

渦電流解析における有限要素モデルの重畳法

田中 始男

回転機や渦電流探傷プローブのように複数の物体の相対距離が変化する問題を対象とする有限要素解析では、相対距離変化に応じた有限要素メッシュの再構成回避は重要である。本論文では、複数の有限要素モデルを重畳する方法を提案している。提案手法では、物体毎に相互の影響を無視した有限モデルをそれぞれ作成し、相互のモデルを重畳するために変形時期ポテンシャル法に基づく積分と反復法によって物体相互の影響を計算する。これによって、物体間の相対位置変化による有限要素メッシュの再構成を不要としている。

【キーワード：有限要素法、積分、渦電流】

1. はじめに

有限要素法による電磁界解析の有効性が示され、実用的な解析が行われている。実用問題の中には、回転機の解析や渦電流探傷(ECT: Eddy Current Testing)問題の解析のように解析対象内の各物体形状は不変で物体間の相対位置のみが変化するケースも多くある^{(1),(2)}。有限要素法では空間も含めた解析領域全体の要素分割が必要であるため、物体間の相対位置変化に対して空気領域を含む新たな有限要素分割や有限要素メッシュの再構成が必要となる。一般にこれらの労力は大きく、さらに要素形状の歪等で計算精度が低下する場合もある。本論文では、このような問題を回避するために、解析領域内の複数の物体についてそれぞれに有限要素モデルを作成し、相互の影響を積分式と反復計算で考慮する計算法を提案する。まず、解析領域全体に対する有限要素モデルを物体毎に独立した有限要素モデルに分割する手法の概略を示し、有限要素モデルを相互に関連付ける積分式を導出する。次に、提案手法をベンチマーク問題に適用して計算結果を示すことで妥当性を確認する。

2. 複数メッシュを用いた有限要素法

図1の渦電流問題に対して変形磁気ポテンシャル法を適用すれば次の有限要素法の基本式が得られる^{(3),(4)}。

$$\iiint_{V'} (\nabla \times N \cdot \nabla \times A + j\omega N \cdot A) dV - \iiint_{V'} \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times N \cdot \nabla \times A_s \right) dV + \iint_{S'} (H_s \times N) \cdot n dS = 0 \quad (1)$$

ここで、 σ は導電率、 μ は透磁率、 ω は角周波数、 A は磁気ベクトルポテンシャル、 H_s はソース電流 J_0 によって生じる磁界である。 N は一次ベクトルの補間関数である。

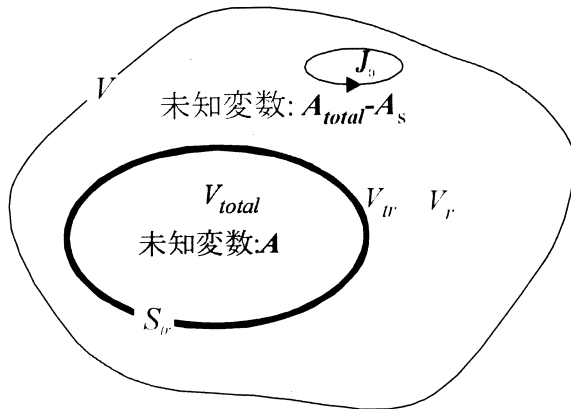


図 1 渦電流問題に対する変形磁気ポテンシャル法

変形磁気ポテンシャルを用いた有限要素法では、(1)式からわかるように、ソース電流 J_0 の項は要素形状に依存しておらず、有限要素分割に無関係に配置できる。このため、ソース電流と解析対象物体の相対位置変化に対して新たな有限要素分割は不要である。これが変形磁気ポテンシャル法の利点である。例えば、図 2 に示すモデルのようにソース電流が線電流で与えられる場合、(1)式の A_s と H_s はビオ・サバル則によって線積分で計算でき、ソース電流と物体の相対的な位置関係 r の関数となる。また、(1)式の左辺第 2 項と第 3 項は最終的な連立方程式では定数項となる。このため、ソース電流の位置が移動しても、有限要素メッシュの再構成は不要であり、 A_s と H_s に関する項の再計算のみで対応できる。

ここで、図 2 中の物体 X と物体 Y の相対的な位置関係が変わった場合について考察する。通常、物体間の相対位置が変われば、空間を構成する有限要素要素メッシュの再構成が必要となる。この再構成には多大な労力が費やされ、さらに、計算精度が低下することもある。このようなメッシュの再構成無しに相対位置の変化を考慮する方法について以下に述べる。

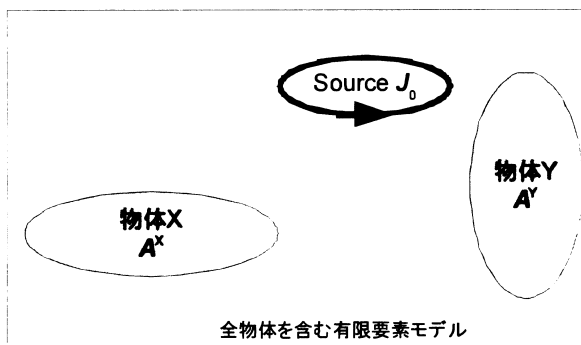


図2 有限要素モデル

図3に示すように、物体Xと物体Yによって生じる電磁場を外部からのそれぞれの外部ソースと考え、二つの物体間の相互作用を無視すれば、図2の有限要素モデルは二つの有限要素モデルを重ね合わせたモデルとみなせる。

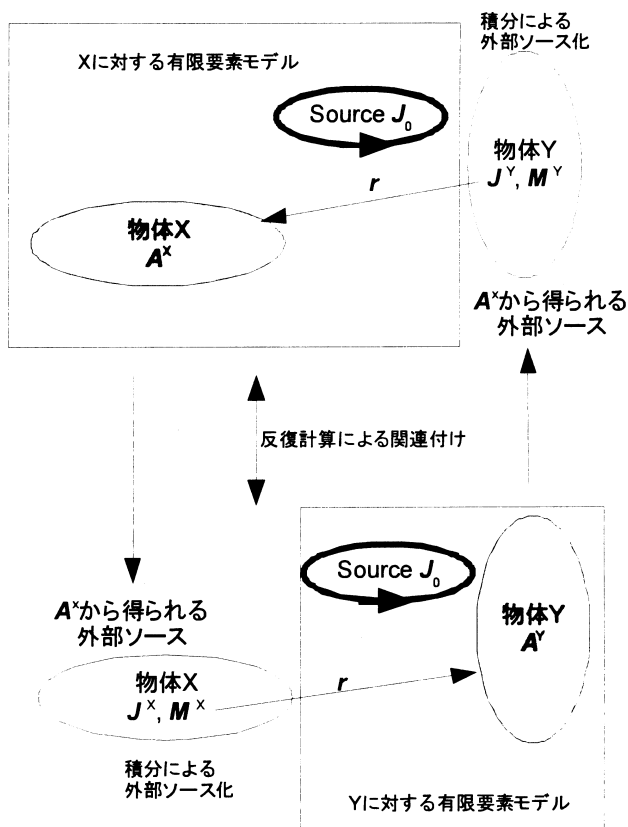


図3 有限要素モデルの重ね合わせ

この場合、物体 X を含む有限要素モデルでは、物体 Y は外部ソースと考えられる。ここで、物体 Y 中の渦電流 J^Y と磁化 M^Y は物体 X の影響を受けず、一定値であると仮定し、変形磁気ポテンシャル法を適用すれば、物体 X を含む有限要素モデルでは、(1) 式の A_s と H_s は次式となる^{(4), (5)}。

$$A_s^X = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V^Y} \frac{\mu_0 J^Y}{r} + \frac{M^Y \times r}{r^3} dv \quad (2)$$

$$H_s^X = \frac{1}{4\pi} \nabla' \times \iiint_{V^Y} \frac{\mu_0 J^Y}{r} + \frac{M^Y \times r}{r^3} dv \quad (3)$$

ここで、 r はソース点から物体 X 周辺の計算点に向かうベクトルである。

渦電流 J^Y と M^Y は物体 Y 中のベクトルポテンシャル A^Y から得られ、次式となる^{(4), (5)}。

$$J^Y = -j\omega A^Y \quad (4)$$

$$M^Y = (\mu - \mu_0)(\nabla \times A^Y) / \mu \quad (5)$$

物体 Y についても同様の計算式が得られる。以上により、それぞれの有限要素モデルは独立に計算することができる。しかし、この計算結果には、物体間の相互作用が考慮されていない。そこで、図 3 に示すように、それぞれの有限要素モデルの計算結果を新たなソースと考え、(1)-(3) 式をそれぞれの有限要素モデルに繰り返し適用することで物体間の相互作用を考慮する。

この計算法によれば、モデルの相対的な位置関係を表すものは(2)式と(3)式の r のみである。したがって、相対的な位置関係の変化に対して、(2)式と(3)式の r に関する項の再計算のみが必要であり、有限要素メッシュの再構築は不要となる。

3. 計算例

提案手法を図 4 に示す ECT 問題⁽⁶⁾へ適用した。裏面に傷のある導体板の表面側に傷検出用コイルを配置している。傷の幅は 0.2mm、長さは 10mm、深さは 0.75mm である。板厚は 1.25mm である。フェライトコアの直径は 0.8mm、高さは 1mm、コアと板の空隙は 0.3mm である。コイルは直径 1.4mm の円環電流を線電流で近似し、ソース電流の周波数は 300kHz とした。

傷信号を検出するためにコアとコイルは x 軸上を移動するので、コアと導体板の相対的な位置を変えた複数の有限要素モデルの渦電流解析を行った。そこで、図 5 に示すように導体板を含むモデル I とコアを含むモデル II に分けて、提案手法を適用した。

まず、それぞれのモデルについて、(1)式の左辺第1項から求められる係数行列[C]を計算した。次に、(2)式と(3)式によって(1)式の第2項と第3項を求め、それぞれのモデルに対する連立一次方程式の右辺の定数項とした。これは、図3の外部ソースからの影響を考慮する処理である。求解の方法として ICCG 法を用い、それぞれのモデルの解を求めた。この解を新たな外部ソースとして、連立一次方程式の右辺の新たな定数項を求め、求解を行った。図3のように、提案手法では相互の物体の影響は反復計算によって関連づけられる。反復終了の判定は、解の変動について次式で判定した。

$$\frac{\sum_{i \text{ edge}} (A_i - A_{i-1}, A_i - A_{i-1})}{\sum_{i \text{ edge}} (A_0, A_0)} < 10^{-5}$$

導体板モデルとフェライトコアモデルをそれぞれ 22,800 と 3,192 の六面体有限要素に分割した場合、10回の反復計算で収束した。提案手法が良好な収束特性を持つことが確認できた。図6に最終的な計算結果である傷信号を示す。傷付近で大きな信号が得られており、妥当な計算結果となっていることが確認できる。

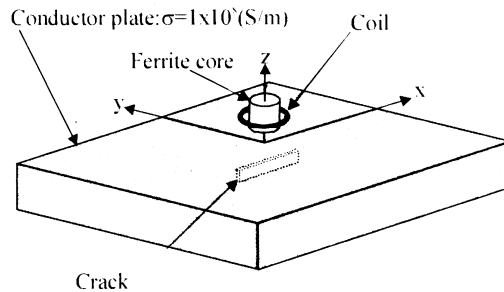


図4 ETCモデル

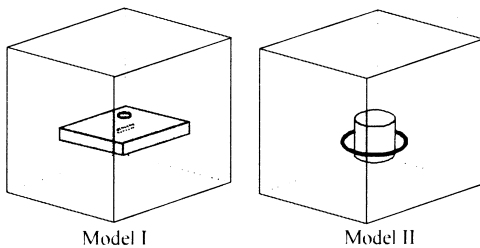


図5 導体板モデルとコアモデル

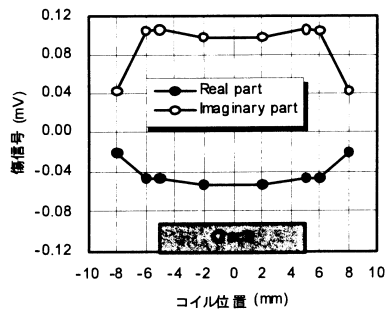


図6 傷信号

4. むすび

物体間の相対位置変化に対して生じる新たな有限要素分割や有限要素メッシュの再構成を避けるために、複数の有限要素モデルを積分式と反復計算で重畳する方法を提案した。物体間の相対位置が変化する ECT ベンチマークモデルに提案手法を適用し、計算結果により得られた傷信号が物理的に妥当な解となることを確認した。提案手法の反復計算については良好な収束特性を計算例で示した。

参考文献

- (1) Tani, K.: Dynamic analysis of linear actuator taking into account eddy currents using finite element method, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 35., No. 3, pp.1785-1788, 1999.
- (2) 山崎克巳:かご形誘導電動機—各研究機関による解析と実験結果の比較—, 平成 13 年電気学会全国大会講演論文集, vol. 5, pp.2150-2153, 2001.
- (3) Kameari, A.: Solution of asymmetric conductor with a hole by FEM using edge-element,” COMPEL, Vol.9, pp.230-232, 1990.
- (4) Tanaka, M. et al.: Fast simulation method for eddy current testing, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 36, No.4, pp.1728-1731
- (5) Tsuboi, H. and Tanaka, M.: Three dimensional eddy current analysis by the boundary element method using vector potential, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 26, No.2, pp.454-457, 1990.
- (6) Takagi, T. et al.: Benchmark model of eddy current testing for steam generator tube: experiment and numerical analysis, International Journal of Applied Electromagnetics in Materials, vol. 5, No.2, pp.149-162, 1993.

Superposition method for finite element model in eddy current analysis

Motoo TANAKA

ABSTRACT: It is important to avoid regenerating finite element meshes due to a relative position change in finite element problem including two or more objects, such as motor and eddy current testing probe. In this paper, a method of superposition for two or more finite element models is proposed. The finite element model for each object is made independently, and the interaction of the models are considered by a iterative calculation method and integral equations with respect to the vector potentials based on the reduced potential technique. Therefore, the reconstructing of the finite element mesh due to the relative position change is not necessary.

Key words : finite element method, eddy current, integral equation