

表面電荷法による電界解析の計算精度

坪井 始* 浅原知行+ 小林富士男* 美咲隆吉*

Computational Accuracy of Electric Field Analysis by Surface Charge Method

Hajime TSUBOI, Tomoyuki ASAHARA, Fujio KOBAYASHI and Takayoshi MISAKI

ABSTRACT

Electric field analysis is performed by using various types of boundary element methods. In this paper, the computational accuracy of surface charge method, which is an indirect method of boundary method, is investigated. The computational accuracy of electric field is determined by the following three kinds of accuracy: the approximation accuracy of boundary surfaces, the approximation accuracy of unknown variables on boundary elements and the integration accuracy of coefficient matrix of simultaneous equations. Here, it is described how the accuracy of electric field calculated by the surface charge method is determined by the three kinds of accuracy.

Keywords: electric field analysis, surface charge method, boundary element method, computational accuracy, numerical analysis.

キーワード: 電界解析、表面電荷法、境界要素法、計算精度、数値解析。

1. まえがき

電界解析は、電磁界の数値解析の中で早くから実用化され、様々な手法で行われている。電界解析は問題の性質が良く、いわゆるポテンシャル問題として扱われることが多いことも実用化が早くなった一つの理由である。

電界解析では、電極表面や絶縁物表面の電界強度が問題になることが多いため、有限要素法のような領域分割法は解析手法としては不向きであり、直接境界面の電界が精度良く求められる境界要素法が用いられる。ここでは、境界要素法の間接法として位置付けられる表面電荷法についてその計算精度について考察する。

2. 表面電荷法の計算精度

表面電荷法では解析に必要な計算が境界面に集中するため、計算精度は境界面に関する量の計算精度に左右されることになる。また、連立一次方程式は積分方程式で構成される。最終的な表面電荷法の計算精度は、次の三つの精度によって決まる。

(1) 境界面形状の近似精度

(2) 境界要素上の未知変数の近似精度

(3) 連立一次方程式の係数行列の積分精度

そこで、これらの精度について計算例を用いて考察する。

3. 境界面形状と未知変数の近似精度

高電圧機器の電界解析では、電極や絶縁物が曲面形状を有するため、曲面形状を高精度に近似する必要がある。そこで、曲面形状をもつ境界要素⁽¹⁾を用いる。

二次元及び軸対称問題で用いられる曲線要素を図1に示す。要素の形状は、二つの節点(端点)における座標とその一次微係数によって局所座標 u の三次関数で次のように定義される。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & (dx/du)_1 & (dx/du)_2 \\ y_1 & y_2 & (dy/du)_1 & (dy/du)_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 N_1, N_2, N_3, N_4 は三次元の補間関数で図1(b)に示す局所座標 u を用いて、

* 情報処理工学科、 + 大学院工学研究科電子情報工学専攻

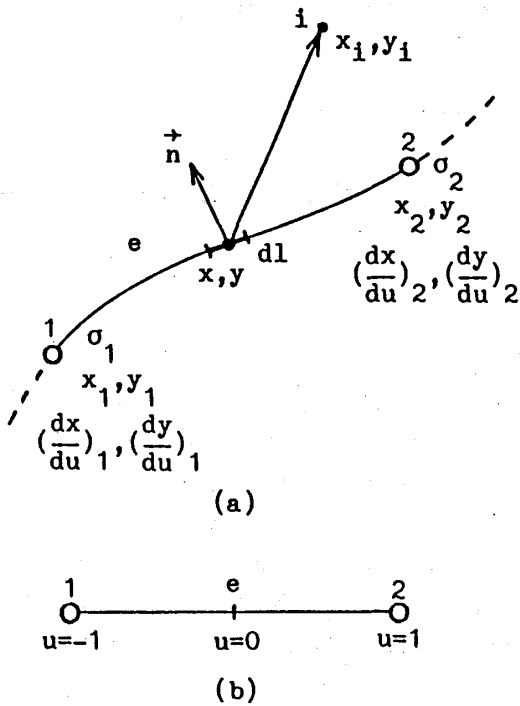


図1 曲線要素、(a)要素、(b)局所座標。

Fig. 1 Curved line element, (a) element, (b) local coordinate.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (u - 1)^2 (u + 2) / 4 \\
 N_2 &= -(u + 1)^2 (u - 2) / 4 \\
 N_3 &= (u - 1)^2 (u + 1) / 4 \\
 N_4 &= (u + 1)^2 (u - 1) / 4
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

である。

要素上の表面電荷密度 σ は、局所座標 u の一次関数で次のように定義される。

$$\sigma = \frac{1-u}{2} \sigma_1 + \frac{1+u}{2} \sigma_2
 \tag{3}$$

図1の曲線要素を用いると、要素境界(接続点)で法線ベクトルが連続的に定義されるため、曲線形状を滑らかに近似できる。

図2に示す計算モデルにおいて、図1の曲線要素と従来の直線要素を円筒電極モデルに、曲線要素を球電極モデルに適用した場合について、直線 l 上の電界の計算誤差を図3に示す。また、同様に図4の一樣電界中の誘電体モデルの電界の計算誤差を図5に示す。これらの結果より、曲線要素を用いることにより電界の計算精度が向上することがわかる。すなわち、境界面(線)の近似精度の向上により、電界の計算精度が向上することがわかる。

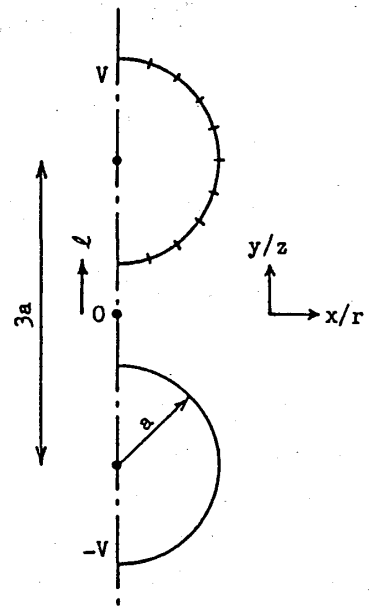


図2 二円筒導体モデル(二次元問題)及び二球導体モデル(軸対称問題)。

Fig. 2 Cylinder electrode model for two-dimensional problem and sphere electrode model for axisymmetric problem.

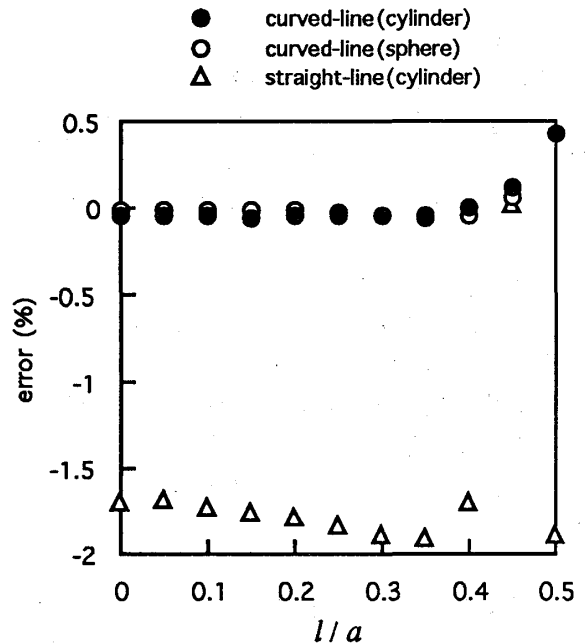


図3 二円筒導体モデル及び二球導体モデルの直線 l に沿う電界の計算誤差。

Fig. 3 Computational errors of the electric field of the cylinder electrode model and sphere electrode model along the line l .

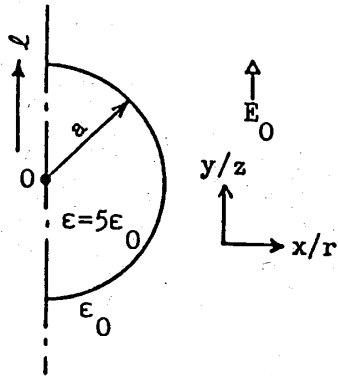


図4 誘電体円筒モデル（二次元問題）及び誘電体球モデル（軸対称問題）。

Fig. 4 Dielectric cylinder model for two-dimensional problem and dielectric sphere model for axisymmetric problem.

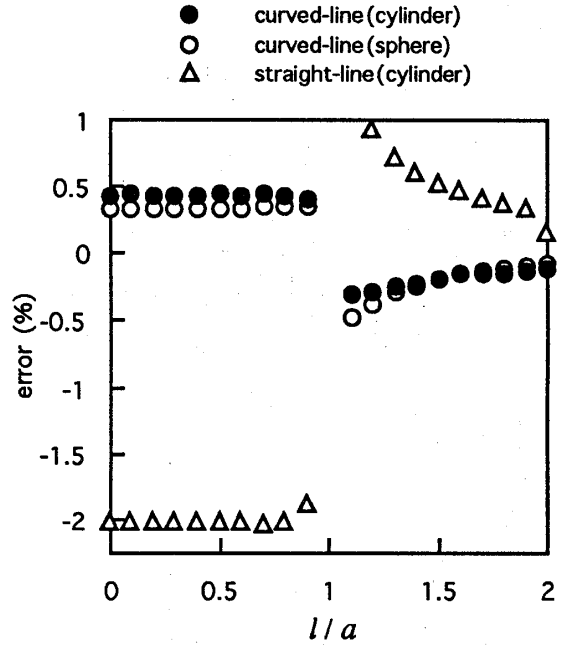


図5 誘電体モデルの直線 l に沿う電界の計算誤差。

Fig. 5 Computational errors of the electric field of the dielectric models along the line l.

図6に、形状を五次関数で近似する曲面三角形要素を示す。曲面三角形要素の形状は、三つの節点（頂点）における座標（x座標についてはx）、座標の二つの一次微係数（ $\partial x/\partial L_1, \partial x/\partial L_2$ ）、三つの二次微係

数（ $\partial^2 x/\partial L_1^2, \partial^2 x/\partial L_2^2, \partial^2 x/\partial L_1 \partial L_2$ ）、三つの辺の中点における辺に垂直な方向の微係数（ $\partial x/\partial s$ ）の計21の値によって次のように定義される。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & (\partial x/\partial L_1)_1 & (\partial x/\partial L_1)_2 & (\partial x/\partial L_1)_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & (\partial y/\partial L_1)_1 & \dots & \dots \\ z_1 & z_2 & z_3 & (\partial z/\partial L_1)_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & (\partial^2 x/\partial L_1 \partial L_2)_3 & (\partial x/\partial s_4)_4 & (\partial x/\partial s_5)_5 & (\partial x/\partial s_6)_6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (\partial y/\partial s_6)_6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (\partial z/\partial s_6)_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_{21} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 N_1, \dots, N_{21} は五次の補間関数である。

また、要素上の表面電荷密度は三つの頂点の表面電荷密度の値 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を用いて次のように一次関数で表される。

$$\sigma = L_1 \sigma_1 + L_2 \sigma_2 + (1 - L_1 - L_2) \sigma_3 \quad (5)$$

図7に示す球電極モデルにおいて、同一の要素数の平面三角形要素と曲面三角形要素を用いて計算した場

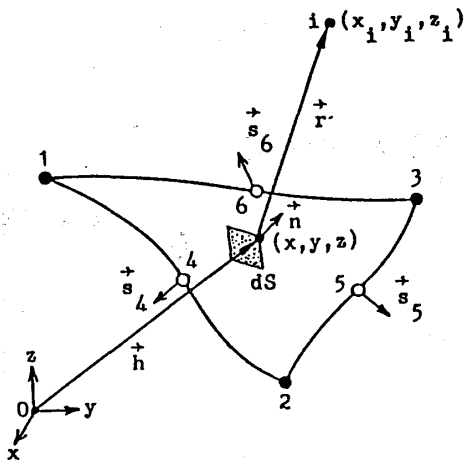


図6 21自由度曲面三角形要素.

Fig. 6 21-freedom curved surface triangular element.

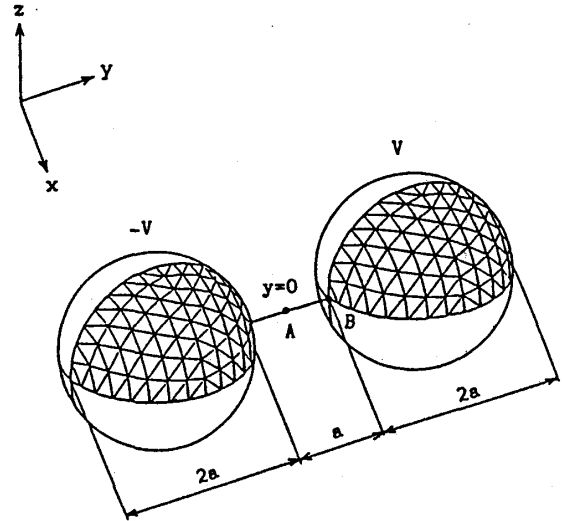


図7 球電極モデル (三次元問題).

Fig. 7 Sphere electrode model for three-dimensional problems.

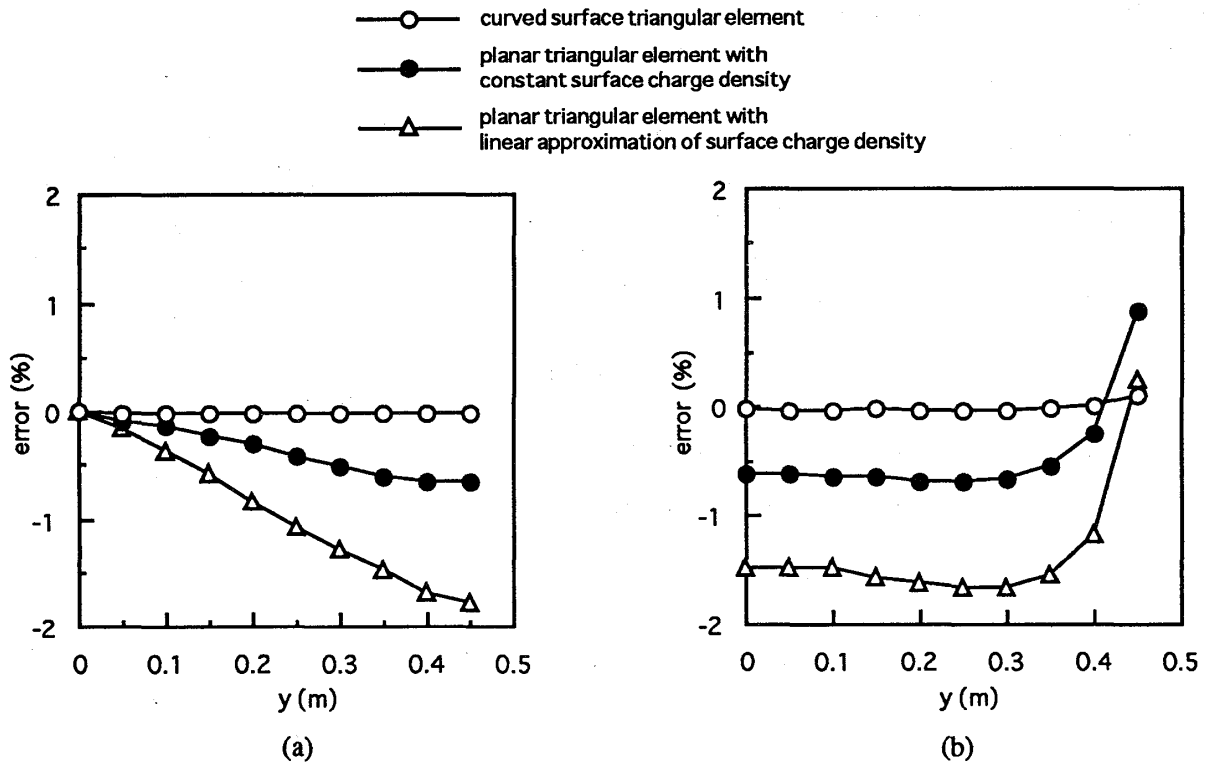


図8 球電極モデルの計算誤差、(a) 電位、(b) 電界.

Fig. 8 Computational errors of the sphere electrode model, (a) potential, (b) electric field.

合の結果を図8及び表1に示す^{(3),(4)}。計算は、平面三角形要素を用いて未知変数(表面電荷密度)を要素内で一定及び一次近似した場合、要素の形状を座標の五次関数で近似して未知変数を一次近似した場合につい

て行っている。図8は、線分AB上の電位と電界の誤差である。未知変数の近似を一定から一次近似に、三角形要素の形状を平面から曲面にすることによって大幅な計算精度の向上が達成されていることがわかる。

表1 電極表面の最大電界値の計算誤差.

Table 1 Computational errors A maximum electric field strength on the electrode surface.

要素の種類	最大電界値の計算誤差 (%)
21自由度三角形要素 (表面電荷密度：一次近似)	0.572
平面三角形要素 (表面電荷密度：一定)	1.051
平面三角形要素 (表面電荷密度：一次近似)	0.684

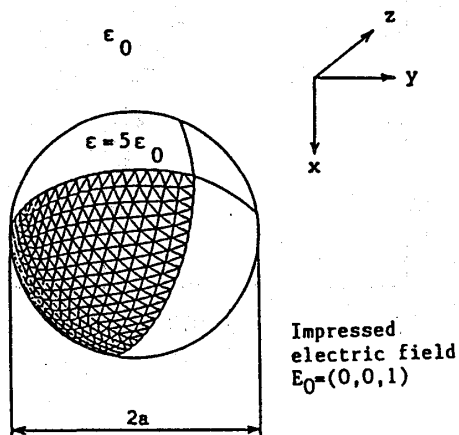


図9 誘電体モデル (二次元問題).

Fig. 9 Dielectric sphere model for three-dimensional problem.

また、表1に示すように球電極表面の最大電界の計算誤差も同様に向上している。なお、同じ三角形要素を用いたときは、未知変数の近似が一定と一次近似の場合では、未知数が一定の場合は一次近似の場合の約2倍となり、一次近似の場合は未知数が少ないにも拘わらず精度が高いことになる。しかし、二次近似を用いると未知数は一次近似の4倍、三次近似を用いると未知定数は7倍となり、ガウスの消去法の計算時間が未知数の三乗に比例することを考慮すると二次近似以上の近似は得策ではない。形状の近似次数は未知数の数

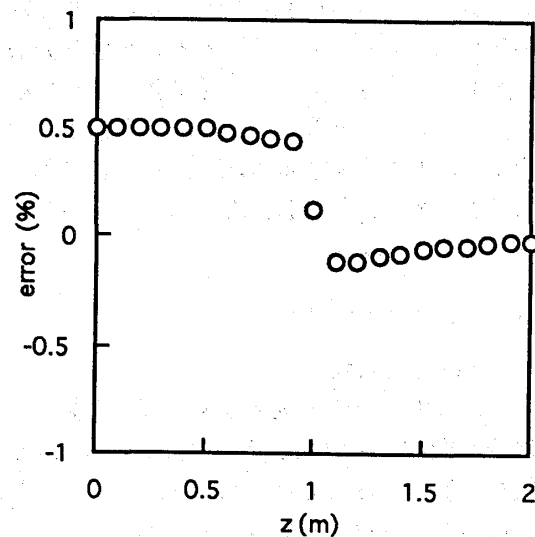


図10 誘電体球モデルの計算誤差.

Fig. 10 Computational errors of the dielectric sphere model.

に影響しないので高次のものを用いることができる。また、誘電体球モデルを図9に、曲面三角形要素を用いた場合の計算誤差を図10に示す^{(3),(4)}。この結果より曲面三角形要素により、電極モデルと同様に誘電体球モデルでも高精度の解が得られることがわかる。

4. 係数行列の計算精度

次に連立方程式の係数行列作成時の数値積分の計算精度向上について述べる^{(3),(5)}。曲線及び曲面要素を用いる場合には数値積分が必要となるため、特異点を含

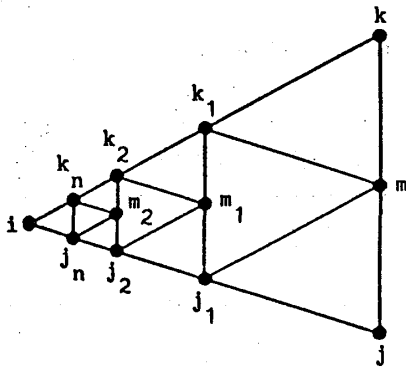


図11 三角形要素の再分割.

Fig. 11 Subdivision of a triangular element.

む場合の数値積分の高精度化が重要である。座標変換を適用した後にガウスの積分公式を用いる方法が発表されているが、ここでは要素を小三角形に再分割して、各小三角形にガウスの積分公式を適用する方法を述べる。図11に示すように、三角形要素を4つの小三角形に分割し、さらに特異点を含む小三角形を4つの小三角形に何回か再分割する方法で、再分割された小三角形にガウスの7点積分公式を適用する。積分点の数 M_s は次式で与えられる。

$$M_s = 7 \{ 3(n-1) + 4 \} \quad (6)$$

ここで、 n は再分割回数。

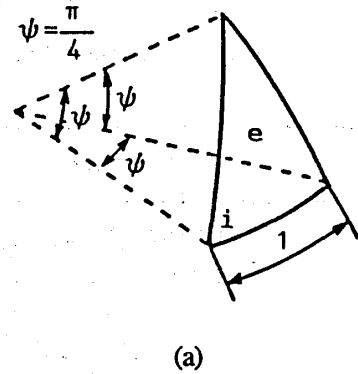
図12(a)と同図(b)の曲面三角形要素の電位係数と電界係数の積分点数 M_s に対する計算誤差を示す。0.1%の計算誤差を目標とするならば、 $M_s=175$ でよいことがわかり、このときの再分割数 n は8である。

以上の手法は一次元の適応的数値積分を三角形領域に拡張したものであるが、数値積分の計算精度を向上させるにはこのようになるべく少ない積分点数で高精度な積分が行える手法を採用する必要がある。

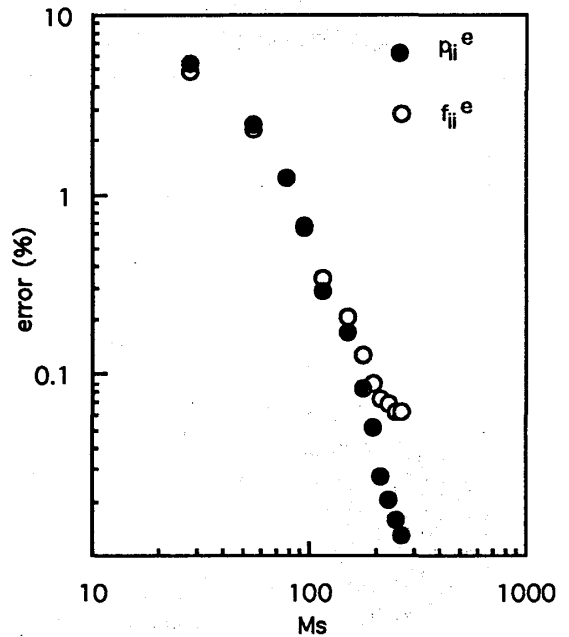
連立方程式の係数行列の計算精度は、電束の連続条件の導入の際に注意を払う必要がある。次式で表される電束の連続条件を導入する場合を考える。

$$(\epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2) \cdot n = 0 \quad (7)$$

この場合、 E_1 及び E_2 が誤差0.1%以内で計算されていても、 ϵ_1 と ϵ_2 の比が1000倍以上であると、情報落ちにより有効桁は失われてしまうことになる。したがって、このような場合には解析積分を用いない限り、十分な計算精度が得られないことにある。



(a)



(b)

図12 電位係数及び電界係数の計算誤差、(a)要素、(b)計算誤差.

Fig. 12 Computational errors of the potential coefficient p_i^e and the electric field coefficient f_{ij}^e , (a) element, (b) errors.

5. むすび

以上、電界問題における境界要素法の計算精度は、境界面形状の近似精度、未知変数の近似精度、係数行列の積分精度によって決まることを説明した。すなわち、境界要素法では、境界面に処理が集中するためこれらの精度が解の精度を左右するのである。したがって、高精度化のために単に計算規模の増大させるのではなく、これらの計算精度を考慮して効率のよい手法

を選ぶことにより高精度化は達成される。

参考文献

- (1) H. Tsuboi and T. Misaki: "Boundary Integral Method for Two-Dimensional and Axisymmetric Electric Field Problems," Proceedings of the 1st Japan-China Symposium on Boundary Element Methods, pp.207-216, Pergamon Press, 1987.
- (2) 坪井、美咲: 「表面電荷法による電極形状の最適化について」、電気学会論文誌A、Vol.103-A、No.12、pp.675-682 (昭58-12)。
- (3) 坪井、美咲、矢野: 「表面電荷法における数値積分の高速化」、電気学会論文誌A、Vol.107-A、No.4、pp.201-208 (昭62-4)。
- (4) 美咲、坪井、藤宮、河上: 「電界解析における表面電荷法と境界要素法の計算精度の比較について」、電気学会回転機・静止器合同研究会資料 RM-84-45, SA-84-16, pp.53-62 (昭59-8)。
- (5) 坪井、石井: 「三次元境界要素法におけるスーパーコンピュータ用数値積分」、電気学会論文誌A、Vol.109-A、No.9、pp.399-404 (平元-9)。