(3.3)は式(3.1)と矛盾する。したがって、 \mathbf{x}^* と \mathbf{x}^0 は一致しなければならない。それゆえ、各未知数の近似値は最適解 \mathbf{x}^* へ収束する。収束の速さは、与えられた問題、制約条件、各未知数の初期値によっても異なるが、 $|\lambda_{\max}|/|\kappa_{\min}|$ の値がその目安となる。一般に、この値が大きい程収束は遅い。

5. 数値計算

5.1 簡単な計算

次の連立1次方程式の正解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ は、 $(9, 7, 5, 3, 1)$ である。

$$\left. \begin{aligned} 10x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 13x_4 + 14x_5 &= 280 \\ 10x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 20x_4 + 30x_5 &= 339 \\ 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 50x_5 &= 435 \\ 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 50x_4 + 80x_5 &= 610 \\ 10x_1 + 30x_2 + 50x_3 + 80x_4 + 90x_5 &= 880 \end{aligned} \right\} (3.4)$$

0~9の一樣乱数を発生させ、それらを初期値にして最大傾斜法によって計算すると、その結果は表1のようになり、正解とはかけ離れた解が得られる。ただし、演算は、全て有効数字約9桁(10進)の計算機で行った。式(3.4)の $i(i=1, 2, \dots, n=5)$ 行の各係数 a_{ij} をその自乗和の

表1 最大傾斜法による収束値

Table 1 The converged values which are obtained by the steepest decent method.

未知数	No. 1		No. 2		No. 3		No. 4		No. 5	
	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値
x_1	8.0	11.713	4.0	6.890	3.0	10.733	3.0	8.352	8.0	8.234
x_2	1.0	2.717	6.0	7.406	0.0	5.321	7.0	9.216	7.0	6.996
x_3	6.0	5.669	9.0	8.935	1.0	3.826	4.0	3.003	7.0	6.658
x_4	7.0	4.033	2.0	0.105	6.0	4.411	9.0	3.620	3.0	1.842
x_5	1.0	0.836	1.0	1.487	4.0	0.765	3.0	0.892	4.0	1.195

(ただし, 小数点以下4桁目を四捨五入して表示している)

表2 最大傾斜法による収束値

Table 2 The converged values which are obtained by the steepest decent method.

未知数	No. 1		No. 2		No. 3		No. 4		No. 5		No. 6	
	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値
x_1	0.6	-0.326	0.2	-0.153	0.4	-0.044	0.8	-0.148	0.5	-0.187	0.2	-0.281
x_2	0.7	0.849	0.1	0.442	0.3	0.271	0.7	0.480	0.6	0.632	0.8	0.822
x_3	0.1	0.257	0.3	0.623	0.7	0.585	0.7	0.554	0.2	0.243	0.0	0.173
x_4	0.4	0.184	0.0	0.070	0.4	0.095	0.3	0.002	0.5	0.334	0.0	0.156
x_5	0.6	0.079	0.1	-0.042	0.9	0.484	0.4	-0.019	0.3	-0.027	0.2	0.298
x_6	0.9	0.255	0.6	0.350	0.3	-0.123	0.9	0.456	0.7	0.318	0.1	0.143

(ただし, 小数点以下4桁目を四捨五入して表示している)

平方根 $\left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right\}^{1/2}$ で割って正規化し, その行列式

の値を求めるとその値は, 3.522×10^{-6} で1に比較して小さいから, 式(34)は悪条件の連立1次方程式である. 表1の収束値を用いて消去法により, 式(10)の C_j ($j=1, 2, \dots, n-1,$

$n+1$) を求めると, 式(11)に対応する次式が得られる.

$$\begin{aligned} & -0.145x_1 - 0.313x_2 - 0.483x_3 - 0.763x_4 \\ & -x_5 + 9.201 = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

たとえば, $x_j = 4.0$ ($j=1, 2, \dots, 4$) とすれば, 式

(35)より, $x_5 = 2.385$ となる. これらの値を初期値とし, 上述の逐次進行法によって計算すると, $x_1 = 9.001, x_2 = 7.001, x_3 = 4.996, x_4 = 3.002, x_5 = 1.000$ が得られ, ここで初めて正解に収束する.

5.2 応用例

光電管の減速電圧特性を利用すると入射光の分光組成を分析することができる[7]. 光電陰極・陽極ともに平行平面の構造をした真空管に, 中心波長 352[nm], 395[nm], 447[nm], 495[nm], 551[nm], 596[nm] の干渉フィルタを通して光を入射すると, 減速電圧特性曲線は図2のようになる. 各干渉フィルタを透過した光を同時に入射し, 光学フィルタを挿入すると減速電圧特性は図3の通りとなる. 図2, 図3において, 減速電圧 $V = -0.1$ [V] から $V = -0.6$ [V] までを 0.1[V] 間隔に電圧を選び, それらの電圧に対する光電流値から連立1次方程式を求めると次のようになる. ただし, 図2で得られた値を左辺の係数, 図3のそれらを右辺の定数としている.

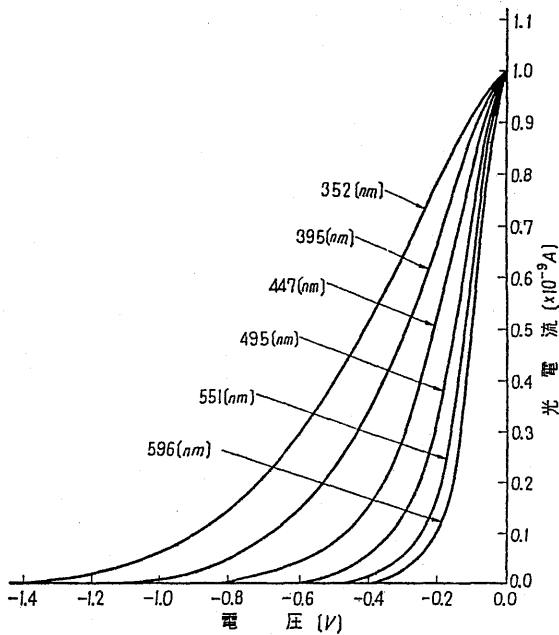


図2 各単色光に対する光電管の減速電圧特性
 Fig.2 Retarding potential characteristics of a photoelectric tube for each monochromatic light

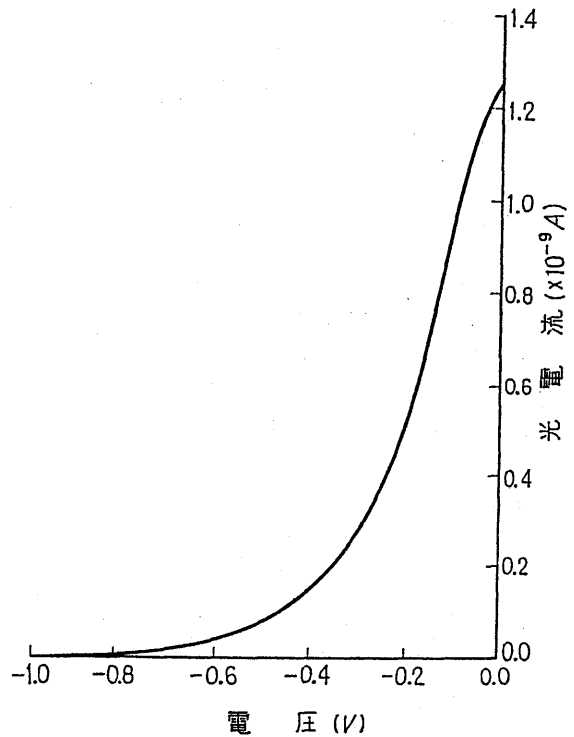


図3 光学フィルター挿入時の光電管減速電圧特性

Fig.3 Retarding potential characteristics of a photoelectric tube when optical filter is inserted.

な解が得られる。そこで、0.0~0.9の一樣乱数発生させて、それらを初期値に選び有効数字約9桁(10進)の計算機で最大傾斜法によって計算すると、おのおのの収束値は表2の通りとなる。表2の収束値から式(10)の C_j ($j=1,2,\dots,n-1,n+1$) を求めると、式(11)

に対応する次式が得られる。

$$\begin{aligned} & -3.209x_1 - 2.708x_2 - 2.116x_3 \\ & -1.555x_4 - 1.188x_5 - x_6 + 2.432 = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

いま、物理的制約条件 $0 \leq x_j \leq 1$ ($j=1,2,\dots,6$) を

付加する。たとえば、 $x_j = 0.2$ ($j=1,2,\dots,5$) とす

れば、式(37)より $x_6 = 0.277$ となるので、これらを初期値として逐次進行法で求めた結果を従来の分光測光法で得られた曲線上に×印でプロットすると図4のようになる。同図か

$$\left. \begin{aligned} & 0.914x_1 + 0.858x_2 + 0.797x_3 \\ & + 0.700x_4 + 0.608x_5 + 0.557x_6 = 0.951 \\ & 0.775x_1 + 0.660x_2 + 0.509x_3 \\ & + 0.330x_4 + 0.197x_5 + 0.122x_6 = 0.557 \\ & 0.623x_1 + 0.485x_2 + 0.293x_3 \\ & + 0.128x_4 + 0.0465x_5 + 0.0156x_6 = 0.306 \\ & 0.496x_1 + 0.340x_2 + 0.153x_3 \\ & + 0.0399x_4 + 0.00894x_5 + 0.000x_6 = 0.168 \\ & 0.388x_1 + 0.227x_2 + 0.0712x_3 \\ & 0.00868x_4 + 0.000x_5 + 0.000x_6 = 0.0871 \\ & 0.287x_1 + 0.140x_2 + 0.0278x_3 \\ & 0.000x_4 + 0.000x_5 + 0.000x_6 = 0.0431 \end{aligned} \right\}$$

(36)

なお、 x_j ($j=1,2,\dots,6$) は中心波長 352[nm],

395[nm], 447[nm], 495[nm], 551[nm],

596[nm]の干渉フィルタに対応している。式

(36)の解を消去法で求めると、 $x_1 = 0.004$, $x_2 = 0.143$, $x_3 = 0.784$, $x_4 = -0.338$, $x_5 = 1.190$, $x_6 = -0.518$ となり、物理的に不合理

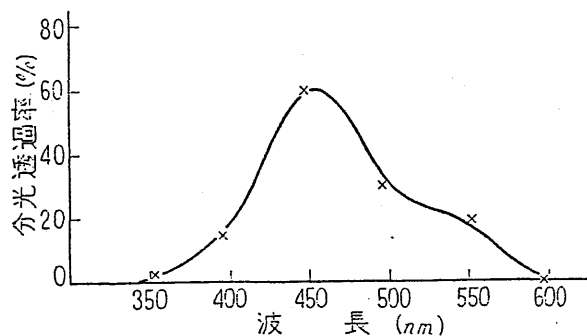


図4 光学フィルター分光透過率

Fig.4 Spectral transmittance of optical filter.

ら両者はかなりよく一致していることがわかる。なお、式(3.6)の左辺の係数を正規化した行列式の値は -7.802×10^{-8} であるから、式(3.6)は悪条件の連立1次方程式である。

6. むすび

条件の悪い連立1次方程式を解く場合、直接法を用いれば丸め誤差の影響が大きくなり、また反復法を用いれば収束が遅く、一般にどのような解法を使用してもあまり思わしくない。悪条件の連立1次方程式の場合、解がその係数に敏感であるから、係数または右辺の定数に小さな誤差が入っていても解に大きく影響し、物理的に起き得ない不合理な解が得られることがある。そのような場合、制約条件を付加して最適解を求めると望ましい結果が得られることがある。

線形制約条件のもとで非線形の目的関数の最小値または最大値を求める従来の手法〔8-9〕は、アルゴリズムが複雑である。それに対して、提案した逐次進行法は前もって式(1.1)を求めておけばよく、アルゴリズムが簡単で記憶容量が少なくてよい長所があるので、各種の応用に便利である。

参考文献

- [1] D. M. Himmelblau : Applied Non-linear Programming, McGraw-Hill (1972).
- [2] 小林富士男, 山口昌一郎 : 線形計画法の減速電圧法による分光測光への応用, 照明学会雑誌, Vol.54, No.12, pp. 681~688 (1970).
- [3] 小林富士男, 山口昌一郎 : 測定値を用いた多元連立方程式の逐次近似解法, 電気学会雑誌, Vol.92-A, No.9, pp.431~439 (1972).
- [3] 小林富士男, 山口昌一郎 : 制約条件のもとでのペナルティ関数を用いた連立一次方程式の解法, 照明学会雑誌, Vol.58, No.8, pp.428~433 (1974).
- [5] G. E. Forsythe & T. S. Motzkin : Asymptotic Properties of the Optimum Gradient Method, Bull. Amer. Math. Soc., Vol.57, No.3, p.183 (1951).
- [6] H. Akaike : On a Successive Transformation of Probability Distribution and its Application to the Analysis of the Optimum Gradient Method, Ann. Inst. Statist. Math., Vol.11, No.1, pp.1~16 (1959).
- [7] 山口昌一郎, 小林富士男 : 光電管の減速電圧特性とその分光測光への応用, 照明学会雑誌, Vol.52, No.4, pp.108~115 (1968).
- [8] G. Zoutendijk : Methods of Feasible Directions, Elsevier (1960).
- [9] J. C. G. Boot : Quadratic Programming, Algorithms-Anomalies-Applications, North-Holland (1964).